informatique

l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement

Tel est le titre du document publié ci-après et présenté par M. J-P. KAHANE à la Commission Informatique, lors de sa réunion du 17 mars 1984.

Il s'agit du premier document rédigé en vue du Colloque de travail organisé sur ce thème par la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques (CIEM) à Strasbourg en avril 85. Le Comité de Programme du colloque lance ainsi un certain nombre de questions, attendant des réponses ou d'autres questions.

La plupart des questions ainsi posées sont implicites pour le travail de notre Commission Informatique. Ce rapport a le mérite de les formuler, et les réponses à certaines seraient utiles pour fixer les positions que l'Association est amenée à prendre en ce qui concerne, par exemple, la formation des Maîtres, les programmes, les relations entre élèves, professeurs et micros, les didacticiels...

En souhaitant la publication de ce texte, la Commission Informatique fait appel à chacun d'entre vous : proposez des éléments de réponse en fonction de vos connaissances propres, de votre expérience personnelle, de vos centres d'intérêt ; vous apporterez une aide précieuse à la réflexion commune, qui ne doit pas se limiter à celle des seuls membres de ladite Commission, ni d'ailleurs aux seuls enseignements universitaire et pré-universitaire comme le suggère le document ; les mathématiques et les ordinateurs existent aussi dans des écoles et des collèges.

Merci d'envoyer toute contribution à Marie-Hélène PEYRACHE, 3 rue de Gâtine — 94240 L'Hay-les-Roses, une synthèse devrait être transmise à la CIEM pour Noël 84.

La CIEM (Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques, alias ICMI, International Commission on Mathematical Instruction) a mis à l'étude quatre sujets, sur lesquels elle se propose de faire le point et de dégager des perspectives pour la réflexion et l'action. Il s'agit de :

1) L'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement au niveau pré-universitaire et universitaire.

2) Les mathématiques et la recherche cognitive.

3) Les mathématiques scolaires en 1990.

4) Les mathématiques comme discipline de service.

Sur chaque sujet, l'étude consiste à établir des documents préparatoires, organiser une discussion internationale (via les sous-commissions nationales de la CIEM quand c'est possible), réunir un colloque de travail, produire un texte de référence. Un comité de programme international, désigné par le conseil exécutif de la CIEM, mène les opérations.

La chose n'est amorcée, pour le moment, que sur le premier sujet. La réalisation des études dépend en grande partie du soutien moral et financier de l'Union Mathématique Internationale, de l'UNESCO, et de mécènes que nous souhaiterions nombreux et divers.

Le texte joint est la version française du premier document pour la première étude. L'influence de l'informatique sur l'enseignement mathématique au niveau scolaire (avant 16 ans) sera examinée dans la troisième étude, dont le démarrage est en cours. Les remarques et critiques peuvent être adressées à l'un quelconque des rédacteurs, ou à l'une des adresses figurant au bas de cette page(*).

Saint-Martin-d'Hères, mars 1984

J.P. KAHANE, B. CORNU, F. PLUVINAGE

— Des exemplaires supplémentaires de ce texte peuvent être obtenus auprès de Bernard CORNU (Institut Fourier - Grenoble).

— La version en langue anglaise sera disponible prochainement.

(*) Bernard CORNU, Institut Fourier - B.P. 74 - 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex (Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS) Tél. (76) 51.46.56)

Jean MARTINET, Président de la Sous-commission française de la CIEM, Université Louis Pasteur - Dpt de maths, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement

premier rapport C.I.E.M. (Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques)

R.F. Churchhouse, B. Cornu, A.P. Ershov, A.G. Howson, J.P. Kahane, F. Pluvinage, A. Ralston, J.H. Van Lint, M. Yamaguti

Les ordinateurs et l'informatique sont en train de bouleverser toutes les sociétés de notre époque. Comme la machine à vapeur a introduit la première révolution industrielle, l'ordinateur introduit ce qu'on appelle souvent la seconde révolution industrielle. Les perspectives sont immenses : suppression de travaux répétitifs ou pénibles, nouveaux besoins, nouveaux métiers, nouvelles qualifications.

Le développement des sciences physiques a accompagné la première révolution industrielle. On doit s'attendre à ce que des sciences nouvelles, liées à l'informatique, accompagnent la seconde. La communication, l'informatique, l'organisation vont poser une série de problèmes qui peuvent avoir un rôle moteur dans le développement scientifique, autant que les problèmes dont l'origine est le monde physique.

D'un autre côté, l'ordinateur permet de traiter les énormes calculs nécessités par la théorie et les expériences à mener dans presque toutes les grandes disciplines scientifiques, de la physique des hautes énergies à la biologie moléculaire.

Les mathématiques n'échappent pas à ce mouvement. Elles sont la plus ancienne des sciences, et celle dont les valeurs apparaissent les plus permanentes. Elles sont la science la plus répandue ; des millions d'hommes participent à son enseignement, et cela dans tous les pays du monde. Elles jouent un rôle de base et de référence à la fois pour les autres sciences — y compris l'informatique — et pour les hommes dans leur activité quotidienne. En même temps elles évoluent, en fonction de leur dynamique interne pour une part, en fonction de facteurs externes d'autre part. Parmi ces facteurs externes, les ordinateurs et leurs usages jouent aujourd'hui un rôle majeur.

C'est pourquoi la CIEM a pris l'initiative d'organiser une réflexion internationale sur le thème : influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement. Comme première étape, elle soumet à la discussion le présent rapport, organisé autour de trois grandes questions :

1. De quelle façon les ordinateurs et l'informatique influent-ils sur les notions mathématiques, les valeurs, la progression de la science mathématique ?

2. De quelle façon de nouveaux cursus d'études peuvent-ils répondre aux besoins et aux possibilités ?

3. De quelle façon l'usage des ordinateurs peut-il aider l'enseignement mathématique ?

Pour les questions 2 et 3, on se limite aux programmes et à l'enseignement universitaire et préuniversitaire (à partir de l'âge de 16 ans). Les mathématiques scolaires feront l'objet d'une autre étude internationale de la CIEM. On trouvera naturellement les mêmes sujets apparaître à trois niveaux, en réponse aux questions posées. Deux aspects sont essentiels : l'influence de la technologie, qui permet de faire mieux, plus vite, et autrement, et l'influence des concepts fondamentaux de l'informatique, au premier rang desquels se trouve l'algorithmique.

1. L'effet sur les mathématiques

Les concepts mathématiques ont toujours dépendu des moyens de calcul et des moyens d'écriture. La numération décimale de position, l'écriture symbolique, les tables de valeurs numériques ont précédé les notions modernes de nombre réel ou de fonction. On a calculé des intégrales, puis écrit le signe d'intégration, avant de dégager les concepts d'intégrale de Riemann ou de Lebesgue. On peut s'attendre à ce que les nouveaux moyens de calcul et d'écriture qu'offrent les ordinateurs et l'informatique permettent l'émergence de nouveaux concepts mathématiques. Mais déjà aujourd'hui, ils mettent en valeur des notions et des méthodes, anciennes ou nouvelles, qui n'avaient pas leur place dans les mathématiques classiques. Et sur les notions les plus classiques, ils permettent un regard neuf.

Prenons la notion de nombre réel. C'est un point sur la droite **R**, et cette représentation est efficace pour comprendre l'addition et la multiplication. C'est aussi un point d'accumulation de fractions, par exemple des fractions continues qui donnent la meilleure approximation d'un réel par des rationnels. C'est aussi un développement décimal illimité. C'est aussi un nombre écrit en virgule flottante. L'expérience que peut donner la simple calculette de poche peut valoriser les trois derniers aspects. L'algorithme des fractions continues — qui n'est autre que celui d'Euclide — va redevenir classique. Des opérations compliquées (exponentiation, sommation, séries, itération de fonctions) deviendront simples. Des opérations simples (addition) produiront des problèmes nouveaux : sommer dans un ordre ou dans un autre (à partir des grandes ou à partir des petites valeurs) ne donne pas le même résultat numérique.

Prenons la notion de fonction. L'enseignement connaît d'une part les fonctions usuelles et les fonctions spéciales — c'est-à-dire les fonctions tabulées du 17e au 19e siècle —, d'autre part la notion générale de fonction introduite par Dirichlet en 1830. Encore aujourd'hui, classiquement, résoudre une équation différentielle consiste à la ramener à des intégrations, et si possible à des fonctions usuelles. Cependant, ce qui est en jeu dans les équations fonctionnelles, c'est le calcul effectif et l'étude qualitative des solutions. Les fonctions auxquelles on s'intéresse sont donc les fonctions calculables, et non plus seulement les fonctions tabulées. Les théories de l'approximation et de la superposition des fonctions — bien antérieures aux ordinateurs — se trouvent valorisées. Le champ des fonctions usuelles s'étend, et des fonctions réputées inusuelles s'introduisent naturellement dans la discrétisation de problèmes non linéaires.

Prenons les ensembles de points, liés aux systèmes dynamiques, à l'itération des transformations, ou aux processus stochastiques. L'usage des ordinateurs a ravivé leur étude, aussi bien chez les physiciens que chez les mathématiciens, et suscité une nouvelle terminologie : attracteurs étranges, fractals.

Sur ces exemples, il apparaît que les ordinateurs et l'informatique ont suscité de nouvelles recherches, remis à l'ordre du jour des questions étudiées il y a longtemps, rendu possible l'étude de questions nouvelles. Sur chacun de ces aspects, nous souhaitons que la discussion fasse apparaître de nouveaux éléments.

Les mathématiques ont toujours eu un aspect expérimental. Euler a insisté sur le rôle de l'observation dans les mathématiques pures : "les propriétés que nous connaissons des nombres ont été généralement découvertes par l'observation, et découvertes bien avant que leur validité ait été confirmée par la démonstration... C'est par l'observation que nous découvrons sans cesse des propriétés nouvelles, qu'ensuite nous nous efforcerons de prouver". Les ordinateurs multiplient brusquement nos possibilités d'observation et d'expérimentation en mathématiques. Dans l'équation des ondes non linéaire, la solution-soliton a été découverte par expérimentation numérique avant de devenir un objet mathématique, et de donner lieu à une théorie rigoureuse. Dans l'itération des transformations rationnelles, ce sont des dessins obtenus par ordinateur qui ont guidé les recherches récentes. Il y a tout un nouvel art de l'expérimentation qui se développe, dans toutes les branches des mathématiques. Des calculs autrefois impraticables deviennent aisés ; il s'agit de bien les mener. Des visualisations sont possibles, et elles constituent un facteur d'unité entre mathématiciens, en leur offrant des sujets d'études que différents spécialistes peuvent mener en commun. On peut dire que le nombre et la variété des stimulus auxquels on est en mesure de soumettre les êtres mathématiques pour apprécier leurs réactions ont considérablement augmenté. La conscience de ces possibilités nouvelles a pénétré l'ensemble de la recherche mathématique depuis quelques années. Mais elle n'a pas encore pénétré dans l'enseignement. C'est pourtant ce caractère expérimental, pratiquable maintenant à grande échelle, qui est sans doute le plus prometteur pour le renouveau de l'enseignement des mathématiques.

L'informatique oblige à un nouveau regard sur la notion de variable, et sur le lien entre symbole et valeur. Ce lien est fortement exploité en mathématiques (par exemple dans le symbolisme du calcul différentiel). En informatique, la nécessité de réaliser, de matérialiser les valeurs, pose ce problème d'une nouvelle façon. Le symbolisme des fonctions n'est pas entièrement transposable. Cela conduit à des langages de types différents : langages fonctionnels, ou langages impératifs, basés sur le concept de l'état des variables.

Les mathématiques sont aussi, et restent, une science de la preuve. Mais le statut de la preuve n'est pas immuable. Le niveau de rigueur et de formalisation dépend des époques et des domaines ; de même la "beauté" de la preuve. Il y a une vingtaine d'années, la mode était aux preuves non constructives pour les théorèmes d'existence : méthode des idéaux pour les p.g.c.d., principe des tiroirs pour l'approximation rationnelle, axiome du choix en analyse fonctionnelle, méthodes probabilistes sans constructions explicites, etc. Aujourd'hui le point de vue a changé. Chaque fois que c'est possible, on utilisera dans la preuve un algorithme, permettant d'obtenir effectivement l'objet cherché.

Les ordinateurs ont un autre effet sur le statut de la preuve, que la fameuse démonstration du théorème des quatre couleurs a mis en évidence. Jusqu'ici, les preuves les plus énormes étaient complètement rédigées, et l'appel aux informations extérieures (tables, références) était parfaitement contrôlé. En principe, un mathématicien solitaire était censé pouvoir suivre et vérifier la totalité d'une preuve grâce à la rédaction.

On voit apparaître des nouveaux types de démonstration : preuves numériques, où interviennent de grands nombres, de grandes quantités, non manipulables à la main, et preuves algorithmiques, basées sur l'effectivité d'algorithmes. Avec la preuve assistée par ordinateur, une pratique nouvelle s'introduit. Elle ne semble pas encore codifiée. Elle le sera sans doute dans l'avenir.

Les algorithmes ont joué un rôle important, depuis Euclide, et plus encore depuis la naissance de l'algèbre. C'est le concept mathématique le plus important pour l'informatique.

Nous avons rappelé le rôle des algorithmes comme outils dans la preuve. Ils peuvent être des outils essentiels de calcul. Le simple exemple du produit de deux matrices $n \times n$ vaut d'être cité : l'algorithme de Strassen (1968) réduit de 8 à 7 les produits numériques à effectuer pour deux matrices 2×2 ; généralisé aux matrices $n \times n$, il permet de réduire le nombre de produits numériques à $n^{2,49}$ au lieu de n^3, ce qui est de grande importance pratique pour les grandes valeurs de n.

Enfin, les algorithmes constituent un sujet d'études par eux-mêmes, nécessitant un apport mathématique important : des théories et des raisonnements mathématiques interviennent pour étudier la complexité, l'effectivité des algorithmes, pour établir des preuves d'algorithmes, et également pour élaborer des algorithmes. Citons, par exemple, le rôle des invariants et des points fixes dans la preuve d'algorithmes.

Il faut souligner que, de plus en plus, les algorithmes sont appelés à jouer un rôle central dans la société : ils interviennent dans la vie des entreprises, dans les technologies, dans l'automation ; des problèmes mathématiques ont ainsi une portée pratique considérable.

Les systèmes symboliques permettent désormais des calculs littéraux difficiles, et il faut prendre la mesure de leurs performances actuelles, et de leur rôle dans la recherche mathématique, comme de leur influence possible dans l'enseignement supérieur. L'informatique élargit le champ des recherches mathématiques sur le calcul formel.

2. L'effet sur les programmes

Les programmes résultent généralement d'une longue tradition, et ils évoluent en fonction de deux facteurs principaux : les besoins de la société et l'état de la discipline. Les besoins de la société sont très divers : dans chaque pays, les études préparent à différentes professions, qui ont chacune leurs exigences ; entre les différents pays, les priorités nationales peuvent être différentes. A priori, les besoins sociaux introduisent donc dans les programmes un élément de diversité et même de dispersion. La référence à la discipline est généralement un facteur d'unité, lorsque les spécialistes s'entendent sur ce qui est essentiel. Et cette unité répond aussi à un besoin social, qui est d'avoir en commun des connaissances et un langage.

Nous avons donc à envisager deux grandes séries de questions : les premières relatives aux besoins sociaux exprimés, aux expériences locales, aux politiques nationales ; les secondes relatives aux possibilités nouvelles, aux inflexions d'ensemble à préparer, aux choix inspirés par l'état présent de la science et de la technique.

Voici trois questions inspirées par le contexte social (le cadre national, l'enseignement scientifique, l'environnement industriel).

Question 1.

Dans chaque pays, y a-t-il de nouveaux programmes de mathématiques — définitifs, provisoires, expérimentaux — motivés par l'introduction des ordinateurs et de l'informatique ? Les réponses partielles que nous avons font état de programmes expérimentaux.

Question 2.

Les mathématiques servant à bien d'autres disciplines — physiciens, ingénieurs, biologistes, économistes, etc... — quels sont les changements suggérés par l'importance croissante des ordinateurs et de l'informatique dans ces disciplines ? Les réponses partielles que nous avons viennent des informaticiens eux-mêmes.

Question 3.

Quelles sont les mathématiques nécessaires à la culture scientifique de base — au niveau universitaire — dans le nouvel environnement industriel ? Les réponses partielles que nous avons — venant d'informaticiens — font état d'une demande théorique forte ; l'usage des ordinateurs et de l'informatique exigerait plus de mathématiques, et mieux comprises, et conduirait à un nouvel équilibre entre les mathématiques "pures" et les mathématiques "appliquées".

Arrêtons-nous à ce point avant de poser une nouvelle série de questions.

L'informatique aura, sans doute, trois effets majeurs sur l'orientation des enseignements. D'abord, les systèmes mathématiques symboliques vont rendre simples et rapides des questions autrefois ardues et compliquées. Aujourd'hui déjà, il existe des programmes pour calculer des intégrales définies, résoudre des équations différentielles, voire calculer des solutions explicites de certaines équations fonctionnelles. Donc, l'enseignement des mathématiques peut insister moins qu'autrefois sur la mise en œuvre des moyens classiques d'intégration. Par contre, l'enseignement doit permettre à l'étudiant de faire face à des problèmes plus nombreux en faisant appel aux systèmes disponibles, et pour cela de comprendre les mathématiques sous-jacentes. Plus il y aura de programmes disponibles, et mieux il faudra connaître la théorie mathématique pour s'orienter.

Ensuite, l'informatique fait appel à des mathématiques discrètes : combinatoire, graphes, codage. Les applications de l'informatique à la gestion, à la communication, à l'information, font peu usage du calcul différentiel et intégral, mais elles mettent en œuvre des structures variées sur des ensembles finis. Il convient d'examiner si les mathématiques discrètes peuvent être substituées à certaines parties classiques de l'analyse dans la formation de base des étudiants, et si certains concepts fondamentaux de l'analyse peuvent être abordés à partir de l'étude de situations discrètes. La place des séries, par exemple, dans les cours d'analyse, peut s'en trouver modifiée.

Enfin, l'effet général sur les mathématiques a des conséquences nécessaires dans leur enseignement, dans l'importance donnée aux sujets et aux méthodes, dans l'ordre choisi pour l'exposition des matières.

Dans tous les domaines, on peut songer aux expériences numériques et visuelles destinées à fonder l'intuition. On peut favoriser une présentation algorithmique des théories et des preuves.

Ces réflexions conduisent à poser une deuxième série de questions :

Question 4.

Quelles sont les mathématiques sous-jacentes aux systèmes mathématiques symboliques ? Comment doivent-elles être introduites dans les programmes ?

Question 5.

Quelles sont les mathématiques discrètes à introduire ?

Question 6.

Quels sont les changements envisageables dans l'ordre des matières enseignées (séries avant intégrales, statistiques avant probabilités, probabilités avant intégration,...) ?

Question 7.

En particulier, quels sont les éléments de logique, d'analyse numérique, de statistiques, de probabilités, de géométrie, qui peuvent être introduits dès le début des cursus universitaires ?

Question 8.

Quels sont les changements envisageables dans la présentation des sujets, particulièrement sous l'influence des algorithmes disponibles (méthode de Newton pour la résolution des équations, fractions continues pour les nombres réels, polynomes d'interpolation pour le calcul approché des intégrales, triangulation en algèbre linéaire, etc.) ?

Question 9.

(La plus importante). Quelles sont les suppressions possibles dans les enseignements de base (17-18 ans) ?

Les changements que l'informatique et les ordinateurs apportent aux programmes vont évidemment avoir des conséquences sur la formation dont les enseignants auront besoin. Outre les éléments d'informatique qui leur seront nécessaires, il faudra les préparer à enseigner les mathématiques d'une manière nouvelle. Ce problème va se poser aussi bien au niveau de la formation continue, qu'à celui de la formation initiale des enseignants. Nous posons donc la question suivante :

Question 10.

Quels sont les éléments d'informatique à introduire dans la formation des enseignants, et comment peut-on les préparer à enseigner les mathématiques dans le nouveau contexte dû à l'informatique ? Des expériences partielles existent déjà sur ce thème.

3. L'aide à l'enseignement des mathématiques.

3.1. Quelques causes générales de changement dues aux ordinateurs

L'emploi des ordinateurs oblige à ne plus seulement voir dans le domaine expérimental une source d'idées mathématiques et un terrain pour les illustrations des résultats, mais un lieu de confrontation permanente théorie-pratique. Mais ceci pose le problème, dans la formation des professeurs comme des étudiants, de promouvoir l'attitude expérimentale (observation, essais, contrôle de variables, mises à l'épreuve) au même titre que l'attitude mathématique (conjecture, preuve, vérification). Cela suffit-il pour parler, comme certains, de "mathématiques expérimentales" ?

L'outil fait apparaître un triangle étudiant-professeur-ordinateur là où il n'y avait jusqu'à présent qu'une relation duale. N'y a-t-il pas un risque de réduction du travail proposé aux étudiants sur l'ordinateur à des activités simplistes, "sans risques" (pour les professeurs), de façon à ne pas trop modifier la traditionnelle relation étudiant-professeur ?

Les étudiants ne peuvent manquer d'être informés (dans leur milieu ou par les médias) de la généralité d'emploi des ordinateurs ainsi que des périphériques associés, voire des systèmes d'interconnexion avec des banques de données. Ils ont aussi vu des sorties graphiques spectaculaires sur écran, imprimante ou traceurs de courbes. Il en résulte que les étudiants ont de nouvelles attentes par rapport à l'enseignement en général et des mathématiques en particulier. Comment faire utiliser l'ordinateur par les étudiants pour répondre à ces attentes nouvelles ?

Outre les changements d'intérêt auxquels conduit l'informatique, il convient d'attirer l'attention sur les changements de difficulté des exercices et des problèmes. Non seulement l'usage de l'ordinateur change l'ordre de difficulté des exercices, mais il change les difficultés relatives des diverses façons de résoudre un même exercice. Comment prévoir ces nouvelles hiérarchies et en tenir compte dans les propositions d'exercices ?

3.2. Objectifs et conditions de travail

L'ordinateur peut être utilisé comme un "tableau noir" par le professeur. De la même façon, on procède dans les sciences expérimentales à des démonstrations de cours. Dans le cas de l'ordinateur, une interaction beaucoup plus forte avec l'auditoire est possible, par le choix des entrées-machine. Ce type d'utilisation a été expérimenté à différnts endroits, mais ne pourra se répandre que moyennant l'élaboration de logiciels nombreux et variés. Quel doit être le "cahier des charges" pour de tels logiciels ?

L'ordinateur peut être utilisé par les étudiants, individuellement ou en groupes de deux ou plusieurs, soit pour effectuer des travaux entièrement prédéterminés (il s'agit de l'enseignement programmé, adapté au travail sur ordinateur ; malheureusement, il ne semble guère y avoir de logiciels de ce type d'un grand intérêt en mathématique).

L'ordinateur peut être aussi l'objet d'une utilisation pour des "travaux pratiques" : manipulation expérimentale d'objets mathématiques, et donner lieu à des programmes de travail ouvert (exemples : traitements statistiques des données d'une étude, explorations géométriques, manipulation de fonctions,...).

On voit se développer également les "logiciels-ressource", pour le soutien et l'approfondissement. Ces logiciels, appelés à être disponibles dans des "centres multimédias" au sein des établissements, constituent un moyen de communication, au même titre que le document écrit, le film, etc. Ils peuvent fournir à l'étudiant un moyen d'auto-évaluation permanente.

L'élaboration des logiciels demande de réunir les compétences de mathématiciens, d'informaticiens et de praticiens de l'enseignement. Comment répartir le travail et au sein de quelles structures, pour espérer produire des logiciels satisfaisants ?

Enfin, une autre utilisation de l'ordinateur scolaire ou universitaire est l'utilisation en formule club. Après une période initiale de familiarisation, c'est des utilisateurs que viennent principalement les demandes précises de traitement. Cette forme de travail s'adresse non seulement aux élèves, mais aussi à leurs professeurs. Quels besoins en formation de formateurs détermine-t-elle ?

3.3. Traitements

Les périphériques utilisés (écran, imprimante, table traçante,...) déterminent différentes façons d'utiliser l'informatique. L'adaptation aux mathématiques pose des problèmes généraux, comme celui de la manipulation de l'écriture symbolique qui, comme chacun sait, n'est pas linéaire au contraire de la suite des caractères d'un texte courant.

Nous pouvons considérer la question des traitements à partir des besoins qui s'expriment dans divers secteurs des mathématqiues faisant l'objet d'un enseignement au niveau qui nous intéresse.

A travers ces secteurs, on notera le rôle central de la visualisation, de l'expérimentation, de la simulation, et de l'aide à l'élaboration de conjectures.

Tout d'abord, un certain nombre de concepts fondamentaux sont utilisés dans l'enseignement des mathématiques, souvent de façon implicite : logique intuitive, concept de variable, de fonction, etc. Quelle précision l'informatique peut-elle apporter par rapport à ces concepts ?

Statistiques et probabilités, traitement de données.

L'ordinateur rend possibles les traitements en vraie grandeur. Des problèmes de découpages de données en classes ne sont plus pertinents. Par ailleurs, la simulation est un outil qui tient, en probabilités, la place que tient le tracé de figures en géométrie. Ainsi, il est possible, grâce à des tirages pseudo-aléatoires, de se mettre réellement dans tous les types de situations de paris, décisions, tests, pensables.

Géométrie

La production d'images (exemples : vues en perspective d'objets de l'espace, orbites) et la conception assistée par ordinateur (logiciels de tracés) sont extrêmement propices aux développement des intuitions. Ils rendent possible l'exploration d'objets et de figures géométriques, et ils donnent accès à de nouvelles figures.

Quels changements le tracé par utilisation d'ordinateurs introduit-il par rapport à la géométrie issue de la règle et du compas ?

Algèbre linéaire.

L'approche algorithmique fournit des outils de démonstration mathématiques (par exemple le pivot de Gauss), et conduit à poser de façon différente l'étude de questions comme l'inversibilité, la résolution de systèmes, la décomposition des matrices. En outre, la visualisation peut donner un support à l'intuition, par exemple pour l'étude des valeurs propres et de diagonalisation. Des méthodes comme celle du simplexe ne méritent-elles pas une place dans l'enseignement ?

Analyse

Sous l'effet des systèmes symboliques, les exercices du type dérivation, recherche de primitives, développements limités, sont destinés à diminuer. En contrepartie, la représentation graphique des fonctions, les résolutions approchées d'équations numériques ou fonctionnelles, présentent des objets privilégiés de réflexion. L'expérimentation peut être l'occasion de découvrir et de formuler des propriétés qualitatives, avant de les démontrer (allure d'une famille de courbes). Avec l'approximation se posent les problèmes de convergence, à commencer par les suites et les séries. Outre l'aspect qualitatif de la notion de convergence, l'étude numérique conduit naturellement à l'aspect quantitatif : rapidité de convergence. Enfin, la discrétisation fournit un champ d'expérimentation, par exemple pour les équations fonctionnelles.

Nombres, analyse numérique

Les nombres d'une machine sont très différents des nombres du mathématicien, même quand ils ont le même aspect. Ceci conduit à explorer les différences et, en passant, à se préoccuper de principes d'écriture des nombres. Par ailleurs, doit-on attendre des répercussions, au niveau de l'enseignement, du calcul parallèle utilisé pour la recherche en analyse numérique ?

Ensembles, combinatoire, logique

Les traitements obligent à donner des définitions opératoires (le dénombrement des surjections $S(n,p)$ est un exemple simple de récursivité, à condition de définir "opératoirement" une surjection). Dans ce secteur, la production rapide de nombreux résultats est un moyen d'exploration pour imaginer des conjectures. L'apprentissage de formules présente-t-il alors un intérêt aujourd'hui dans ce domaine ?

A ces domaines traditionnels objets d'une attention nouvelle s'ajoutent les études résultant directement des particularités des traitements sur machine : ceux-ci sont discrets. Il importe donc de se soucier des débouchés théoriques d'un matériel discret (équations aux différences) ; d'ores et déjà, des cours complets de mathématiques discrètes sont proposés aux étudiants. S'agit-il effectivement d'un nouveau thème d'enseignement ?

3.4. Contrôles

Pour le professeur, le contrôle de l'apprentissage des étudiants est souvent entendu au sens restrictif d'évaluation, alors que le contrôle de l'enseignement est généralement méconnu. La pratique du soutien individuel est un contrôle de ce type rendu possible par le recours à l'ordinateur, tant pour les propositions d'exercices que pour la gestion des fichiers individuels. En évaluation, le choix de sujets d'examens ou concours par ordinateur et la passation sur ordinateur n'ont guère été expérimentés jusqu'à maintenant ailleurs que dans les secteurs d'enseignement de l'informatique elle-même. Faut-il prévoir la généralisation d'examens "sur ordinateur" et, si oui, comment élaborer les épreuves ?

Mais le terme de contrôle désigne aussi le contrôle expérimental. La confrontation de sorties-machine avec des résultats mathématiques prend tout son intérêt avec la pratique d'un tel contrôle. Au terme de ce rapport, il était temps de mentionner l'utilité de ce qui n'est pas conforme aux prévisions, ce qui ne fonctionne pas parfaitement bien. Il est sans doute sain de rappeler que le cas général pour un programme est de ne pas fonctionner du premier coup. Quel est l'intérêt des erreurs dans un travail sur ordinateur ?

3.5. La formation des professeurs

Nous avons évoqué plus haut le problème du contenu de la formation des enseignants. Il convient de se poser également celui de la forme de cette formation, en particulier pour la formation continue des actuels professeurs. Quel est l'effort de formation à prévoir en formation "légère" ? En formation "lourde" (au moins un an de décharge complète d'enseignement) ? Mais ceci ne peut suffire dans une perspective d'évolution des matériels et des logiciels. Dans cette perspective l'ouverture de centres d'appuis prévus pour le suivi scientifique des opérations, la mise à jour des logiciels et l'expérimentation pédagogique semble nécessaire au niveau local. Il serait en effet regrettable que l'informatique ait pour conséquence que seules des structures lourdes, éloignées de beaucoup d'enseignants, soient en mesure de prendre les décisions d'enseignement. Quels réseaux (locaux, régionaux, nationaux, internationaux) convient-il d'implanter, et quelles connexions faut-il prévoir entre eux ?