les fiches cuisines de tonton lulu

la recette du "kaprekar"(*)

par Jacques Lubczanski

Ingrédients : un nombre à quatre chiffres.

La recette originale :

- prenez votre nombre et ordonnez ses chiffres du plus grand au plus petit : vous obtenez un nouveau nombre : il s'écrit *abcd*
- reprenez votre nombre initial, et, cette fois, ordonnez ses chiffres du plus petit au plus grand : vous obtenez encore un autre nombre, qui s'écrit *dcba*
- effectuez la soustraction *abcd* – *dcba* : le résultat est un nombre à quatre chiffres
- reprenez la recette à son début, avec comme nombre initial le résultat de la soustraction.
- Cette recette ne s'arrête jamais, mais une surprise vous attend...

Le secret du chef : (ou comment épater la galerie)

Tous les nombres auxquels on applique cette recette finissent, tôt ou tard, par donner le même résultat, à savoir 6174.

Enfin, presque tous.

(*) Cet algorithme a été publié en 1949 par D.R. KAPREKAR, mathématicien indien de DEVLALI. Il a déjà fait, entre autres, l'objet d'un article de Pentamino I par Marc CHARNAY.

Il y a en effet dix "cas pathologiques" : ce sont les nombres qui s'écrivent *aaaa*, et qui donnent un résultat nul (qui s'écrit 0000).

Hormis ces dix originaux, tous les autres perdent leur personnalité pour devenir 6174, et ce, en huit "tours" au maximum.

Et si vous voulez en savoir plus...

Regardons de plus près le résultat de la soustraction :

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ -\;d\,c\,b\,a \\ \hline \end{array} \quad \text{avec } a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \text{ et } a \neq d.$$

Effectuons "à la main" :

- "a ôté de d" : ça ne va pas, car $a > d$
  je fais : "a ôté de $10+d$" et je retiens 1 : ça fait $10+d-a$
- "$b+1$ ôté de c" : ça ne va pas, car $b+1>c$
  je fais "$b+1$ ôté de $10+c$" et je retiens 1 : ça fait $9+c-b$
- "$c+1$ ôté de b" : supposons que ça va ; ça fait $b-c-1$
- "d ôté de a", ça fait $a-d$

Si le résultat s'écrit $ABCD$, on a donc les relations :

$$A = a-d \qquad D = 10+d-a$$
$$B = b-c-1 \qquad C = 9+c-b$$

On remarque qu'on a toujours $A+D=10$ et $B+C=8$.

Ce n'est pas toujours vrai, car on a supposé $b \geqslant c+1$ c'est-à-dire $b>c$. Que se passe-t-il si $b=c$?

Bon ! On effectue :

$$\begin{array}{r} a\,b\,b\,d \\ -\;d\,b\,b\,a \\ \hline A\,B\,C\,D \end{array}$$

- Ça commence comme tout à l'heure : $D = 10+d-a$ et je retiens 1.
- Puis : "$b+1$ ôté de b" : non !
  "$b+1$ ôté de $10+b$" : ça fait 9 et je retiens 1.
- Encore "$b+1$ ôté de b" : ça fait 9 et je retiens 1.
- Enfin "$d+1$ ôté de a" : ça fait $a-d-1$.

Donc $A = a-d-1 \qquad D = 10+d-a$
$B = 9 \qquad C = 9 \qquad$ Ici on a $A+D = 9$

En résumé :

Si le résultat de la soustraction $abcd-dcba$ est $ABCD$:
- $b \neq c$: $A+D = 10 \qquad B+C = 8$
- $b = c$: $A+D = 9 \qquad B=C = 9$

"On est bien avancé", me diront les uns, "A quoi ça sert" me crieront les autres ! Du calme, ça vient.

Si on veut prouver que tous les nombres arrivent à 6174 (sauf dix), il faut en essayer 9990. Si on remarque qu'il suffit d'essayer les nombres dont les chiffres sont ordonnés, il en reste quand même 705 (vérifiez-le si vous ne me croyez pas !).

Si on a compris qu'au bout d'un "tour", tous les 9990 nombres arrivent sur $ABCD$ avec $A+D=10$ et $B+C=8$ ou $A+D=9$ et $B=C=9$, il n'y a plus que ces derniers à essayer.

Combien y en a-t-il ?

Pas tant que ça : si on ne compte qu'une fois ceux qui ont les mêmes chiffres, à l'ordre près, on en trouve 30. Les voici écrits après avoir ordonné leurs chiffres :

9810	8820	8730	8640	8550	9990
9711	8721	7731	7641	7551	9981
9621	8622	7632	6642	6552	9972
9531	8532	7533	6543	5553	9963
9441	8442	7443	6444	5544	9954

Et essayer ces trente nombres, ça n'est pas la mer à boire, d'autant que le résultat d'un "tour" est un autre de ces nombres.

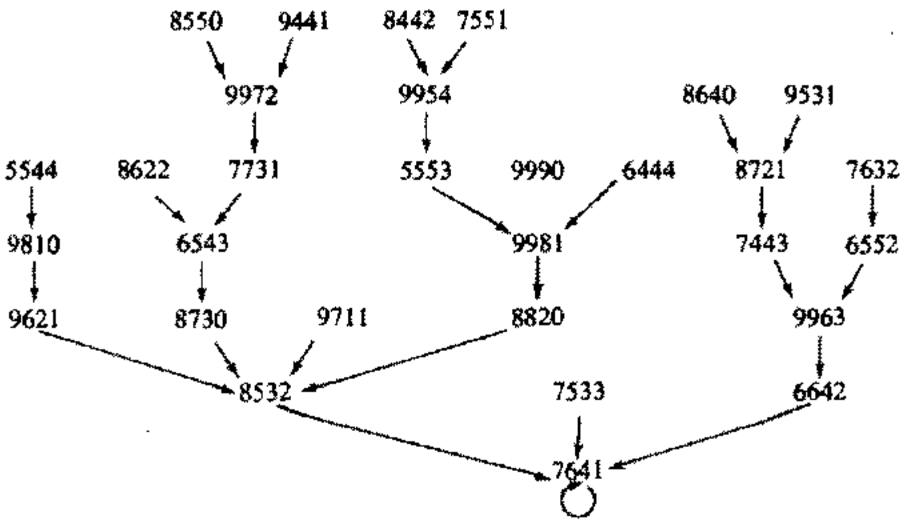
Si, en plus, vous avez une trentaine de spectateurs(!) de bonne volonté...

Une remarque pour les puristes : on peut également faire une démonstration abstraite en distinguant des cas selon les valeurs de A, B, C et D.

Il y a exactement trente cas à distinguer !

Ça vous étonne ?

Les calculs faits, on peut organiser les résultats en un arbre ; par exemple :



Chaque flèche représente un "tour", c'est-à-dire une soustraction et un "ordonnancement" du résultat de la soustraction.

On constate que tous les trente nombres "convergent" vers 7641, qui se régénère puisque 7641 − 1467 = 6174.

En outre, il y a au plus six "tours" pour arriver à partir de ces trente nombres, donc sept "tours" à partir d'un nombre quelconque (et huit si on veut) arriver à 6174 dans cet ordre, comme résultat de la soustraction).

L'étude de cet algorithme est un bon thème d'activité mathématique dans une classe : j'en ai fait l'expérience à différents niveaux (Seconde, Terminale et... à l'Université). Ça marche très fort, à condition bien sûr, de laisser le temps de s'émerveiller, de poser des questions, et de chercher.

Et pour ceux qui veulent être chef à la place du chef...

En fait, pour les extrémistes comme moi, l'arbre ci-dessus n'est pas complètement satisfaisant : il commence au deuxième "tour" et les nombres initiaux n'y figurent pas.

D'accord, ça en fait beaucoup ! (9990 ou 705 selon qu'ils sont ordonnés ou pas). Mais, au moins, on pourrait essayer de connaître le "poids" de chaque branche. Pour pouvoir répondre par exemple à la question : "combien de nombres arrivent à 7641 en un "tour" ? en deux "tours" ?...

Pour cela, on n'a guère le choix : il faudrait essayer tous les 705 nombres, ou au moins leur faire faire un "tour", et compter ceux qui arrivent sur 9810, sur 9711, etc..., sur 9954.

C'est un calcul bête et répétitif.
Idéal pour un ordinateur.
"Il n'y a qu'à" établir un programme et le faire tourner.

C'est un bon exercice de programmation, et on n'a pas besoin d'une grosse machine si on distingue :

les nombres qui s'écrivent	• $abcd$	avec $a>b>c>d$
	• $aabc$ • $abbc$ • $abcc$	avec $a>b>c$
	• $aabb$ • $aaab$ • $abbb$	avec $a>b$
	• $aaaa$	

et si on écrit un programme pour chacun de ces cas.

A titre d'exemple, voici ce qu'on peut faire pour les nombres $abcd$: il s'agit de compter combien de fois, après la première soustraction, on obtient chacun des 25 résultats possibles $ABCD$ avec $A+D=10$ et $B+C=8$.

On dimensionne donc un "tableau" à 25 cases : appelons-le $\{Z(I)\,;\,I,1,\ldots,25\}$. Il faut associer à chaque valeur de I un des 25 résultats possibles $ABCD$:
Si $E = \inf(A,D)$, E varie de 1 à 5.
Si $F = \inf(B,C)$, F varie de 0 à 4.

Et la connaissance de E et F détermine le résultat $ABCD$, qu'on ordonne : par exemple $E=2$ et $F=3 \Longrightarrow (A,D) = (2,8)$ ou $(8,2)$ et $(B,C) = (3,5)$ ou $(5,3)$ donc 8532.

Il suffit de poser $I = 5E+F-4$ pour établir une bijection entre les ensembles $\{(E,F)\,;\,(E=1,\ldots,5\,;\,F=0,\ldots,4\}$ et $\{I\,;\,I=1,2,\ldots,25\}$.

Enfin, sachant que

$$A = a-d,\ B = b-c-1,\ C = 9+c-b,\ D = 10+d-a,$$

on peut proposer le programme suivant en BASIC :

```
. DIM Z (25)
. FOR a = 3 TO 9
. FOR b = 2 TO a - 1
. FOR c = 1 TO b - 1
. FOR d = 0 TO c - 1
. E = inf (a - d, 10 + d - a)
. F = inf (b - c - 1, 9 + c - b)
. I = 5*E + F - 4
. Z(I) = Z(I) + 1
. NEXT d
. NEXT c
. NEXT b
. NEXT a
. END
```

Remarques :

• A la fin de l'exécution, on met un programme de lecture du tableau Z ou on le lit "à la main".

• La fonction $\inf(x,y)$ peut être obtenue par

$$\inf(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \times \operatorname{sgn}(y-x)$$

On obtient ainsi les "fréquences" d'apparition des 25 résultats possibles en partant des 210 nombres à quatre chiffres distincts et ordonnés.

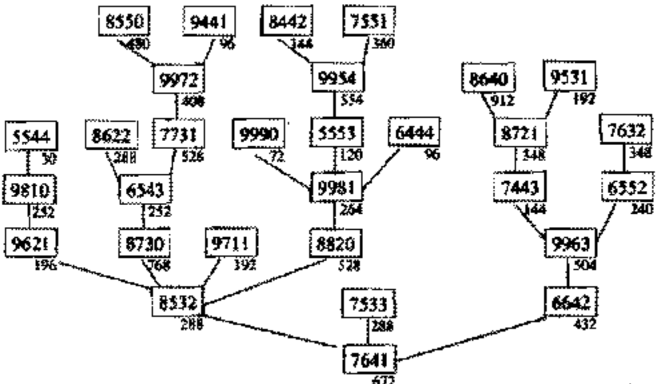
Sachant alors que chacun de ces 210 nombres représente 24 nombres (dont les chiffres ne sont pas ordonnés), les "fréquences" trouvées peuvent être multipliées par 24.

Pour chacun des types de résultats, on peut écrire un programme analogue (et même plus simple) et noter les fréquences.

Notons que le "poids" de chaque type est différent (le "poids" étant le nombre d'ordres possibles, une fois les chiffres fixés) : *abcd* "pèse" 24 ; *aabc*, *abc* et *abcc* "pèsent" chacun 12 ; *aabb*, *aaab* et *abbb* "pèsent" chacun 4 et enfin *aaaa* "pèse" 1.

On pourra remarquer au pasage que les types *abcc* et *aabc* conduisent au même tableau de fréquences : pourquoi ?

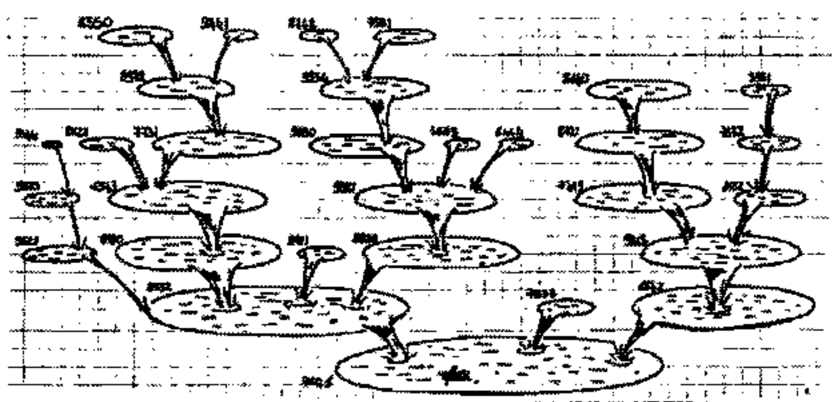
On peut alors redessiner l'arbre, en indiquant (en petit et en dessous) le "poids" de chaque résultat :



Totaux	Nombre de "tours"
1080	7
2064	6
1830	5
1152	4
2184	3
1008	2
672	1

(total : 9990)

Mais il est peut être plus intéressant de tenir compte de la "circulation" le long des branches de cet arbre : combien de nombres entre 0000 et 9999 passent par chacune des branches, dans son périple vers 7641 : il s'agit alors de fréquences "cumulées" ; on peut essayer par exemple, de représenter le phénomène par des lacs et des cascades :



Chaque lac a une surface (à peu près) proportionnelle à la "fréquence cumulée" correspondante : le lac 7641 correspond à 9990, le lac 5544 à 30, le lac 8532 à 5910 ; etc...

Par contre, je n'ai pas eu le courage de représenter les cascades en proportion !

Il ne reste plus qu'à compléter le paysage par les éléments de son choix (arbres, maisons....).

Enfin, pour terminer, si un lecteur a une meilleure idée de visualisation de ce phénomène, qu'il ne se gêne pas pour me la faire parvenir.