

le calendrier grégorien

par *Paul Perbost*
Ecole normale de Nice

Le calendrier grégorien, qui est en usage de nos jours, doit son nom au pape Grégoire XIII, qui en fit établir les règles par une Commission de savants et qui en imposa l'emploi au monde chrétien à partir de 1582. Cet excellent calendrier solaire maintient en étroit accord la vie civile avec le rythme des saisons. A ce point de vue, il représente une amélioration décisive d'un remarquable calendrier antérieur, le calendrier julien, promulgué par Jules César en l'an 45 avant notre ère. Pour comprendre l'importance de la réforme grégorienne, il est indispensable de rappeler quelques données numériques relatives au mouvement annuel du Soleil et de remonter aux principes du calendrier julien proprement dit.

Les données astronomiques

En un an, le Soleil semble cheminer sur une trajectoire circulaire au travers des constellations du Zodiaque. En réalité, ce mouvement apparent résulte de la translation annuelle de la Terre autour du Soleil, mais il est commode de conserver ici le langage de cette apparence. Le grand cercle que décrit annuellement le centre du Soleil sur la sphère céleste est appelé *écliptique*. L'astronomie, science où l'on aime la précision, définit plusieurs années différemment qualifiées ; pour s'en tenir à celles qui intéressent l'établissement du calendrier, ce sont l'année sidérale, l'année des saisons et l'année tropique.

L'année sidérale est la durée que met le Soleil à accomplir une révolution complète sur l'écliptique ; en une année sidérale, la longitude du Soleil augmente de 360° ; c'est le temps que met la Terre à faire une révolution complète autour du Soleil. Le grand cercle de l'écliptique fait un angle de $23^\circ 27'$ avec le grand cercle de l'équateur céleste ; il en résulte que la déclinaison du Soleil varie (la déclinaison mesure l'écart angulaire de la direction du Soleil avec le plan de l'équateur céleste) et c'est cette variation qui explique le phénomène des saisons. Il y a équinoxe de printemps lorsque la déclinaison du Soleil s'annule en croissant. L'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du Soleil à l'équinoxe de printemps n'est pas constant (principalement du fait que le point qui décrit une orbite képlérienne autour du Soleil n'est pas le centre de la Terre mais le centre des masses du système Terre-Lune) ; cette durée qui varie de façon compliquée est appelée l'année des saisons. La valeur moyenne de l'année des saisons est l'*année tropique* dont la valeur pratiquement constante sera notre guide pour l'établissement du calendrier.

Par l'observation, on détermine facilement l'année des saisons. On observe, sans peine, la date et l'heure du passage du Soleil à l'équinoxe. Supposons qu'on ait mesuré sa déclinaison à midi vrai deux jours consécutifs, et que l'équinoxe se soit produit dans l'intervalle. La première déclinaison est négative, la deuxième est positive. Comme on peut admettre, avec une bonne approximation, que la déclinaison varie proportionnellement au temps au moment des équinoxes, un simple calcul de proportion fournit l'instant où elle s'est annulée : c'est l'équinoxe. Dès le deuxième siècle avant notre ère, Hipparque, le plus célèbre astronome de l'Antiquité, déterminait la date de l'équinoxe par la méthode d'interpolation par les parties proportionnelles.

L'année tropique est donc la valeur moyenne de l'année des saisons. Pour la calculer, on détermine le nombre de jours qui se sont écoulés entre deux équinoxes de printemps observés à des dates suffisamment distantes dans l'histoire de l'astronomie. Comme on dispose d'anciennes observations d'équinoxes, c'est l'une des constantes naturelles les mieux connues. Supposons, par exemple, qu'on ait noté le passage du Soleil à l'équinoxe de printemps en 1783, à une minute près, et qu'on répète l'observation avec la même précision en 1983, ce qui n'est pas une prouesse astronomique : la durée de 200 années tropiques sera connue avec une incertitude de 2 min au plus. Ainsi, la valeur moyenne de l'année tropique sera-t-elle établie avec une erreur moindre que

$$\frac{2 \text{ min}}{200} = 0,01 \text{ min} = 0,60 \text{ s.}$$

Or le jour comporte 86400 secondes : sa cent millième partie vaut 0,864 00 s. On aura donc évalué l'année tropique à moins d'un cent millième de jour près. D'après Newcomb, qui a discuté toutes les observations recueillies depuis l'Antiquité, la durée de l'année tropique, en jours moyens, a pour valeur :

$$365,24219878 - 0,00000614 t,$$

t désignant le nombre de siècles écoulés depuis le 1^{er} janvier 1900. Elle diminue de 0,530 s par siècle. Actuellement, sa durée approximative en jours est :

365,24220

⚡ Pour comprendre l'origine des calendriers solaires et leurs réformes successives, il convient de retenir ce nombre. La difficulté principale des calendriers annuels réside dans la suite de ses décimales.

La solution julienne

Le désordre dans le calendrier romain était tel que Jules César entreprit de le réformer. Suivant les indications de l'astronome alexandrin Sosigène, l'année fut alors fixée, en moyenne, à 365,25 j avec 3 années

communes de 365 jours, suivies d'une année bissextile de 366 jours. Le jour supplémentaire était intercalé dans le mois de février, par redoublement du 24^{ème} jour, que les Romains appelaient le VI^e jour avant les calendes de mars. On datait : sextokalendas martias, puis : bis-sexto kalendas martias. D'où le nom de bissextus, donné au jour intercalaire. Nous en tirons l'adjectif bissextile appliqué à l'année qui le renferme et dont le mois de février compte 29 jours, au lieu de 28 dans les années communes.

L'année julienne fut conservée après l'établissement de l'ère chrétienne, les années bissextiles étant celles dont le millésime est divisible par 4. Le Concile de Nicée (325) fixa la date de Pâques au premier dimanche qui suit la première pleine lune de printemps. L'équinoxe tombait alors le 21 mars ; la fête de Pâques devait donc se célébrer au plus tôt le 22 mars, au plus tard le 25 avril.

L'année julienne a pour durée 365 j 1/4, ou 365 j 6 h, ou encore 365,25000 j. Hipparque attribuait à l'année tropique une durée de 365 j 5 h 55 mn = 365,246 527 7 j, légèrement supérieure à la vraie valeur, comme on le dira ci-dessous. Sosigène ne pouvait ignorer le résultat de son illustre devancier. Un écart de 5 min annuelles parut sans doute négligeable à l'astronome alexandrin pour un calendrier. Quoiqu'il en soit, l'année julienne est plus longue que l'année tropique, la différence étant de :

$$0,25000 - 0,24220 = 0,0078 \text{ (en jours).}$$

Dans le calendrier julien, l'équinoxe avance donc d'un jour tous les 128 ans ($\frac{1}{0,0078} = 128,205\dots$). Il tombait le 11 mars en 1582.

La réforme grégorienne

Pour rétablir la concordance des saisons telle qu'elle était à l'époque du Concile de Nicée, Grégoire XIII décida de supprimer 10 jours du calendrier ; en outre, pour la fixer désormais, il modifia la durée de l'année civile.

Dans le calendrier grégorien, les années séculaires, qui étaient bissextiles dans le calendrier julien, sont communes, sauf si leur millésime est divisible par 400. Ainsi, les années 1700, 1800, 1900 n'ont pas été bissextiles ; l'année 1600 l'a été, l'an 2000 le sera.

La réforme grégorienne, en ne laissant subsister que 97 années bissextiles en 400 ans (au lieu de 100 années bissextiles en 400 ans dans le calendrier julien ancien style), instituait une année civile moyenne dont la durée en jours est :

$$365 + \frac{97}{400} = 365,24250$$

encore en excès de 0,0003 jour, soit 26 secondes sur l'année tropique. Bien que cet écart aille en croissant, en raison, surtout, de la lente diminution de l'année tropique, le décalage du calendrier grégorien n'atteindra 1 jour qu'en l'an 4317. Cette remarque permet d'apprécier la qualité scientifique de l'œuvre entreprise par la Commission pontificale de réforme du calendrier, voici quatre siècles.

Tout ce qui précède, en particulier la répartition des années bissextiles dans les calendriers julien et grégorien, est bien connu ; et il est incontestable que le nombre $365 + \frac{97}{400}$ représente une approximation simple et correcte de l'année tropique.

Analyse de la solution grégorienne

On peut cependant s'interroger sur les raisons du choix de la fraction $\frac{97}{400}$. Des documents du XVI^e siècle attestent qu'il découle d'une étude faite par Luigi Giglio (en latin, Aloisius Lilius), médecin et astronome à Pérouse, dans un ouvrage intitulé "Compendium novae rationis restituendi kalendarium", dont le manuscrit fut présenté au pape Grégoire XIII en 1576 par le frère de son auteur, Antonio Giglio, l'année même de la mort d'Aloisius. Le mathématicien allemand Clavius, qui fut le maître d'œuvre et l'ardent propagandiste du nouveau calendrier, reconnaît expressément les mérites de Lilius, qu'il qualifie de "primus auctor" de la réforme (Romani calendarii a Gregorio P.M. restituti explicatio, 1603).

En 1974, dans un article du Journal for the history of Astronomy, N.M. Swerdlow, spécialiste américain de l'histoire des sciences, émettait l'opinion que le Compendium existait sans doute encore de nos jours, mais qu'il restait à découvrir. Effectivement, un chercheur américain contemporain, Gordon Moyer, a trouvé récemment trois versions imprimées du manuscrit initial, aux archives de Florence et dans les bibliothèques de Sienne et du Vatican (cf. Scientific American, May 1982). Malheureusement, selon ce chercheur, le Compendium reste désespérément muet sur les raisons du choix de la fraction $\frac{97}{400}$, que cependant il propose.

Il est certain, en tout cas, que l'astronome Lilius connaissait les estimations de l'année tropique faites depuis des siècles par ses prédécesseurs. Par exemple, dans les Tables alphonssines, dressées à Tolède en 1252 par ordre du roi de Castille Alphonse X le Savant, l'année tropique, évaluée en jours et fractions sexagésimales de jours, selon l'usage constant de l'époque, est estimée à une durée de :

$$365 ; 14 ; 33 ; 10,$$

ce qui signifie :

$$365 + \frac{14}{60} + \frac{33}{60^2} + \frac{10}{60^3}$$

ou encore :

365j 5h 49mn 16s

soit enfin :

365,242 546 2963 j en notation décimale moderne.

Cette évaluation ne dépasse que de 30 secondes les meilleures déterminations modernes, qui fixent l'année tropique à 365j 5h 48mn 46s !

Copernic, dans son célèbre *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543), et Reinhold dans ses *Tables prussiennes* (1551) indiquent des valeurs tout à fait comparables à celles des *Tables alphonssines*. Ces valeurs ne diffèrent entre elles que d'une quantité inférieure à 1 s. (Rhaeticus, élève de Copernic, propose une durée légèrement différente, 365 ; 14 ; 34, mais il sait, et il le dit clairement, qu'il ne s'agit là que d'une estimation approchée. *Narratio Prima*, 1540). De ce fait, les nombres qui expriment les durées de l'année tropique les mieux établies et les plus généralement admises à l'époque, malgré leurs légères différences, ont une partie sexagésimale commune : 365 ; 14 ; 33. Cette remarque, faite par Swerdlow, est capitale pour la question qui nous occupe. En effet :

$$\begin{aligned} 365 ; 14 ; 33 &= 365 + \frac{14}{60} + \frac{33}{60^2} \\ &= 365 + \frac{873}{3600} \\ &= 365 + \frac{97}{400} \end{aligned}$$

On tombe ainsi directement sur la fraction $\frac{97}{400}$.

C'est peut-être cette simple évidence arithmétique qui a guidé Lilius dans le choix du mode d'intercalation des années bissextiles dans le nouveau calendrier. D'ailleurs, un autre astronome italien de cette époque, Petrus Pitatus, avait déjà proposé le même système d'intercalation, à Vérone (1560). On ignore si Lilius s'est inspiré de Pitatus, mais le choix de la fraction $\frac{97}{400}$ paraît si naturel, d'après la remarque précédente, qu'ils ont très bien pu l'imaginer indépendamment l'un de l'autre.

L'année grégorienne a donc pour durée :

$$365 + \frac{97}{400} = 365,2425 \text{ j} = 365\text{j } 5\text{h } 49\text{mn } 12\text{s}.$$

Elle ne dépasse que de 26 s les estimations actuelles. L'approximation de Lilius est vraiment remarquable.

Peut-on faire mieux ? Autrement dit, existe-t-il de meilleures approximations rationnelles de l'année tropique que l'approximation gré-

gorienne. Le problème ainsi posé est classique en théorie des nombres. On peut le formuler comme suit :

“Trouver les meilleures approximations rationnelles du nombre décimal 365,242 546 296 3, qui exprime la durée de l'année tropique en jours moyens, donnée par les tables astronomiques connues de Lilius (Tables alphonssines)”. Nous résoudrons la question en utilisant l'algorithme d'Euclide et celui des fractions continues, qui en découle.

Le nombre décimal 365,242 546 296 3 est plus grand que 365 jours moyens d'une quantité :

$$x = 0,242\,546\,296\,3$$

Convertissons cet excès en fraction continuée finie. Par l'algorithme d'Euclide, on obtient d'abord les égalités :

$$\begin{array}{rcll} 10\,000\,000\,000 & = & 2\,425\,462\,963 \times 4 & + & 298\,148\,148 \\ 2\,425\,462\,963 & = & 298\,148\,148 \times 8 & + & 40\,277\,779 \\ 298\,148\,148 & = & 40\,277\,779 \times 7 & + & 16\,203\,695 \\ 40\,277\,779 & = & 16\,203\,695 \times 2 & + & 7\,870\,389 \\ 16\,203\,695 & = & 7\,870\,389 \times 2 & + & 462\,917 \\ 7\,870\,389 & = & 462\,917 \times 17 & + & 800 \\ 462\,917 & = & 800 \times 578 & + & 517 \\ 800 & = & 517 \times 1 & + & 283 \\ 517 & = & 283 \times 1 & + & 234 \\ 283 & = & 234 \times 1 & + & 49 \\ 234 & = & 49 \times 4 & + & 38 \\ 49 & = & 38 \times 1 & + & 11 \\ 38 & = & 11 \times 3 & + & 5 \\ 11 & = & 5 \times 2 & + & 1 \\ 5 & = & 1 \times 5 & & \end{array}$$

On peut alors exprimer x sous la forme d'un développement en fraction continuée, de la manière suivante :

$$x = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17 + \cfrac{1}{578 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}} + \frac{1}{5}$$

ou, avec une notation moins encombrante :

$$x = [4, 8, 7, 2, 2, 17, 578, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 2, 5]$$

Les nombres 4, 8, 7, ..., 5 sont appelés quotients partiels de ce développement ; les nombres rationnels

$$[4] = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{4} ; [4, 8] = \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{4 + \frac{1}{8}} = \frac{8}{33} ; \dots ; [4, 8, 7, 2, \dots] = \frac{p_n}{q_n}$$

où les crochets enferment successivement un terme, deux termes, ..., n termes, définissent pas à pas ce que l'on appelle les réduites de x .

~ On démontre que si $0 < q < q_n$, alors pour tout entier p on a

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|,$$

de sorte que $\frac{p_n}{q_n}$ est une "meilleure approximation" pour x , en ce sens qu'il n'y a pas de nombre rationnel plus proche de x et de dénominateur inférieur à q_n . On démontre aussi que ces réduites fournissent alternativement des valeurs par excès et par défaut du nombre considéré. Voici le tableau complet des réduites relatives à ce nombre $x = 0,242\,546\,296\,3$. On peut le constituer assez rapidement à l'aide d'une relation de récurrence qui existe entre trois réduites consécutives (cf. Jean Itard, Arithmétique et Théorie des Nombres, p. 66 PUF, Coll. Que sais-je ? et Hardy and Wright, An introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, p. 130).

	4	8	7	2	.2	17	578	1
0 1	4	33	235	503	1241	21 600	124 860 41	12 507 641
1 0	1	8	57	122	301	5 239	30 284 43	3 033 682

1	1	4	1	3	2	5
29 993 682	37 501 323	174 998 974	212 500 297	812 499 865	1 837 500 027	10 000 000 000
6 062 125	9 095 807	42 445 353	51 541 160	197 068 833	445 678 826	2 425 462 963

De ce tableau on peut extraire le rangement suivant :

$$\frac{8}{33} < \frac{122}{503} < \frac{5\,239}{21\,600} < \dots \leq x \leq \dots \frac{301}{1\,241} < \frac{57}{235} < \frac{1}{4}$$

D'où l'on voit que pour l'année civile, les intercalations les plus simples par excès sont celles de 1 jour tous les 4 ans (année julienne), ou de 57 jours tous les 235 ans, etc. Les intercalations par défaut sont celles de

8 jours tous les 33 ans, de 122 jours tous les 503 ans, etc. L'intercalation de Lilius, de 97 jours tous les 400 ans, n'est donc pas l'une des meilleures approximations rationnelles de x , théoriquement parlant, puisqu'elle n'entre pas dans les suites de ces réduites. Pour présenter autrement la situation, on peut la résumer ainsi ; en rangeant des nombres qui sont apparus dans l'étude précédente, en excès sur 365 jours :

Année réelle (estim. mod.)	<	$\frac{8}{33}$	<	Année grégorienne	<	$\frac{122}{503}$	<...<	x
0,242198...	<	0,242424...	<	0,242500	<	0,242544...	<...<	0,242546

Cependant, l'intercalation grégorienne représente une valeur approchée de l'année tropique suffisamment précise, par une fraction décimale dont le dénominateur est un multiple de 100. Cela n'est pas sans importance dans une chronologie où l'on compte par siècles. En conclusion, on peut estimer que la règle imposée par Grégoire XIII, pour la durée de l'année civile, est pratiquement parfaite. On pouvait difficilement mieux faire.

Il est à peine utile de dire que le déploiement de la totalité des réduites dans les tableaux précédents n'a été réalisé que pour donner une solution théorique complète au problème mathématique de la représentation de x en fraction continuée simple et finie ; il n'a évidemment aucune autre ambition. Dès la cinquième réduite, on pouvait avoir un encadrement du nombre x par deux fractions relativement simples et arriver à la conclusion de l'excellence de notre calendrier actuel.

Cependant, le nouveau système ne fut pas accueilli sans résistances. François Viète lui-même, le père de l'Algèbre Moderne, considérait le "Kalendrier Liliian" comme mal fondé au point de vue astronomique (Relatio Kalendarii Vere Gregoriani, 1600). Cette opposition au décret papal, en pleine période de massacres, au temps de la réforme protestante, est bien compréhensible ; elle avait naturellement d'autres raisons que l'astronomie ou l'arithmétique.

Aujourd'hui, le calendrier grégorien est d'un usage universel ; les autres calendriers (copte, israélite, musulman...) ne conservent d'utilité que pour l'organisation des diverses traditions à caractère annuel. L'Angleterre attendit 1752 pour s'y conformer, l'U.R.S.S. ne l'a adopté qu'en 1918, la Grèce en 1923 et la Turquie en 1926 seulement.

Telle qu'elle est, la précision de ce calendrier suffit aux exigences des sociétés actuelles. Les générations futures n'auront qu'à le conserver.

P.S. — Ci-joint une photocopie de la *Table de la grandeur de l'année suivant les plus célèbres astronomes*, extraite du Dictionnaire universel de mathématique et de physique de M. Saverien, de la Société Royale de Lyon, à l'article Chronologie (1753).

164		C H R		C H R					
<i>TABLE de la grandeur de l'Année suivant les plus célèbres Astronomes.</i>									
NOMS DES ASTRONOMES.		GRANDEUR DE L'ANNÉE.							
<i>Hyparque,</i>	2	363	jours.	5	heures.	35° 12".			
<i>Ptolomé,</i>	2								
<i>Albatrogius,</i>	365			5		46° 24".			
<i>Les Perses,</i>	365			5		49° 15' 0"	48 ^{IV} .		
<i>Alphonse,</i>	365			5		49° 15' 38"	49 ^{IV} .	46° 26'.	
<i>Copernic,</i>	365			5		49° 16' 23"	36 ^{IV} .		
<i>Ticho Brahe,</i>	365			5		48° 45"			
<i>Kepler,</i>	365			5		48° 17' 30"			
<i>Bullade,</i>	365			5		49° 8' 21"	13 ^{IV} .		
<i>Riccioli,</i>	365			5		48° 46"			
<i>Hévélius,</i>	365			5		47° 49' 47"	21 ^{IV} .		
<i>De la Hirt, Caffi- ni, & Bianchini.</i>	365			5		49° 16"			

La valeur attribuée à Hévélius paraît suspecte ; il faut certainement la corriger ainsi : 365^j 5^h 48' 49" 47" 23^{IV}. D'autre part, le souci de précision de ces astronomes anciens est louable, mais parfaitement utopique. Considérons, cependant, les durées de l'année selon les Perses, Alphonse et Copernic :

Les Perses	365 ^j 5 ^h 49' 15" 0" 48 ^{IV}
Alphonse	365 ^j 5 ^h 49' 15" 58" 49 ^{IV} 46 ^V 26 ^{VI}
Copernic	365 ^j 5 ^h 49' 16" 23" 36 ^{IV}

Ces valeurs étaient connues des astronomes du XVI^e siècle et, en particulier, des membres de la Commission chargée d'élaborer le calendrier grégorien (Clavius, Lilius, etc.).

Il est facile d'exprimer ces durées en *fractions sexagésimales de jours*, selon l'usage des savants de l'époque (cf. Rhaeticus, *Narratio Prima*, 1540). On trouve ainsi :

Les Perses	365 ^j ; 14 ; 33 ; 07 ; 31 ; 59 ; 52 ; 48 ; ...
Alphonse	365 ^j ; 14 ; 33 ; 09 ; 57 ; 04 ; 27 ; 50 ; 24 ; ...
Copernic	365 ^j ; 14 ; 33 ; 10 ; 59 ; 00 ; 05 ; 45 ; 36 ; ...

ce qui signifie, comme on l'a dit précédemment, et en se bornant par exemple à la valeur d'Alphonse (Tables alphonssines, 1252) :

$$365 + \frac{14}{60} + \frac{33}{60^2} + \frac{09}{60^3} + \frac{57}{60^4} + \frac{04}{60^5} + \frac{27}{60^6} + \frac{50}{60^7} + \frac{24}{60^8} \dots$$

On voit ainsi très clairement que ces trois valeurs ont pour *partie principale commune* :

$$365 + \frac{14}{60} + \frac{33}{60^2}$$

et qu'elles diffèrent au plus de $\frac{3}{60^3}$ de jour, soit $\frac{3}{60^3} \cdot 86400 = 1,2 \text{ s.}$

Comme on l'a déjà souligné ci-dessus, c'est probablement cette partie principale commune qui a été retenue par la Commission de Grégoire XIII pour la réforme du calendrier julien et pour la règle de répartition des années bissextiles.