dans nos classes

un outil pédagogique pour l'enseignement des mathématiques : les micros ordinateurs

Etude de quelques méthodes numériques illustrant le programme de Terminale D

par Liliane Mangeney,
Lycée Paul Bert, 7 rue Huyghens, 75014 Paris

1. Introduction

Cet article est destiné aux collègues n'ayant pas encore de pratique dans l'utilisation de l'informatique.

J'essaierai de montrer que l'on peut intégrer très facilement l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques, en particulier en classe de Terminale, en fabriquant des programmes très simples avec les élèves.

J'ai tenu à publier cet article qui correspond à une expérience où le travail a été réalisé le plus souvent par les élèves eux-mêmes.

Les collègues qui se lanceront concrètement dans l'utilisation de cet article pourront obtenir très vite des résultats illustrant leur cours et que les élèves trouvent souvent spectaculaires ; puis, après avoir utilisé ces programmes souvent très modestes, ils pourront laisser libre cours à leur imagination pour les enrichir.

Ce travail a été réalisé au lycée Paul Bert à Paris, avec une quinzaine d'élèves de Terminale D assistant bénévolement à une séance hebdomadaire de 2 heures, en dehors du cours de mathématiques.

Les élèves n'avaient aucune formation en informatique et ont été très motivés par cette initiation élémentaire au langage "Basic" à partir de problèmes mathématiques du cours. Les 8 ordinateurs utilisés sont des "Silz II" fournis par l'Education Nationale.

A l'occasion de l'élaboration de chacun des programmes suivants, les notions mathématiques concernées ont été approfondies et mieux assimilées.

L'expérience a donc permis, en même temps qu'une initiation à l'informatique, une meilleure assimilation du cours des mathématiques.

J'espère que la lecture de cet article aidera de nombreux collègues à faire les premiers pas en salle Informatique.

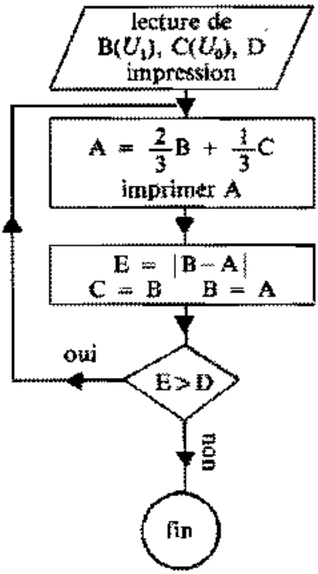
2. Etude d'une suite

La suite $\begin{cases} U_n = \frac{2}{3} U_{n-1} + \frac{1}{3} U_{n-2} (n \geqslant 2) \\ U_0, U_1 \end{cases}$ avait été étudiée en classe ainsi que sa convergence.

L'étude numérique suivante a permis de rendre plus concrète la limite égale à 1,5 si $U_0 = 3$ et $U_1 = 1$.

Dans le programme suivant les deux premiers termes de la suite $C = U_0$ et $B = U_1$ peuvent être choisis lors de l'exécution. L'ordinateur calcule $A = U_n = \frac{2}{3} U_{n-1} + \frac{1}{3} U_n$, l'imprime et calcule $E = |B - A| = |U_{n-1} - U_n|$; si cette différence E est supérieure à la précision D, il continue le calcul, sinon il s'arrête.

L'organigramme correspondant est le suivant :



Programme

```
15 INPUT"B=";B
16 INPUT"C=";C
17 INPUT"D=";D
18 LPRINT"B=";B;"C=";C;"D=";D
20 A=(2/3)*B+(1/3)*C
25 LPRINT A
30 E=ABS(B-A)
40 C=B; B=A
50 IF D<E THEN GOTO 20
60 END
```

Exécution

avec D = 0,001

```
B=1 C=3 D=.001
    1.66667
    1.44444
    1.51852
    1.49383
    1.50206
    1.49931
    1.50023
```

avec D = 0,00001

```
B=1 C=3 D=.00001
    1.66667
    1.44444
    1.51852
    1.49383
    1.50206
    1.49931
    1.50023
    1.49992
    1.50003
    1.49999
    1.5
    1.5
```

Remarque : L'impression des résultats aurait pu être améliorée, mais c'est le premier programme réalisé par les élèves eux-mêmes et ma démarche pédagogique a toujours été de faire tourner les programmes le plus rapidement possible de sorte que les élèves, après chaque séance, aient l'impression satisfaisante d'avoir réalisé quelque chose.

3. Méthode de Newton

Utilisation de la méthode de Newton pour calculer une valeur approchée de la solution de l'équation $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

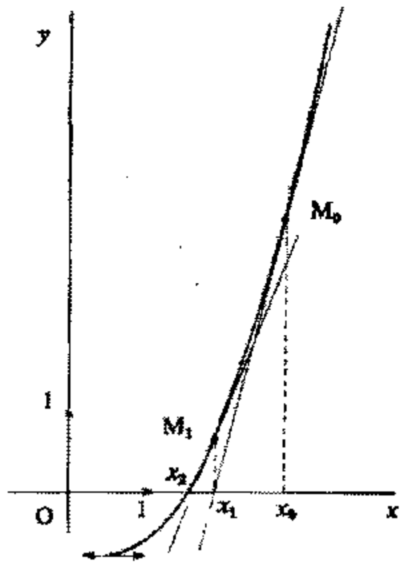


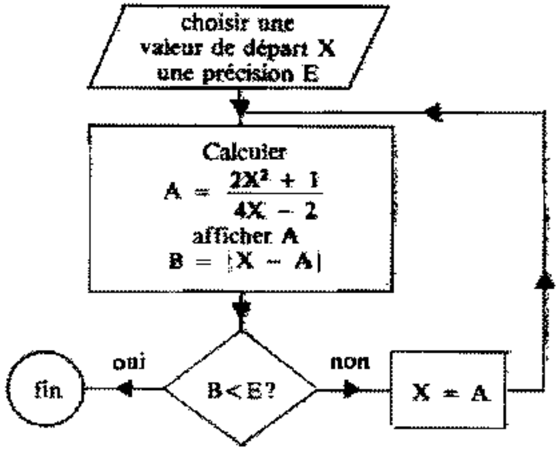
Fig. 1

La racine est approchée à l'aide des tangentes à la courbe : à partir du point $M_0(x_0, y_0)$, on trace la tangente à la courbe ; elle coupe l'axe Ox en x_1 qui donne une meilleure approximation et on recommence ainsi de suite jusqu'à ce que la précision désirée soit atteinte (figure 1).

L'équation de la tangente à la courbe en x_i est donnée par $y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$. L'intersection avec l'axe $0x$ a lieu quand $y = 0$, ce qui donne $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ et

pour $f(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$, $x_{i+1} = \dfrac{2x_i^2 + 1}{4x_i - 2}$

Organigramme



Programme

```
 1 INPUT X
 2 INPUT E
 3 LPRINT "X=";X;"E=";E
 5 A=(2*X*X+1)/(4*X-2)
10 LPRINT A
11 B=ABS(X-A)
12 IF B<E THEN GOTO 25
15 X=A
20 GOTO 5
25 END
```

Exécution
avec E = 0,0001

```
X=9 E=.0001
   4. 79412
   2. 73439
   1. 78503
   1. 43434
   1. 36852
   1. 36603
   1. 36603
```

4. Etude du signe du trinome

En début d'année, même en Terminale D, certains élèves ne maitrisent pas l'étude du signe du trinome.

La confection de ce programme les a motivés pour revoir cette question.

Programme

```
 1 LPRINT"ETUDE DU SIGNE D'UN POLYNOME"
 2 INPUT A,B,C
 5 D=(B*B)-(4*(A*C)):PRINT"D=";D
10 IF D>0 THEN GOTO 20
```

```
15 IF D<O THEN PRINT"IL N'Y A PAS DE SOLUTION, LE
   TRINOME EST DU SIGNE DE"; A:END
16 IF D=0 THEN GOTO 45
20 PRINT"IL Y A DEUX SOLUTIONS Q ET P, LE TRINOME
   EST DU SIGNE"
25 PRINT"DE";A;"A L'EXTERIEUR DES RACINES QUI
   SONT"
30 Q=(-B-SQR(D))/(2*A):PRINT"Q=";Q
35 P=(-B+SQR(D))/(2*A):PRINT"P=";P
40 END
45 PRINT"IL Y A UNE SOLUTION Q"
50 Q=-B/(2*A)
55 PRINT"Q=";Q
60 END
```

5. Triangle de Pascal

Cette étude a donné l'occasion de familiariser les élèves avec la notion de tableau et de double-indice.

a) Exercice préalable : Table de multiplication

L'instruction DIM A(5,5) définit un tableau ayant 5 lignes et 5 colonnes. Les éléments de ce tableau sont notés A(I,J) ($1 \leqslant I \leqslant 5$ et $1 \leqslant J \leqslant 5$) et $A(I,J) = I \times J$.

Programme et exécution

```
 1 DIM A(5,5)
10 FOR I=1 TO 5
15 FOR J=1 TO 5
20 A(I,J)=I*J
21 LPRINT A(I,J);
30 NEXT J
32 LPRINT
35 NEXT I
40 END
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

b) Triangle de Pascal

Dans le triangle de Pascal, les éléments de la première colonne sont égaux à 1 : $A(1,1) = 1 \ldots A(I,1) = 1$ et les autres sont obtenus en utilisant la relation

$$A(I,J) = A(I-1,J) + A(I-1, J-1) \text{ avec } J \leqslant I$$

La confection du programme a été très fructueuse : manipulation des indices, structure du triangle de Pascal, utilisation de l'instruction d'itération FOR, introduction de deux boucles imbriquées.

Programme

```
1 DIM A(10,10)
2 A(1,1)=1:LPRINT A(1,1)
3 FOR I=2 TO 10
4 A(I,1)=1:LPRINT A(1,1);
5 FOR J=2 TO I
10 A(I,J)=A(I-1,J)+A(I-1,J-1)
15 LPRINT A(I,J),
20 NEXT J
25 LPRINT
30 NEXT I
35 END
```

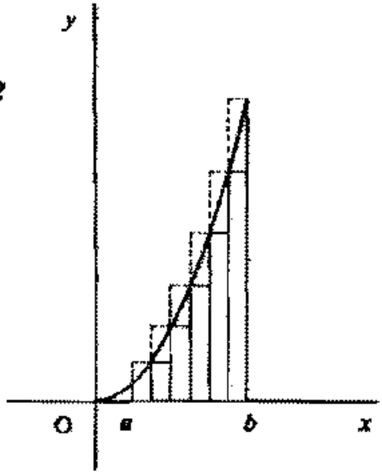
Exécution

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

6. Méthode des rectangles pour l'évaluation des intégrales définies de la forme $J = \int_a^b f(x)dx$.

La fonction étudiée est $f(x) = x^2$. L'intégrale J est égale à l'aire du domaine hachuré (fig. 2). On divise $[a,b]$ en N parties.

Fig. 2



La somme des aires des rectangles, $\frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)$ (avec $x_0 = a$) est est une valeur approchée par défaut de J, la somme $\frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N} f(x_i)$ (avec $x_N = b$) est une valeur approchée par excès de J.

L'exécution du programme suivant a été réalisée avec $a = 1$, $b = 6$. La valeur exacte de $J = \int_1^6 x^2\,dx$ est $\frac{215}{3}$ soit $J = 71{,}666...$

On voit bien, comment, lorsque N augmente, les valeurs approchées, par excès et par défaut se rapprochent de J.

Programme

```
10 REM"METHODE DES RECTANGLES"
20 INPUT"NOMBRE D'INTERVALLES";N
30 INPUT A,B
40 S=O
50 FOR I=1 TO N
60 X=A+I*(B-A)/N
70 Y=X*X
80 S=S+Y
90 NEXT I
100 S=S*(B-A)/N
110 PRINT"VALEUR APPROCHEE PAR EXCES";S
115 S=0
120 FOR I=0 TO N-1
```

```
130 X=A+I*(B-A)/N
140 Y=X*X
150 S=S+Y
160 NEXT I
170 S=S*(B-A)/N
180 PRINT"VALEUR APPROCHEE PAR DEFAUT";S
190 END
```

Exécution

A = 1 ; B = 6 ; N = 5

VALEUR APPROCHEE PAR EXCES 90
VALEUR APPROCHEE PAR DEFAUT 55

A = 1 ; B = 6 ; N = 100

VALEUR APPROCHEE PAR EXCES 72. 5438
VALEUR APPROCHEE PAR DEFAUT 70. 7938

A = 1 ;B = 6 ; N = 1000

VALEUR APPROCHEE PAR EXCES 71. 7542
VALEUR APPROCHEE PAR DEFAUT 71. 5792

7. Méthode de la dichotomie

Cette méthode permet de trouver une solution d'une équation qu'on ne peut pas résoudre par une méthode analytique (figure 3).

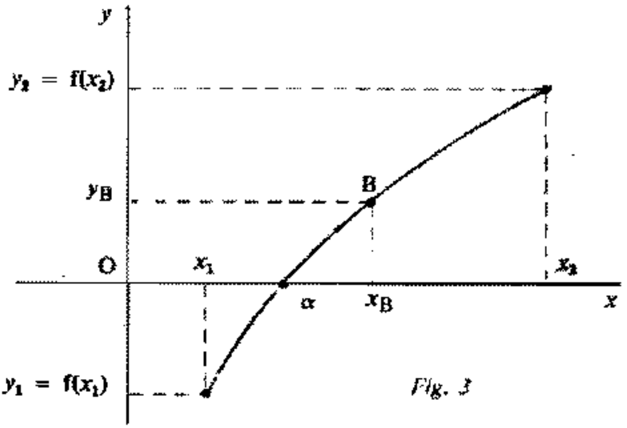
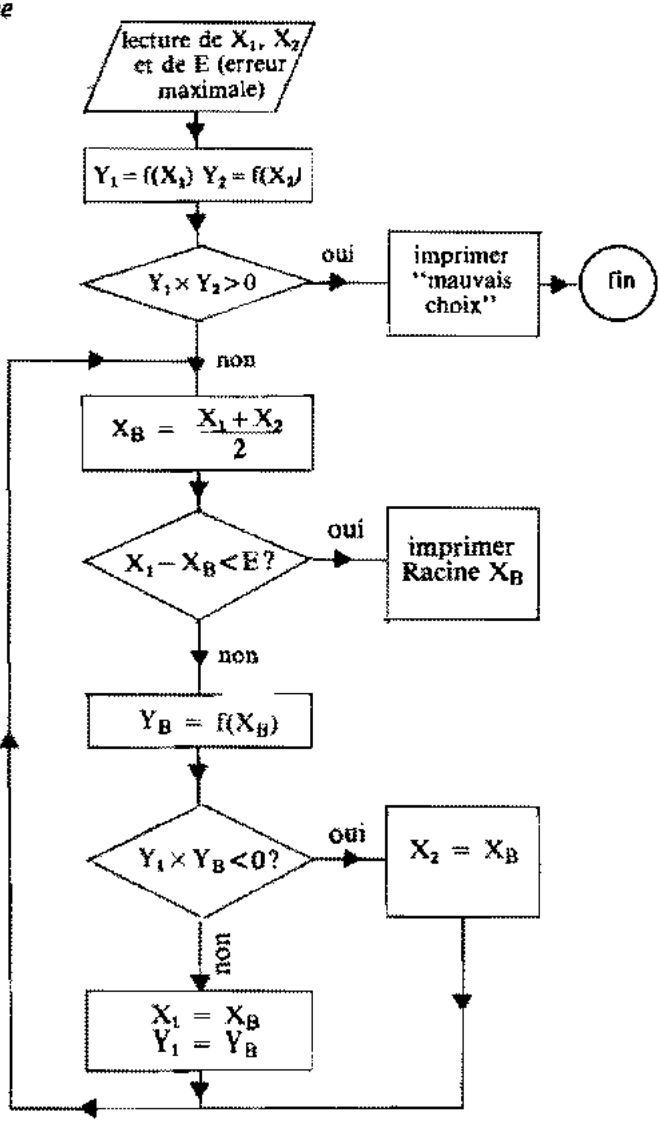


Fig. 3

Soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$. Il faut d'abord choisir deux valeurs x_1 et x_2 *encadrant la racine* α et donc telles que $f(x_1) \times f(x_2) < 0$.

On calcule ensuite $x_B = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; x_B est plus près de la racine que x_1 ou que x_2 ; si $|x_1 - x_B|$ est inférieur à l'erreur maximale E choisie, on imprime x_B sinon on calcule $f(x_B) = y_B$ et si $f(x_1)f(x_B) < 0$ alors $x_2 = x_B$ sinon $x_1 = x_B$ et on calcule une nouvelle approximation.

Organigramme



Le programme a été écrit avec la fonction définie par $f(x) = x - 2{,}7182 \sin(x)$ définie en 1000 en sous-programme.

Programme

```
   5 REM DICHOTOMIE
  10 INPUT"X1,X2";X1,X2
  15 INPUT "ERREUR MAXI";E
  16 LPRINT"VALEURS DE DEPART";X1,X2
  17 LPRINT"ERREUR MAXI";E
  20 X=X1:GOSUB 1000:Y1=Y
  40 X=X2:GOSUB 1000:Y2=Y
  50 IF Y1*Y2>0 THEN PRINT "MAUVAIS CHOIX X1,X2":END
  60 XB=(X1+X2)/2
  70 IF ABS(X1-XB)<E THEN 125
  90 X=XB: GOSUB 1000: YB=Y
 100 IF Y1*YB<0 THEN X2=XB ELSE X1=XB: Y1=YB
 110 GOTO 60
 125 LPRINT"RACINE";XB
 140 END
1000 Y=X-2. 71828*SIN(X):RETURN
```

Exécution

```
VALEURS DE DEPART       1     10
ERREUR MAXI . 1
RACINE 2. 19531

VALEURS DE DEPART       1     10
ERREUR MAXI . 01
RACINE 2. 2041

VALEURS DE DEPART       1     10
ERREUR MAXI . 001
RACINE 2. 19916

VALEURS DE DEPART       1     10
ERREUR MAXI . 0001
RACINE 2. 19909

VALEURS DE DEPART       1     10
ERREUR MAXI . 00001
RACINE 2. 19911
```

8. Résultats du "bac blanc"

Deux "bac blanc" ayant eu lieu au lycée, les élèves ont décidé de faire un programme permettant de sortir — sur imprimante — les résultats, pour toutes les classes de Terminales.

Le programme suivant concerne la classe de Terminale D. Si l'on sait qu'un élève de Terminale D est reçu avec un total de 220 points, ajourné avec un total inférieur à 176 points et passe l'oral avec un total compris entre 176 et 220 points, le programme se comprend aisément. A$(1) est le nom du premier élève, N(1), M(1) ses notes de français, O(1) sa note de philosophie etc.

Programme

```
1    REM "RESULTAT DU BAC BLANC"
10   INPUT "NOMBRE D'ELEVES";B
20   DIM A$(B),N(B),M(B),O(B),P(B),Q(B),R(B),S(B),U(B)
30   FOR I=1 TO B
40   INPUT  "NOM";A$(I),N(I),M(I),O(I),P(I),Q(I),R(I),S(I),U(I)
50   NEXT I
60   FOR I=1 TO B
70   T=2*N(I)+M(I)+2*O(I)+2*P(I)+4*Q(I)+4*R(I)+4*S(I)
 +3*U(I)
75   LPRINT"*******************************************
**************"
80   IF T<176 THEN GOTO 110
90   IF T<220 THEN GOTO 120
100  LPRINT   A$(I),"FRANÇAIS ECRIT";N(I), "FRANÇAIS
ORAL";M(I), "PHILO";O (I):PRINT:LPRINT"HISTOIRE-
GEOGRAPHIE";P(I),"MATHEMATIQUES";Q(I),"PHYSIQUE";
R(I):PRINT:LPRINT"BIOLOGIE";S(I), "LANGUE VIVANTE1" ;
U(I), "TOTAL=";T, "REÇU":GOTO 130
110  LPRINT   A$(I),"FRANÇAIS ECRIT";N(I), "FRANÇAIS
ORAL";M(I), "PHILO";O (I):PRINT:LPRINT"HISTOIRE-
GEOGRAPHIE";P(I),"MATHEMATIQUES";Q(I),"PHYSIQUE";
R(I):PRINT:LPRINT"BIOLOGIE";S(I), "LANGUE VIVANTE1" ;
U(I), "TOTAL=";T, "AJOURNE":GOTO 130
120  LPRINT   A$(I),"FRANÇAIS ECRIT";N(I), "FRANÇAIS
ORAL";M(I), "PHILO";O (I):PRINT:LPRINT"HISTOIRE-
GEOGRAPHIE";P(I),"MATHEMATIQUES";Q(I),"PHYSIQUE";
R(I):PRINT:LPRINT"BIOLOGIE";S(I),
```

```
LANGUE VIVANTE1" ; U(I), "TOTAL=";T, "ORAL":GOTO 130
130  LPRINT"*******************************************
***************"
135  NEXT 1
140  END
```

Exécution (pour deux élèves)

```
************************************************************
BOURAOUI      FRANÇAIS ECRIT  9      FRANÇAIS ORAL  9
PHILO  9      HISTOIRE-GEOGRAPHIE  0
MATHEMATIQUES 10      PHYSIQUE 10      BIOLOGIE 12
LANGUE VIVANTE1 12      TOTAL=209      ORAL
************************************************************
BOUVIER       FRANÇAIS ECRIT 10      FRANÇAIS ORAL 13
PHILO  9      HISTOIRE-GEOGRAPHIE 12
MATHEMATIQUES 11      PHYSIQUE 10      BIOLOGIE 13
LANGUE VIVANTE1  8      TOTAL=235      REÇU
************************************************************
```

9. Conclusion

Cette expérience a été très enrichissante pour les participants sur plusieurs points.

Ce premier contact des élèves avec les ordinateurs leur a permis de découvrir et de démystifier "l'informatique". Certains se sont inscrits en I.U.T. d'informatique pour l'an prochain ; tous ont compris qu'ils pourraient utiliser cet outil en cas de besoin dans leur avenir professionnel. D'autre part, le travail en groupes s'est effectué spontanément et parfois indépendamment du professeur qui ne trouve pas toujours toutes les erreurs dans un programme. De plus, en établissant un organigramme et un programme, un élève doit approfondir les problèmes mathématiques : je n'ai jamais vu des élèves, dans un cours classique de mathématique passer autant de temps à réfléchir sur la méthode de dichotomie que ceux qui ont établi le programme.

La publication des programmes ci-dessus, à cause de leur grande modestie du point de vue informatique, me paraît intéressante. En effet, bien des collègues, encore effrayés par "l'informatique" pourront constater qu'avec, moins d'une dizaine d'instructions, on peut proposer à des élèves de Terminale, toute l'année, une approche informatique concrète du cours de mathématiques.

Nous avons d'ailleurs utilisé, avec quelques collègues du lycée, une même approche dès la classe de seconde.

D'autre part, je me suis aperçue que les avis des collègues sont très partagés sur ce que doit être l'utilisation de l'informatique avec les élèves.

Je demande donc à tous les collègues intéressés, anciens ou nouveaux utilisateurs, de l'outil informatique de bien vouloir m'écrire pour que nous confrontions et enrichissions nos expériences.

Bibliographie

Méthodes de calcul numérique, Claude Nowakowski, Tome 1, Editions du PSI.
Introduction au basic, Pierre Le Beux, Sybex.
Mathématiques élémentaires d'un point de vue algorithmique, Engel (Cedic)