Bulletin de l'APMEP n°345 - 1984

# récit d'un échec

**par Bernard Parzysz**
**IREM de Paris-VII**

*La date : le samedi 17 mars 1984 à 8 heures.*

*Le lieu : la classe de Première S2 du Lycée Michelet, à Vanves.*

*Les personnages : les 26 élèves de cette classe ; trois membres du groupe "Géométrie dans le Second cycle" de l'IREM de Paris-VII dont moi-même, professeur de mathématiques de la classe.*

*La genèse : au sein du groupe IREM susdit s'effectue, depuis le début de l'année scolaire, une "observation" du cours de Géométrie dans la classe susdite. Les grandes lignes du cours sont préparées en commun, et deux membres du groupe viennent assister au cours le samedi matin.*

... Or, ce samedi-là, les observateurs — bien qu'attendus — ne vinrent pas. Dans une circonstance analogue — car il s'agissait de récidivistes — j'avais décidé (qu'est-ce qu'une observation sans observateurs ?) de ne pas faire de Géométrie. Cette fois encore, je pris la même décision. Nous aurions dû, en Géométrie plane, parler de l'affinité, et commencer si possible l'étude de la composition des transformations. Mais tant pis : puisqu'en Analyse nous en étions à l'étude des fonctions trigonométriques, je commençai par proposer d'étudier la fonction

$$f : x \longmapsto cos^2 x \; .$$

(Que l'on me croie ou non, je puis assurer que je n'avais, à ce moment, aucune idée de ce qui allait suivre. En fait, j'espérais toujours la venue de mes collègues).

**1.** D'abord, donc, étude traditionnelle : parité, périodicité, intervalle d'étude, signe de la dérivée, représentation graphique.

C'est alors qu'un élève fait remarquer : "On dirait une cosinusoïde". "Tiens, c'est vrai !" fais-je, tout joyeux (car en fait il vient de me fournir L'IDÉE). "Essayons de voir si on peut le montrer".

Quelqu'un propose de remplacer $cos^2 x$ par $(cos 2x + 1)/2$, expression obtenue à partir de la formule $cos 2x = 2cos^2 x - 1$. Nous écrivons donc : $f(x) = \frac{1}{2} cos 2x + \frac{1}{2}$ .

**2.** Nous posons $g(x) = cos 2x$ et appelons $C_1$ la courbe représentative de $g$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Je pose la question : comment peut-on obtenir $C_1$ à partir de la courbe représentative $C$ de la fonction cosinus ? On fait le petit dessin suivant :

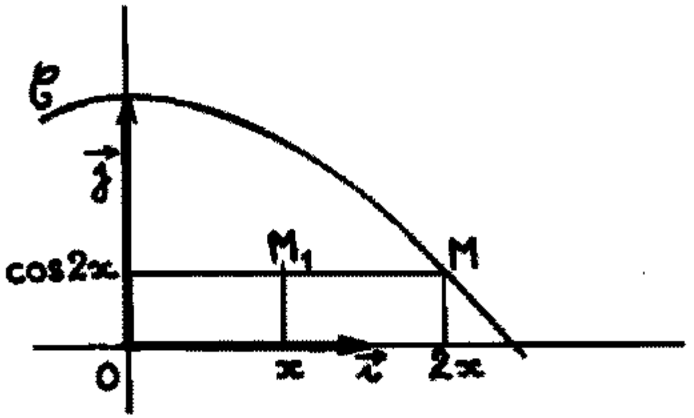


Figure 1

M est un point de C , $M_1$ est un point de $C_1$ .

Un élève remarque (au cours précédent, nous n'avions fait que donner la définition) que l'on passe de M à $M_1$ par une *affinité*. Il faut faire préciser :

— l'axe : axe des ordonnées
— la direction : celle de l'axe des abscisses
— le rapport : 1/2.

Ceci nous permet de construire $C_1$ à partir du tracé de C (figure 3).

3. Nous posons maintenant $h(x) = \frac{1}{2} g(x)$ et appelons $C_2$ la courbe représentative de $g$ dans le repère ci-dessus.

Sans attendre, certains signalent que l'on obtient $C_2$ comme image de $C_1$ dans l'affinité ayant :

— pour axe, l'axe des abscisses
— pour direction, celle de l'axe des ordonnées
— pour rapport, 1/2.

Ce qui nous permet de construire $C_2$ à partir de $C_1$. (figure 3).

4. Je pose la question : comment pourrait-on obtenir *directement* $C_2$ à partir de C ?

(Un peu d'hésitation. On cherche)..

Un élève : en changeant d'unité sur chaque axe (solution astucieuse, mais je récuse cette facilité).

Un autre élève : par une *homothétie*.

Il précise, à ma demande : ... de centre O et de rapport 1/2.

Nous entreprenons donc de le démontrer, à partir du dessin suivant (figure 2) :

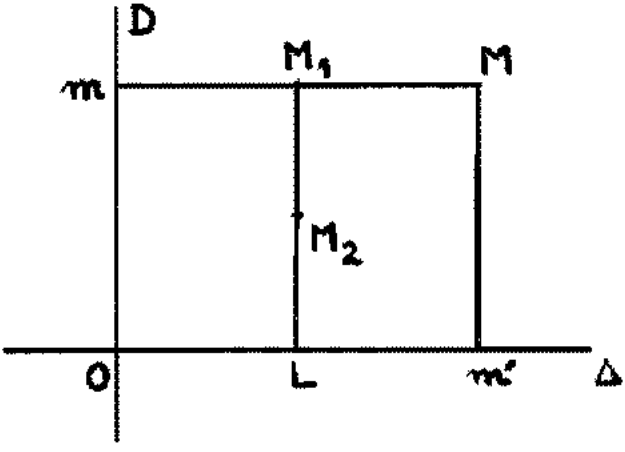


Figure 2

$\mathcal{A}$ est l'affinité d'axe D, de direction définie par $\Delta$ et de rapport 1/2. $\mathcal{B}$ est l'affinité d'axe $\Delta$, de direction définie par D et de rapport 1/2.

$M_1 = \mathcal{A}(M)$ et $M_2 = \mathcal{B}(M)$, soit $M_2 = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}(M)$.

Il s'agit de montrer que $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ est l'homothétie ($\mathcal{H}$) de centre O et de rapport 1/2, c'est-à-dire que $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{OM}$.

Sur leur brouillon, un certain nombre d'élèves s'en sortent à peu près convenablement (à quelques maladresses près).

Après la rédaction d'une démonstration collective au tableau, et une remarque au sujet des rôles symétriques joués par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (d'où $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$), nous revenons à nos courbes.

**5.** Nous avons finalement $f(x) = h(x) + \frac{1}{2}$. Nous appelons $C_3$ la courbe représentative de $f$ dans le même repère que précédemment.

Ici, pas une seconde d'hésitation : des voix diverses m'indiquent que l'on obtient $C_3$ comme image de $C_2$ par la *translation* de vecteur $\frac{1}{2}.\vec{j}$ (que nous notons $\mathcal{T}$). Nous faisons le tracé correspondant :

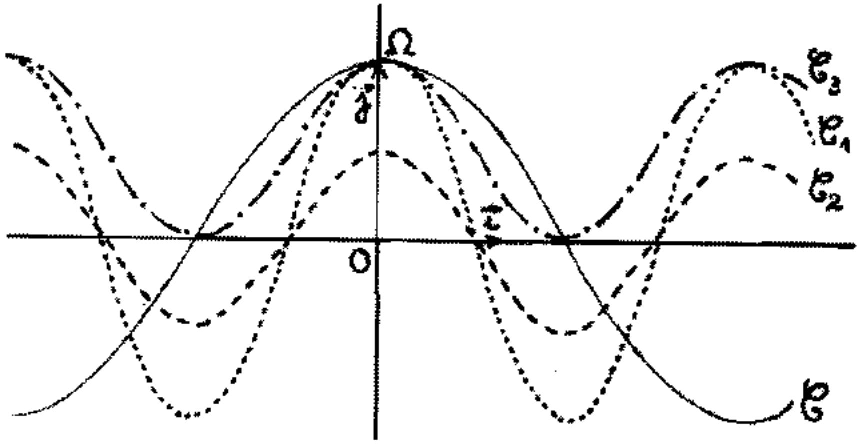


Figure 3

**6.** Insatiable, je pose la question : n'aurions-nous pas pu obtenir $C_3$ *directement* à partir de $C$ ?

Des élèves parlent d'homothétie. On compare les "tailles" des deux courbes (elles sont dans le rapport 1/2). Mais où serait l'éventuel centre ? A partir de l'examen de la position des sommets, quelqu'un propose le point $\Omega\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ; on constate que ce n'est pas invraisemblable. La démonstration se fait à l'aide du dessin suivant :

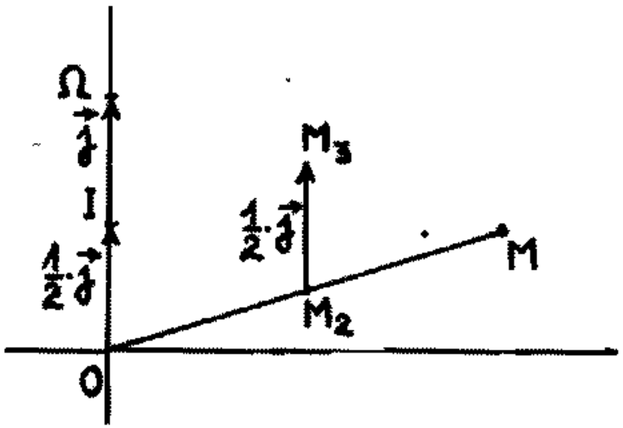


Figure 4

Nous pouvons maintenant conclure (enfin !) :
La courbe représentative de la fonction $(cos)^2$ se déduit de celle de la fonction *cos* par l'homothétie de centre $\Omega\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et de rapport 1/2 : *c'est donc bien une cosinusoïde.*

... Et c'est alors que retentit la sonnerie de 10 heures.

Dans ce cours... d'Analyse, nous avions finalement rencontré au passage :

une translation,
deux homothéties,
deux affinités ;

nous avions composé :

deux affinités,
une homothétie et une translation.

Pour quelqu'un qui avait décidé de ne pas faire de Géométrie, c'était réussi !