pourquoi m'a-t-on caché ça ?

La hauteur d'un triangle rectangle le divise en deux triangles plus petits, semblables entre eux et au grand. L'aire du grand est évidemment la somme des aires des deux petits ; or, pour des triangles rectangles semblables, les aires sont entre elles comme les carrés des hypoténuses — donc le carré de l'hypoténuse du grand est la somme des carré des hypoténuses des deux petits !

Cette démonstration magnifique, pourtant peu connue, du théorème de Pythagore, le déboulonne selon moi de son piédestal de pont-aux-ânes ; je suis tombé dessus en feuilletant le livre de van der Waerden "Geometry and Algebra in ancient Civilisations" (Springer-Verlag 1983), qui la dit familière aux Grecs de l'époque d'Euclide. J'en veux un peu, rétrospectivement, à mes professeurs de seconde, première et math-élem, pourtant excellents, de ne pas nous l'avoir donnée comme remarque ou exercice sur l'effet des similitudes sur les aires. Mais sans doute, tout comme moi jusqu'à une date récente, l'ignoraient-ils !

On peut faire une remarque analogue sur le théorème de d'Alembert (tout polynome complexe a une racine). L'ouvrage de Gårding "Encounter with Mathematics" (Springer-Verlag 1977), que je recommande vivement à tous, en donne la preuve que voici : Soit $P(z) = z^n + az^{n-1} + \dots$ un polynome ; quand $|z|$ tend vers l'infini, $P(z)$ est équivalent à z^n, donc pour $|z| = R$ assez grand, $|P(z)-z^n| \leqslant R^n/10$. Ainsi, quand z décrit le cercle C_R de rayon R centré en O, z^n décrit n fois le cercle de rayon R^n, et $P(z)$, proche de z^n, décrit une courbe fermée qui fait n tours autour de l'origine. Lorsque r varie de R à 0, la courbe image de C_r par P se déforme continûment d'une courbe initiale qui enlace n fois zéro à une courbe finale réduite au seul point $P(0)$. Elle doit nécessairement passer par zéro, d'où le résultat.

Bien sûr, ceci ne peut être rendu rigoureux qu'à l'aide de notions de topologie algébrique. J'ai néanmoins la conviction que bien des élèves de terminale seraient à même de comprendre une telle démonstration, et même de sentir son manque de rigueur. N'est-ce pas préférable à la sécheresse du "On démontre, et nous l'admettrons, que..." ?

Michel EMERY
Université Louis Pasteur,
Département de Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg