

échanges

toujours les limites

par Pascal Monsellier
Orléans

L'article de Daniel Lazet dans un récent numéro du Bulletin National de l'A.P.M.E.P. (1) fait opportunément le point sur un sujet qui a beaucoup agité les salles de professeurs l'an dernier. Si le point de vue de l'auteur apporte un éclairage décisif et remplace utilement un commentaire officiel insuffisant sur ce point, je pense qu'il ne résout pas pratiquement certaines difficultés que rencontrent les enseignants.

Une remarque

Il est bon que les professeurs s'interrogent sur le statut des concepts qu'ils manipulent. Mais il y a les professeurs... et il y a les élèves. L'"ancienne" définition des limites en \mathcal{E} , α occupait rituellement une heure en Première et personne (ou presque) n'en reparlait jamais sans que cela traumatisât les élèves. Il est probable que la "nouvelle" définition subisse actuellement le même sort. Preuve que c'est autre chose qui, en pratique, fonctionne, quand un élève étudie une limite.

(1) A propos de la notion de limite en classe de Première S (et au-delà). D. Lazet (IREM de Bordeaux). Bulletin A.P.M.E.P. n° 341 (décembre 1983), p. 588 à 600.

Un des problèmes qu'est censé résoudre un programme national est "Qu'exige-t-on des élèves sur cette question au bac ?". La définition de la limite du programme, nouvelle ou ancienne, ne répond pas à cette question.

Tout ceci pour tracer les limites de la présente réflexion qui, traitant d'un sujet qui préoccupe les enseignants, n'émeut pas la majorité des élèves de Première S, de Première E ou d'ailleurs.

Qu'est-ce que E ?

On trouve la définition actuelle de la limite dans les Commentaires du programme de Première S-E (2). Rappelons-la.

On adoptera la définition suivante : soit E un intervalle, ou une réunion de deux intervalles, choisis de façon que $E \cup \{0\}$ soit un intervalle. Si f est une application de E dans \mathbb{R} , on dira que f admet la limite 0 en 0 (ou que $f(x)$ tend vers 0 avec x) si et seulement si :

$$(\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*) (\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*) (\forall x \in \mathbb{R}) [(x \in E \text{ et } |x| < \eta) \Rightarrow (|f(x)| < \delta)] .$$

On notera que l'inégalité $|x| < \eta$ a remplacé l'inégalité $0 < |x| < \eta$ qui prévalait dans l'usage antérieur. Une limite en 0 à gauche (resp. à droite) est la limite de la restriction à $E \cap \mathbb{R}_-^*$ (resp. $E \cap \mathbb{R}_+^*$) ; on évitera de développer ces considérations.

Il résulte de là que si une fonction est définie en un point a , elle n'a de limite en ce point que si elle est continue en ce point ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$).

A ce propos, la question qui revient comme un leitmotiv dans la bouche des enseignants est : "Qu'est-ce que cet ensemble E ?". On sent que le(s) auteur(s) du Commentaire ont voulu éviter de parler de voisinage(s) pour ne pas compliquer la définition, mais que ceux-ci sont contenus en filigrane. C'est ainsi que l'a d'ailleurs compris Lazet (3) qui commente : "Autrement dit, au voisinage de a , l'ensemble de définition de f répond à l'un des schémas suivants...". Si l'on s'en tient stricto sensu au texte, cette définition présente une double difficulté :

— La phrase "si f est une application de E dans \mathbb{R} " sous-entend pour tout enseignant de langue française que E est l'ensemble de définition de f . Certains enseignants en ont déduit qu'on n'étudiait en Première

(2) Edition CNDP, p. 85.

(3) Article cité page 590.

S-E que les applications dont l'ensemble de définition est la réunion d'au plus 2 intervalles. Pourquoi pas ? Cela exclut les fonctions rationnelles ayant plus d'un pôle (ce qui n'est peut-être pas un mal). Mais on ne peut alors plus parler de limites pour la fonction tangente...

- Pour accepter des fonctions définies sur des ensembles un peu plus "lordus" (4), certains pensent que E est une partie, contenant 0, de l'ensemble de définition de f. Mais, si on ne parle pas de voisinage, le choix de E est hasardeux. Par exemple, si f est la fonction partie entière, et si je choisis "librement" $E = [0; 1]$, ensemble qui répond aux critères de la définition, j'obtiens le résultat suivant : la fonction partie entière admet la limite 0 en 0. Résultat que les auteurs du Commentaire ne souhaitent sans doute pas.

Cette définition souffre donc d'imprécision. Ce n'était pas la peine d'affirmer "*L'étude des limites exige des définitions*" (5) pour en imposer une si contestable.

3. En Terminale C-E (6)

C'est la définition de 1^{re} S-E qui est toujours utilisée puisque le programme ne précise rien de nouveau à ce propos. Les manuels, par contre, se croient obligés de rappeler la définition. On éprouve quelque surprise à les parcourir. Voici quelques exemples.

DIDIER (Dimathème) reprend presque mot à mot le commentaire. L'ambiguïté précitée (sur E) demeure.

Soit E une partie non vide de \mathbb{R} telle que $E \cup \{x_0\}$ soit un intervalle. Une application f de E vers \mathbb{R} admet une limite ℓ en x_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que

$$|x \in E \text{ et } -\alpha < x - x_0 < \alpha \Rightarrow [\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon],$$

que l'on écrit également

$$[|x - x_0| < \alpha \Rightarrow ||f(x) - \ell| < \varepsilon].$$

Didier - TC p. 81

ISTRA (IREM de Strasbourg) lève les ambiguïtés avec soin, en considérant deux cas, et en utilisant le concept de continuité.

(4) Etant entendu qu'il ne s'agit pas ici d'introduire des fonctions "pathologiques" que le programme souhaite manifestement écarter.

(5) Commentaire des programmes de Première S. Édition CNDP, p. 84.

(6) Le problème est peut-être différent en Terminale D. Mais je n'ai guère eu le temps de me pencher sur cette question.

Soient f une fonction, x_0 et ℓ deux nombres réels :

1) Quand x_0 appartient à \mathcal{D}_f , on dit que f admet la limite ℓ en x_0 si f est continue en x_0 et $\ell = f(x_0)$.

2) Quand x_0 n'appartient pas à \mathcal{D}_f , mais que pour tout $a > 0$, $]x_0 - a, x_0 + a[\cap \mathcal{D}_f$ n'est pas vide, on dit que f admet la limite ℓ en x_0 si la fonction \tilde{f} définie par :

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ pour } x \in \mathcal{D}_f \text{ et } \tilde{f}(x_0) = \ell$$

est continue en x_0 .

Dans les deux cas, f admet la limite ℓ en x_0 si et seulement si :

$$(\text{E}) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Istra - TC p. 36

MAGNARD (Audirac) résout aussi le problème à sa manière.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D tel que $D \cup \{x_0\}$ contienne un intervalle contenant x_0 (non réduit à $\{x_0\}$).

On dit qu'un réel ℓ est limite de f au point x_0 (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in D, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Magnard - TC p. 27

HACHETTE donne une définition non formalisée mais apporte les précisions ci-dessous. Il est donc clair alors que ce manuel s'écarte de la définition de Première et n'accepte pas qu'on parle de limite en une borne d'un intervalle de définition. (Il exige en ce cas qu'on parle de limite à droite ou de limite à gauche).

2° On n'étudiera la limite d'une fonction en x_0 que si l'ensemble de définition de f contient des réels aussi voisins que l'on veut de x_0 ; c'est-à-dire s'il existe un réel strictement positif a tel que $]x_0 - a, x_0 + a[\setminus \{x_0\} \subset D_f$. On dit alors que f est définie au voisinage de x_0 .

3° Nous disons qu'une fonction f admet une limite à droite (resp. à gauche) égale à ℓ en x_0 si la restriction de f à $[x_0, +\infty[$ (resp. à $] -\infty, x_0]$) admet la limite ℓ en x_0 . On note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

Hachette - TC p. 162-163

Situations diverses, on le voit. Tout cela n'aurait aucune importance si on ne revenait pas à la question suivante : *Qu'exige-t-on d'un élève au baccalauréat ?* L'élève qui écrira $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ sera-t-il pénalisé pour cause de lèse - Hachette ? Quels préliminaires aux théorèmes sur les limites un élève est-il censé énoncer ?...

De bons esprits, avec lesquels je suis en partie d'accord, ne manqueront pas de répondre que ces questions ont peu d'importance, et qu'il ne faut pas masquer par trop de formalisme la vigueur mathématique des problèmes à résoudre. Ceux qui ont déjà assisté à une "commission d'harmonisation" du Bac, et au coupage d'épsilon en quatre qui l'accompagne, savent que ces questions ont un aspect pratique essentiel, et qu'il est urgent que la COPREM mette un peu d'unité là-dedans.

4. Régionalisation

Dans le Loiret, les professeurs de TC et TE ont décidé d'appliquer une définition départementale (prémices de la décentralisation !). Nous considérons que D_f , ensemble de définition de f , est un intervalle ou une réunion d'intervalles non réduits à un point ; on n'étudie la limite qu'en des points qui sont dans D_f , ou qui sont des extrémités d'intervalles de D_f . Ce qui importe, c'est la "*condition préalable de recherche de limite en x_0* " qui permet de s'entendre sur les fonctions "pathologiques" que nous rejetons et sur ce que nous attendons clairement des élèves.

Un seul inconvénient à notre démarche : nos élèves seront examinés par des correcteurs exerçant hors du Loiret et, au jour où j'écris ces lignes, nous ignorons les définitions qui ont été retenues dans les autres départements de l'Académie...

5. Deux problèmes pour finir

Le programme de TC pose, à propos des limites, deux problèmes qui, quoique mineurs, montrent ou bien que ce programme a été rédigé trop hâtivement, ou bien que le lecteur λ que je suis n'a pas su deviner des subtilités trop bien cachées.

III. b) "Composée d'une fonction de limite l par une fonction continue au point l ";

Pourquoi exiger que la seconde fonction soit définie en ℓ ? Cela signifie-t-il qu'il faut renoncer aux compositions qui ne vérifient pas ces conditions? Par exemple, que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln |1 - e^x|$ est un problème trop difficile en TC?

III. g) Le théorème de "prolongement" de la dérivée, tel que le programme l'énonce, conduit à une situation qui peut se révéler singulière:

"Si la fonction dérivée f' admet au point a une limite ℓ , alors on a également

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell "$$

En effet, qu'est-ce que f' ? Pour que ce théorème soit correct, il faut que f' soit la fonction dérivée de f sur $I - \{a\}$. Et pour peu que la limite ℓ existe, il est difficile de ne pas noter f' la dérivée de f sur I , alors que ce n'est que le prolongement de f' en a . Si on accepte cette incorrection, bien tentante, on tombe alors dans le cercle vicieux suivant: avant d'utiliser le théorème, on doit se poser la question: f' est-elle définie en a ? Mais, justement, on utilise ce théorème quand on ne sait pas répondre à cette question! Si l'on suppose que f' n'est pas définie en a , on peut étudier $\lim_a f'$, mais si cette limite est un réel, le théorème conclut que f' est définie en a ! Kafkaïen.

En fait, je préfère accepter l'incorrection précitée (qui va dans le sens assez naturel de: " f' est la dérivée de f sur le plus grand ensemble possible"), mais énoncer le théorème avec les limites à gauche et à droite de f' en a , ce qui évite d'avoir à se poser la question préliminaire. Mais je ne suis pas alors dans la ligne du Commentaire de Première, lequel n'accorde que peu d'importance à ces sortes de limites et recommande d'éviter de "*développer ces considérations (7)*".

Conclusion

J'ai l'impression que cette lettre "vole" très bas au regard de l'article très pertinent de Daniel Lazet qui m'a servi de prétexte, et auquel je souscris entièrement. Mais je pense qu'il faut s'occuper aussi des contraintes de l'examen tant qu'il existe sous cette forme. Les nouveaux programmes

(7) Commentaire des programmes de Première S. Edition CNDP, p. 85.

ont fait éclore des pratiques fort différentes les unes des autres (8). Cette diversité est incontestablement source de richesse. Encore faudrait-il que les élèves passent le baccalauréat dans des conditions d'équité.

Je finirai sur un regret et un espoir :

- quitte à imposer une définition de la limite, autant aller jusqu'au bout et expliquer clairement ce qui est sous-entendu. Cela ne m'aurait pas choqué que les Commentaires aient exposé des attendus semblables, par leur volume et par leur pertinence, à ceux de D. Lazet ;
- il est urgent que la COPREM rassemble suffisamment d'informations en Première et Terminale (et pas seulement dans les sections E, S, C, D), pour dresser des garde-fous et recenser ce qui, dans ces classes, constitue un consensus. En particulier, pourrait-on poser et discuter la question de savoir si une définition en ε, η est indispensable pour faire de l'Analyse dans le secondaire ? (9).

(8) Nous parlons ici de l'analyse ; mais il y aurait aussi énormément à dire sur la géométrie en T.C. Feuilletter les manuels laisse songeur : il y a ceux qui font "comme avant" avec une haute dose d'algèbre linéaire avant d'entamer la géométrie. Il y a ceux qui essaient de faire de la géométrie, et de déconnecter la partie d'algèbre linéaire du programme. Est-il possible de faire une épreuve commune du baccalauréat avec ces conceptions si diverses ?

(9) Cette question m'est posée en fait par R. Barra, qui m'a fait plusieurs suggestions à propos de cet article. Je la reprends volontiers à mon compte.