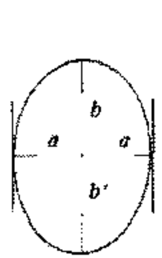
échanges

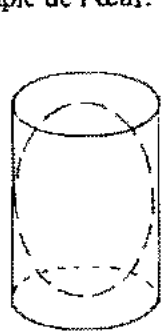
archimède et l'œuf de poule

par E. Ehrhart,
Strasbourg

L'Antiquité considérait Archimède comme le plus grand, sans conteste, des géomètres, et Leibniz déclara que son calcul infinitésimal continue les travaux du Syracusain. On cite toujours sa détermination de l'aire du segment de parabole ou du segment de sa spirale, mais on signale rarement qu'il a effectué également la quadrature de l'ellipse et la cubature de l'ellipsoïde de révolution.

La mathématisation du réel se fait toujours par un modèle plus ou moins simplifié et plus ou moins approché ; plus on gagne en simplicité, plus on perd en précision ; selon le but visé, tel ou tel modèle sera le plus approprié. Nous allons le voir par l'exemple de l'œuf.





$$V = \frac{2}{3} V'$$

$$S = \frac{11}{12} S'$$

Sur le tombeau d'Archimède, retrouvé par Cicéron à Syracuse, était gravée une sphère inscrite dans un cylindre, gravure devant rappeler à la postérité une découverte capitale du pionnier du calcul intégral : l'aire de la sphère est égale à l'aire latérale du cylindre ; en volume la sphère est les deux tiers de ce dernier. En volume l'ellipsoïde de révolution est également les deux tiers de son cylindre de révolution circonscrit, car l'affinité conserve les rapports des volumes.

1. Volume. Le profil de l'œuf étant caractérisé par sa largeur $2a$ et sa longueur $b+b'$, on peut pratiquement le confondre avec les moitiés accolées de deux ellipses d'axes $2a$, $2b$ et $2a$, $2b'$. L'œuf est donc, bien approché, la somme de deux demi-ellipsoïdes de révolution. Par suite, avec une bonne approximation, *il est en volume les deux tiers de son cylindre de révolution circonscrit.*

2. Aire. Peut-ont également donner une bonne valeur approchée de l'aire S de la surface de l'œuf ? Oui, mais c'est un peu moins simple. En le considérant encore comme accolement de deux demi-ellipsoïdes de révolution d'excentricités $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ et $e' = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b'^2}}$, une intégrale donne

$$S = \pi a \left[b\left(\frac{1}{e}\operatorname{Arcsin} e + \sqrt{1-e^2}\right) + b'\left(\frac{1}{e'}\operatorname{Arcsin} e' + \sqrt{1-e'^2}\right) \right]$$

ou encore

$$S = 2\pi a \left[b\left(1 - \frac{e^2}{6}\right) + b'\left(1 - \frac{e'^2}{6}\right) \right] = S' - \frac{\pi a}{3}(be^2 + b'e'^2) = \frac{5S'}{6} + \frac{\pi a^3}{3}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$$

en négligeant dans les parenthèses, provenant de développements en série relatifs à e ou à e', les termes à partir de $-\frac{e^4}{40}$ ou $-\frac{e'^4}{40}$, et en introduisant l'aire latérale S' du cylindre de révolution circonscrit à l'œuf.

L'aire de l'œuf est donc sensiblement

$$S = \frac{5S'}{6}\left(1 + \frac{a^2}{5bb'}\right)$$

ou, *moins précis mais plus maniable*

$$S \simeq \frac{11}{12} S'$$

car pour l'œuf de poule $\frac{a^2}{bb'}$ est voisin de $\frac{1}{2}$.

Il est remarquable que nos valeurs approchées du volume et de l'aire de l'œuf s'expriment uniquement par deux mesures, sa largeur A et sa longueur B :

$$V \simeq \frac{\pi}{6} A^2 B \qquad\qquad S \simeq \frac{11}{12} \pi A B.$$

3. Courbure aux sommets. Le modèle bi-ellipsoïdal de l'œuf donne comme valeurs approchées des *rayons de ses sphères ombilicales* :

$$r = \frac{a^2}{b} \qquad\qquad r' = \frac{a^2}{b'}.$$

4. Forme. Un autre modèle approche encore mieux la forme de l'œuf. A l'épaisseur de sa coque près, *sa surface est un "hyperellipsoïde trifocal"*, ensemble des points dont la somme des distances à trois points alignés est constante. Si ce modèle se prête mal à un calcul d'aire ou de volume, il donne par contre une très simple construction par fil du profil de l'œuf. [1] [2]

5. Généralisation. *Pour les œufs d'autres oiseaux tous les résultats précédents restent valables*, à deux exceptions, plutôt rares, près : l'œuf sphériforme ou piriforme (voir les nombreuses images dans [2], page 61).

Pour le premier $S = S'$ doit remplacer $S = \frac{11}{12}S'$. Par contre les formules

$$V = \frac{2}{3}V', \qquad S = \frac{5S}{6}\left(1 + \frac{a^2}{5bb'}\right), \qquad r = \frac{a^2}{b}$$

sont particulièrement précises, puisqu'elles sont rigoureuses pour la sphère.

Pour le second nos valeurs approchées de V, S et r sont trop grandes.

Mais même ces œufs exceptionnels sont, bien approchés, des hyperellipsoïdes trifocaux.

[1] E. EHRHART, *L'œuf géométrique*, Bulletin 336 de l'A.P.M.E.P. (déc. 1982).

[2] Michel de PRACONTAL, "$Y = \pm\left[b\ \ \frac{1}{4} - (X^p - \frac{1}{2})^2\right]^{1/2}$. *Qu'est-ce que c'est ?*". Science et vie n° 787 (avril 1983).