0^0 existe ! je l'ai rencontré

par Pierre Gagnaire,
Collège E. Herriot, Bron

"5^3 est le produit qui est formé par 3 facteurs 5 ; d'une manière générale, si a et b sont des naturels, a^b est le produit qui est formé par b facteurs a ".

Cette "définition" est très souvent suivie de la mise en garde suivante : "0^0 n'existe pas".

On voit mal, en effet, ce que désigne "le produit qui est formé par 0 facteur 0".

En fait, la "définition" ci-dessus visée tombe en défaut non seulement lorsque b désigne 0 mais déjà lorsque b désigne 1 : qu'est-ce que "le produit qui est formé par 1 facteur a " ? Il est impossible d'écrire un produit d'un seul facteur ! Mais il est très gênant que "5^1 n'existe pas", car l'écriture 5^1 est bien utile dans certains cas. Et même 5^0 a son rôle à jouer, alors "on convient que...".

Les "définitions" qui nécessitent des "conventions" ne sont pas dignes de leur nom. Le même sale tour nous est joué par la "définition" du produit de deux nombres à partir de l'addition : "5×3 est la somme qui est formée par 3 termes 5 ; d'une manière générale, si a et b sont des naturels, $a \times b$ est la somme qui est formée par b termes a ".

Comme précédemment, la "définition" tombe en défaut lorsque b désigne 0 ou 1. Mais cette fois, c'en est trop : le fait que 0 soit élément absorbant et que 1 soit élément neutre pour la multiplication ne résulte pas de la définition du produit de deux naturels, mais d'une convention. C'est scandaleux !

Si on veut définir a^b comme un produit, il faut pouvoir écrire ce produit, et dans tous les cas.

Si on veut définir $a \times b$ comme une somme, il faut pouvoir écrire cette somme, et dans tous les cas.

Or l'existence des éléments neutres 0 et 1 permet cette écriture dans tous les cas. Voici comment :

Si a et b désignent des naturels, alors

$a \times b$ désigne une somme qui contient • des termes 0 , • b termes a .	a^b désigne un produit qui contient • des facteurs 1 , • b facteurs a .

Les termes 0 et les facteurs 1 sont en nombre quelconque (mais fini s'il est utile de le préciser !) et, comme ils sont neutres, on *peut* ne les écrire que lorsqu'ils sont indispensables, c'est-à-dire dans le cas où b désigne 1 ou 0.

En particulier :

$5\times3 = 0+0+5+5+5$	$5^3 = 1\times1\times5\times5\times5$
$5\times2 = 0+0+5+5$	$5^2 = 1\times1\times5\times5$
$5\times1 = 0+0+5$	$5^1 = 1\times1\times5$
$5\times0 = 0+0$	$5^0 = 1\times1$

Ainsi, les propriétés de 1 et de 0 pour la multiplication et pour l'exponentiation des naturels résultent bien des définitions et non de conventions qui sont, par nature, arbitraires (pourquoi n'en a-t-on pas pris d'autres ? Après tout, et, si tout n'est affaire que de convention, pourquoi ne pas convenir que 0^0 existe ?)

Le naturel 0 ne présente aucun problème particulier :

$$0^3 = 1\times1\times0\times0\times0\,;\ 0^2 = 1\times1\times0\times0\,;\ 0^1 = 1\times1\times0\,;\ 0^0 = 1\times1.$$

Et voilà : $0^0 = 1$, d'après la définition (la *bonne* : celle qui marche dans *tous* les cas). A qui fera-t-on croire que 1 n'existe pas ? (c'est bien ce que l'on affirme lorsqu'on dit "0^0 n'existe pas" puisque $0^0 = 1$).

Il y a une autre manière de définir a^b : c'est la manière ensembliste : a^b est le cardinal de l'ensemble des applications dont la source est un ensemble de cardinal b et dont le but est un ensemble de cardinal a. En particulier, 0^0 est le nombre d'applications dont la source et le but sont vides. Or il y a une telle application et une seule : celle dont le graphe est vide. Du point de vue ensembliste donc, et encore, $0^0 = 1$.

Rien n'est plus déplaisant que de voir enseigner des choses que l'on sait fausses. Mais c'est *seulement* déplaisant, donc sentimental ; autant dire que cela ne compte pas.

A y regarder de plus près, les définitions ici proposées ont d'autres avantages que celui de dénoncer une faute. Ces définitions sont *extensibles*. Reprenons les trois lignes :

$5\times2 = 0+0+5+5$	$5^2 = 1\times1\times5\times5$	$0^2 = 1\times1\times0\times0$
$5\times1 = 0+0+5$	$5^1 = 1\times1\times5$	$0^1 = 1\times1\times0$
$5\times0 = 0+0$	$5^0 = 1\times1$	$0^0 = 1\times1$

Le passage d'une ligne à la suivante se fait par la suppression d'un terme 5, d'un facteur 5 ou d'un facteur 0. La suppression d'un terme 5 équivaut à la soustraction de 5 ou encore à l'addition de l'opposé de 5 (pour qui connaît les entiers). La suppression d'un facteur 5 équivaut à la division par 5 ou encore à la multiplication par l'inverse de 5 (c'est-à-dire par $\frac{1}{5}$ ou encore par 0,2). La suppression d'un facteur 0 n'équivaut à rien d'autre : on ne divise pas par 0 ; 0 n'a pas d'inverse, on ne peut le supprimer là où il n'est pas.

L'existence de l'opposé de 5 et de l'inverse de 5 permet de prolonger les deux premières colonnes. On ne peut prolonger la troisième :

$$
\begin{array}{lll|lll}
5\times 2 & = 0+0+5+5 & & 5^2 & = 1\times 1\times 5\times 5 & \\
5\times 1 & = 0+0+5 & \hookleftarrow +(-5) & 5^1 & = 1\times 1\times 5 & \hookleftarrow \times 0{,}2 \\
5\times 0 & = 0+0 & \hookleftarrow +(-5) & 5^0 & = 1\times 1 & \hookleftarrow \times 0{,}2 \\
5\times(-1) & = 0+0+(-5) & \hookleftarrow +(-5) & 5^{-1} & = 1\times 1\times 0{,}2 & \hookleftarrow \times 0{,}2 \\
5\times(-2) & = 0+0+(-5)+(-5) & \hookleftarrow +(-5) & 5^{-2} & = 1\times 1\times 0{,}2\times 0{,}2 & \hookleftarrow \times 0{,}2
\end{array}
$$

De même, on montre :

$$
\begin{array}{lll}
(-5)\times 2 & = 0+0+(-5)+(-5) & \\
(-5)\times 1 & = 0+0+(-5) & \hookleftarrow +5 \\
(-5)\times 0 & = 0+0 & \hookleftarrow +5 \\
(-5)\times(-1) & = 0+0+5 & \hookleftarrow +5 \\
(-5)\times(-2) & = 0+0+5+5 & \hookleftarrow +5
\end{array}
$$

Et la fameuse "règle des signes" n'est ainsi qu'une extension réfléchie d'une définition convenable.

Mais, dira-t-on, connaît-on au moins un exemple *d'utilisation* de l'écriture 0^0 ?" Il faut répondre d'abord que même si on n'en connaissait pas, ce ne serait pas une raison valable pour enseigner le contraire de la vérité. En outre, un tel exemple existe. Le voici :

Soit l'application polynomiale $f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 5x^2 - 7x + 3 \end{array} \right.$

0 a une image par f, et cette image est 3.

Or on enseigne, à juste titre, que f est la somme des applications-monomes $x \longmapsto 5x^2$, de *degré* 2, $x \longmapsto -7x$, de *degré* 1 et $x \longmapsto 3$ de *degré* 0. C'est dire que, *pour tout réel* x (et on ne prend pas, à ce moment, la précaution d'éliminer 0), $-7x = -7x^1$ et $3 = 3x^0$.

Aucun problème ne se pose si on adopte pour définition de a^b celle qui est ici proposée : $3\times 0^0 = 3\times 1$.

Mais si on persiste à affirmer "0^0 n'existe pas", alors soyons "logiques" avec nous-mêmes jusqu'au bout et ayons le courage de faire remarquer :

"Attention ! pour tout $x \neq 0$, $3 = 3x^0$ puisque $x^0 = 1$. Mais pour $x = 0$, $3 \neq 3\times 0^0$ puisque 0^0 n'existe pas. Bien sûr, s'il existait, ce serait 1, puisque $f(0) = 3$, mais nous ne pouvons en convenir ! Nous écrirons donc ainsi f :

$$
f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ 0 \longmapsto 3 \\ \text{et, si } x \neq 0 \; x \longmapsto 5x^2 - 7x^1 + 3x^0 \text{''} \end{array} \right.
$$

Ainsi, au fond, on pose le "principe" que voici :

"Lorsqu'on me donne à calculer x^0, je distingue deux cas :

a) $x \neq 0$, alors $x^0 = 1$;

b) $x = 0$, alors, comme 0^0 n'existe pas, j'évite de l'écrire, mais je dis encore que c'est 1".

Cela fait penser à un sketch de Laurel et Hardy :

"Les voyageurs ***sans bagage*** passent par la porte de ***gauche***. Les voyageurs ***avec bagage*** passent aussi par la porte de ***gauche***".