

l'échec des coureurs

par Hans Freudenthal

L'échec — c'est relatif. Si l'on participe à une course et que l'on n'est même pas classé, c'est un échec. C'est l'échec des coureurs, des coureurs à pied, à bicyclette, à cheval, en automobile, des patineurs, des boxeurs. Mais personne ne vous demande de courir, même à une vitesse modérée, de monter à bicyclette, à cheval, en automobile, de patiner, de boxer, même pas de jouer aux échecs où les échecs peuvent être bien spécifiques. Qu'ils se plaignent de leurs échecs, cela ne me touche guère. C'est bien de leur faute s'ils échouent.

Les mathématiques, c'est autre chose. Il n'y a pas de choix. Apprendre les mathématiques, apprendre à lire et à écrire, c'est obligatoire. D'accord, la gymnastique, le dessin, la musique peuvent l'être aussi, mais il n'y a pas d'échecs en ces matières-là, ou s'il y en a, ils ne comptent pas — au moins à l'école. Quelle est la différence ? Pourquoi excuse-t-on ici et accuse-t-on là ? Y a-t-il des raisons et s'il y en a, sont-elles raisonnables ?

La scolarité, c'est obligatoire et ce qu'elle inclut est déterminé par une longue tradition et par des développements plus récents. Les critères dont elle dépend sont le bien de la société et de ses membres, ou plutôt les opinions que des gens responsables ou influents nourrissent ou disent nourrir et qui sont acceptées par la société elle-même.

Pour le bien de la société et de soi-même, on doit apprendre à lire, à écrire, à calculer — c'est l'opinion générale, mais on peut débattre sur le degré de perfection auquel on doit maîtriser ces arts. Le bien de la société et celui des individus ne doivent pas nécessairement être des fonctions monotones du degré de perfection avec laquelle ces arts seraient maîtrisés. Pas nécessairement, ou plutôt pas du tout.

Depuis quelques dizaines d'années on aspire à plus de précision, plus d'objectivité — efforts parfois aussi naïfs qu'enthousiastes. Il est évident que le maximum d'objectivité auquel on puisse jamais aspirer, c'est une intersubjectivité. On s'imagine que le sondage d'opinion est le moyen légitime de légitimation des objectifs d'enseignement. On peut se demander si cet instrument est légitime, mais en tout cas il est bien sûr qu'il ne mérite pas trop de confiance, vu le grand nombre de malentendus dans les enquêtes et la multiplicité d'interprétations des questions qu'on se pose. Hors de cela, le grand problème, c'est toujours, pour chaque objectif particulier, de bien définir le niveau d'achèvement qu'on a en vue.

Mais revenons aux mathématiques ! On ne peut pas nier qu'on nourrit des idées bien divergentes sur ce que sont ces mathématiques obligatoires. Si les programmes officiels sont en général vagues, les manuels prescrits, admis ou acceptés dans les divers pays pourraient être censés explici-

ter et concrétiser les objectifs des programmes. Or, si je considère ce que je connais des Soviétiques, des Allemands, des Français, des Belges, d'un côté et les nôtres, ceux des Britanniques, des Américains de l'autre côté, j'ai pitié de nous autres Hollandais, Anglais, Américains en comparant nos enfants aux enfants russes, allemands, français qui doivent être de petits génies en mathématiques.

Il est invraisemblable que, sous des conditions culturelles et sociales comparables, on puisse créer des systèmes d'enseignement qui produisent des effets tellement incomparables — je doute que même des structures culturelles et sociales telles que celles du Japon et de l'URSS puissent supplanter les conditions naturelles, les données d'intelligence de la jeunesse pour produire de tels effets différentiels énormes.

Admettons que les manuels des différents pays donnent une bonne idée de ce qui est enseigné en mathématiques (et non de ce qui est sauté). Est-ce que cela compte ? Je ne le crois pas. A mon avis, on ne devrait pas comparer ce qui est enseigné ou ce qu'on prétend enseigner, mais ce qui est appris. Ce qui est appris effectivement et cela, non pour passer un examen, mais avec des conséquences plus étendues. Je ne crois pas que cela puisse différer tellement dans les différents pays. Les jeunesses du monde ne peuvent pas différer entre elles à un tel degré qu'elles seraient en état de vraiment apprendre des mathématiques aussi diverses que celles qu'on leur offre dans les différents pays. Je ne le crois pas parce que cela me semble impossible. Des populations, se trouvant dans les mêmes conditions sociales, ne peuvent pas se distinguer autant, pour que cela me semble possible. Nous autres Hollandais, Anglais, Américains ne devons pas souffrir de complexes d'infériorité si l'on nous confronte avec ces mathématiques d'une abstraction effrayante que des élèves devraient maîtriser d'après des manuels soviétiques, allemands, français à l'âge de, disons, 16 ans. D'après des tests, la majorité de ces élèves n'a aucune idée de cette mathématique très raffinée qu'elle est censée avoir apprise. Même chez nous où les demandes sont beaucoup plus modérées, je suis frappé chaque année de nouveau par l'abîme qui s'ouvre entre les prétentions supérieures de l'enseignement, reflétées par les tests d'examen, et le niveau inférieur de performance — abîme possible grâce au fait que les cotes sont évaluées d'après une échelle qui donne un démenti aux constructeurs des tests ou même ridiculise leurs attentes, même en tenant compte de l'axiome des constructeurs de tests qu'un bon test doit discriminer à 50 %.

Voilà ce que j'ai l'habitude d'appeler le gros mensonge de notre système d'enseignement — et j'ai peur qu'il ne caractérise bien d'autres systèmes : l'abîme qui s'ouvre entre les demandes exagérées et le bas niveau de performance qui suffit pour être admis. Un gros mensonge qui n'est qu'un des aspects des fonctions sociales de notre système d'enseignement — je parle de chez nous — en tant que paradigme. Des examens sont un outil de sélection : identifier ceux qui peuvent satisfaire aux demandes les plus excessives. Mais pourquoi la grande majorité serait-elle obligée de

tendre à infiniment plus haut que ce qu'ils peuvent atteindre ? A mon avis apprendre des mathématiques simples à un niveau élevé d'entendement vaut mieux qu'enseigner des mathématiques raffinées qui s'apprennent à un niveau bas ou au-dessous de chaque niveau possible.

* * *

Je pourrais terminer ici, si la lutte contre l'échec était si simple. Si l'on ne demandait rien en mathématiques, il n'y aurait pas d'échec. Mais les demandes, c'est une réalité. La réalité de la sélection, c'est vrai, mais pas seulement cela. Je reviens à ce que j'ai appelé le bien de l'individu et le bien de la société. L'individu qui ne sait pas lire, écrire, calculer et encore beaucoup d'autres choses, et tout cela à un niveau passable, ne peut pas subsister dans cette société, et s'il pense qu'il le peut quand-même, il ne le peut qu'aux dépens des autres. Il faut aspirer à la compatibilité du bien de l'individu et du bien de la société. C'est pourquoi on a introduit la scolarité obligatoire — obligatoire d'abord en vertu d'une loi puis de plus en plus en vertu de la réalité sociale. Au cours des années, pour la grande majorité des élèves, la limite supérieure *actuelle* de la scolarité a devancé la limite *légale* — au moins chez nous.

Le système obligatoire s'est transformé en un marché libre. C'est un drôle de marché parce que la marchandise de demande, ce sont des diplômes tandis que celle qu'on offre ou prétend offrir, ce sont des connaissances et des aptitudes et il est évident que l'une ne doit pas nécessairement couvrir l'autre. Le chaînon indispensable entre ces deux, c'est l'examen, l'espèce d'examen qui nous est familier. Le critère d'admission, c'est la maîtrise plus ou moins parfaite de telles connaissances et aptitudes qu'on peut mesurer au moyen des examens traditionnels, la matière examinable. Est-ce un bon critère ?

On se fait des idées exagérées de l'influence de l'école sur la formation de nos élèves. Je suis convaincu que l'école ne contribue qu'en petite partie, petite mais souvent indispensable, à ce qu'on apprend à l'âge scolaire et que même au sein de l'école l'enseignement formel compte beaucoup moins que l'ambiance totale scolaire. Ce qui se présente aux yeux de l'examineur, ce n'est que le sommet de l'iceberg, et même d'un iceberg très peu homogène, et si cet examineur est aussi aveugle qu'un ordonnateur, il ne voit pas plus que cela.

Il y a des efforts — appelons-les annexionnistes — de l'école pour étendre son domaine, couvrir la totalité de l'apprentissage de l'élève et ainsi, à travers la totalité de sa vie, le formaliser, le préciser, l'organiser au moyen de nouvelles matières à enseigner qu'on ajoute aux programmes pour finalement l'examiner. On gâte ce qui est appris volontiers dès qu'on réussit à le transformer en une matière insipide et examinable d'enseignement formel. J'aime les leçons que l'enseignant commence en demandant aux enfants ce qu'ils ont vu la veille à la télévision, pour aboutir à je ne sais pas quoi, mais je m'opposerais à un système où l'analyse des programmes de télévision ferait partie obligatoire de l'enseignement formel, quoique je craigne que ce ne soit une opposition vaine.

Comment cela est-il lié à la lutte contre l'échec en mathématiques ? La mathématique, ce n'est pas la vie totale, et ce n'est pas une mathématique arbitraire ou quelconque indispensable au bien et à la subsistance de l'individu et de la société. L'échec en mathématiques ne doit pas signifier l'échec total, mais quand cela serait, ce serait la faute de la mathématique ou plutôt de l'enseignement, isolé dans l'enseignement, d'une mathématique isolée de la vie totale.

Notre thème, c'est l'échec et je l'ai appelé l'échec des coureurs. Chez nous, on ne parle pas d'échecs. On parle de décrocheurs. C'est une image différente, pas celle de la course, mais du train. Les décrocheurs ne sont-ils pas plutôt des décrochés ? Cela dépend du point de vue. Ce décrochage est-il la faute de l'élève ou de l'enseignement inapproprié ?

Les décrocheurs, dans notre terminologie, ce sont ceux qui, à partir d'un certain moment, se refusent à l'enseignement d'une certaine matière ; leur participation se borne à la présence physique. Par exemple pour les fractions, générales et décimales, les pourcentages, le système métrique, j'estime que chez nous un tiers des élèves se range parmi les décrocheurs. C'est une des interprétations des mathématiques secondaires, surannée, mais quand même assez ordinaire, de les accrocher de nouveau au point où ils se sont décrochés, avec les mêmes moyens didactiques qui ont failli autrefois et qui en général ne réussissent pas mieux alors.

Pour ceux qui continuent le voyage, il y a des occasions légales de décrocher en mathématiques après la huitième ou neuvième année scolaire, mais si cela se passe, ce n'est que la légalisation d'un décrochage informel précédent.

Ceux qui perséverent et réussissent à la fin de la dixième année sont censés avoir appris une mathématique, qui ne sert à rien, à un niveau pitoyable et ont acquis un diplôme qui vaut de moins en moins dans une société qui demande de plus en plus.

Nos instituteurs se recrutent parmi ceux qui ont décroché en mathématiques officiellement après la neuvième année, parce que les as en mathématiques aspirent à des professions plus dignes que l'enseignement. C'est bien différent dans la République Fédérale Allemande où l'on demande une quantité considérable de mathématiques aux futurs instituteurs à l'école et à l'université. On la leur demande, mais j'ai peur que ce ne soit de nouveau ce que j'ai appelé le gros mensonge. Je ne peux m'imaginer que dans la profession d'instituteur de deux pays voisins l'un de l'autre à beaucoup d'égards, il faille maîtriser des quantités aussi divergentes de mathématiques pour enseigner aux petits enfants le calcul arithmétique. Cet apprentissage obligatoire, à quoi sert-il ? A améliorer l'enseignement qu'ils donnent ? C'est douteux. A élever leur niveau, dit-on, et si l'on dit cela, c'est sous-entendu qu'on en a vu le niveau des salaires.

Je n'aspire pas à changer la société, mais malgré des désillusions que j'ai éprouvées, je crois toujours qu'on peut changer peu à peu l'enseignement : au lieu de la course avec l'échec inévitable des coureurs, la promenade où la modération de la marche est récompensée par l'attention pour l'entourage et ses détails qui échappent à celle des coureurs — excusez cette abondance de métaphores, mais n'oubliez pas que le langage métaphorique a déjà commencé avec "la lutte contre l'échec".

* * *

Les promenades en groupe ont l'avantage qu'on s'amuse en apprenant l'un de l'autre. J'ai fait une telle promenade pendant presque trois années. Ma compagne était une jeune fille de près de chez nous. Je lui ai donné des leçons à une moyenne de deux fois par semaine une demi-heure ou un petit peu plus. Ce fut dans sa sixième année scolaire, la dernière de notre enseignement primaire, que cela commença. Elle était d'une intelligence normale, mais extrêmement faible en arithmétique à l'école. Elle maîtrisait le calcul écrit des entiers, mais elle ne savait rien sur les fractions, communes et décimales, sur les pourcentages, sur le système métrique. Dans mon enseignement, je me suis borné à la matière traditionnelle, parce que dans les leçons brèves et sans la résonance d'un groupe plus étendu, je n'avais pas le choix. J'aurais aimé faire plus de géométrie avec elle et en général plus de mathématiques en situation, mais cela s'avéra impossible dans ce cadre.

Après quelques problèmes combinatoires, j'abordai les fractions d'une manière concrète dont les pages suivantes peuvent donner une faible idée (fig. 1-2)

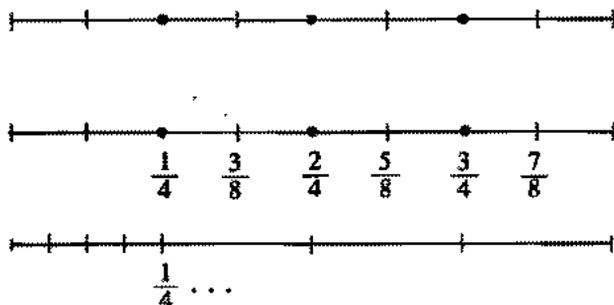


Fig. 1

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{10}{8} = 1 \frac{2}{8} = 1 \frac{1}{4}$$

$$\frac{12}{8} = 1 \frac{1}{2}$$

$$\frac{14}{8} = 1 \frac{3}{4}$$

$$\frac{16}{8} = 2$$

$$\frac{18}{8} = 2 \frac{1}{4}$$

$$\frac{20}{8} = 2 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{12} = 1$$

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

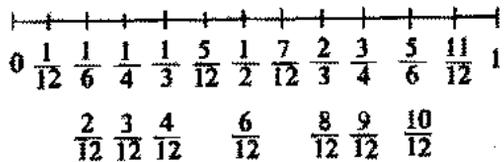
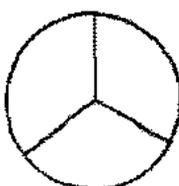
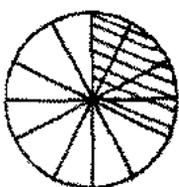
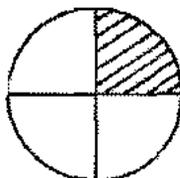
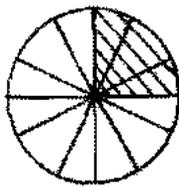


Fig. 2

Malheureusement j'ai perdu les premières pages de mes notes, mais celles-ci indiquent qu'elle savait faire :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$$

et des problèmes analogues d'une manière concrète, c'est-à-dire visuelle, en faisant un dessin. Et ce fut plus tard avec :

$$\frac{7}{11} = \frac{14}{22} = \frac{21}{33} = \frac{28}{44} = \frac{35}{55}$$

qu'elle renonça spontanément au support visuel ; à partir de ce moment les problèmes d'équivalence des fractions ne demandèrent plus aucune visualisation.

Ma didactique était de placer cette fille de presque 12 ans dans des situations concrètes visuelles et de la laisser continuer de cette manière intuitive. Jamais je ne lui ai rien expliqué ; jamais je n'ai formulé aucune règle ; jamais je ne lui ai demandé de formuler des règles. Quand j'avais l'impression qu'elle faisait semblant d'agir intuitivement tandis qu'en vérité elle avait déjà algorithmisé le type de problème, j'agrandis les nombres figurant dans les problèmes de telle sorte que la procédure algorithmique devint apparente. Je n'ai posé la question "pourquoi ?" que lorsque j'étais sûr qu'elle savait répondre. Cette didactique est intervenue autant dans l'apprentissage de l'addition que de la multiplication des fractions (fig. 3).

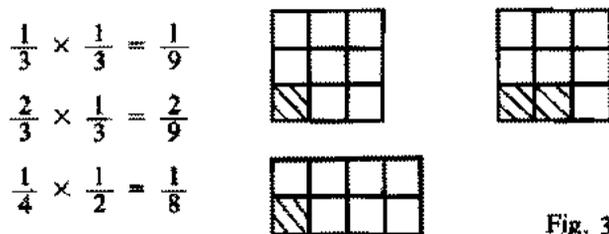


Fig. 3

Quant à la fameuse règle de la position de la virgule dans les calculs sur les décimaux, je ne la lui ai jamais expliquée, et je ne sais si elle eût été capable de la formuler ; elle savait seulement l'utiliser intuitivement.

A un certain moment on s'est aperçu à l'école qu'elle avait fait des progrès. On lui a alors appris toutes les règles. Le résultat fut une catastrophe. La récupération a duré quelques semaines.

Ce fut neuf mois après avoir commencé à travailler avec elle, que je l'ai initiée aux nombres négatifs en suivant la même didactique : l'approche visuelle (fig. 4) (notez que les points sous des chiffres indiquent les inconnues du problème). Puis j'ai abordé les vecteurs en dimension 2 et enfin je suis passé à l'étude graphique des équations linéaires.

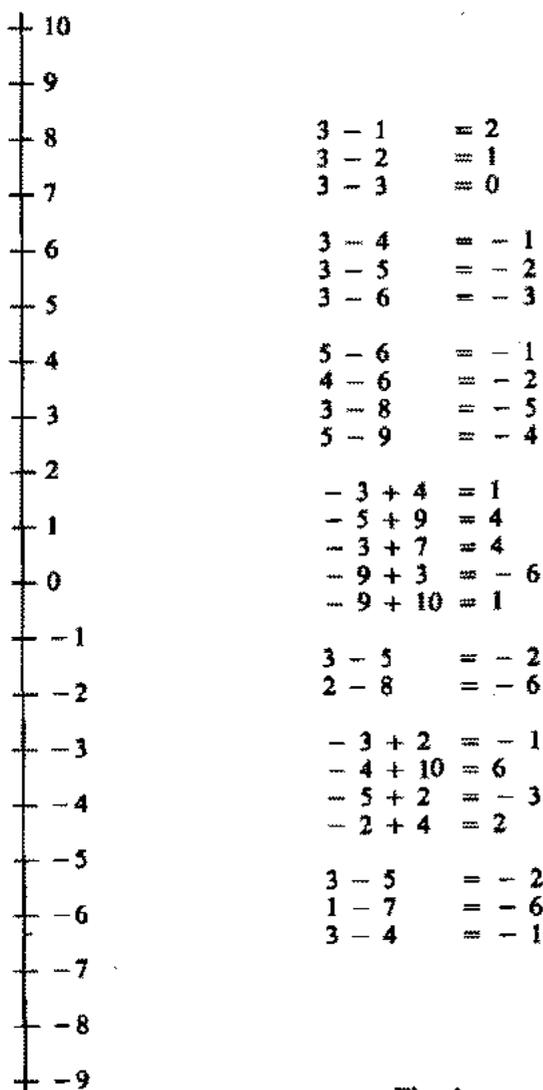


Fig. 4

La transition à l'algèbre proprement dite s'annonce alors, et, vingt mois après le début, on se trouve en pleine algèbre.

Voici un phénomène particulièrement intéressant : jusqu'au 31 mai 1981 elle avait l'habitude de résoudre des équations telles que

$$\frac{2}{3}x = a$$

par "multiplier par 3, diviser par 2". Ce jour-là elle fit pour la première fois la conclusion directe de $\frac{5}{3}x = a$ à $x = \frac{3}{5}a$

et ce fut alors la règle. A dessein, je ne suis jamais intervenu pour lui apprendre des raccourcis. Je suis sûr qu'elle les avait déjà découverts beaucoup plus tôt, mais n'osait les appliquer ouvertement parce qu'elle n'était pas sûre de mon approbation et en effet, parfois quand elle fit des raccourcis, elle s'assura de ma permission, pour ainsi dire, par un clin d'œil.

Un phénomène analogue : d'abord, elle calcule des produits de puissances comme cela :

$$a^4 \cdot a^3 = a.a.a.a.a.a.a = a^7$$

pour, à un certain moment, faire le raccourci de l'addition des exposants et continuer cette procédure même si ce sont des "lettres". Je doute qu'elle eût été en état de formuler cette loi.

Quelle est la leçon de cette suite de leçons ? Je me garde bien d'en exagérer la valeur. L'échec en mathématiques n'est pas inévitable. Mais il est bien connu que, par des leçons particulières, on peut prévenir l'échec en mathématiques ou au moins — ce n'est pas la même chose — ses conséquences fatales. Mais nos rencontres n'étaient pas des leçons particulières. Les leçons particulières, cela se paye trop cher pour laisser les élèves tripoter et leur permettre, les bras croisés, des voies tortueuses. Cela ressemblait plutôt à l'enseignement idéal que Rousseau avait en tête : un élève par maître — l'utopie. Ce que je vous ai montré, c'était l'échec évité par un hasard : le voisinage d'un vieillard qui, outre la mathématique, a fini par apprendre la vertu de la patience. C'est une image faussée de ce qu'on entend par l'enseignement, faussée dans deux directions, au sens négatif aussi bien qu'au sens positif. Etre l'élève unique, c'est aussi un désavantage, celui de l'isolement. Puisque je me suis abstenu de le faire, personne n'a obligé mon élève à verbaliser, à formaliser ses pensées. L'isolement a souvent empêché la prise de conscience. Dans un groupe, on lui aurait demandé de justifier ses actions. Ou, si je reprends la métaphore, l'autre extrême : n'aurait-elle pas plutôt suivi patiemment le peloton ou son chef ?

Je vous ai avertis : la leçon de cette suite de leçons n'est pas grand'chose. C'est une source de questions plutôt que de réponses, mais — espérons-le — de questions qui valent la peine d'être posées. Des questions de méthode et de matière à enseigner. De méthode — c'est évident : l'organisation, si elle est possible, d'un enseignement qui approche celui que j'ai eu la bonne chance de donner à cette jeune fille. Mais n'oublions

pas la matière à enseigner. Quel est le sens de cet enseignement de fractions, de nombres négatifs, d'équations linéaires, de puissances, d'algèbre, pour une fille qui ne sera jamais appelée à appliquer cette matière ? On s'est amusé, le maître et l'élève. Peut-être a-t-elle gagné plus de confiance en elle-même. Ce seraient des résultats positifs, mais cela ne suffit pas. C'est évident que tout le monde ne peut pas apprendre les mêmes choses ; mais l'algèbre, doit-elle être abordée par tout le monde, et puis, quelle espèce d'algèbre, quelle quantité, quelle profondeur ? Evidemment l'algèbre ne vaut pas une course, mais vaut-elle une promenade ? Je ne peux pas aborder ces questions à moins que je ne retourne à la question de la méthode, la méthode, non d'enseigner tel ou tel sujet mathématique, mais la méthode d'organisation de l'enseignement.

Si je n'aime pas l'enseignement en pleine classe dirigé par le maître ; je me méfie de l'enseignement dit individualisé, qui nonobstant des résultats douteux est toujours à la mode — au moins chez nous — et dont la menace sera renforcée dans le futur par l'intervention de l'ordinateur. C'est la promenade solitaire transformée en une course qui produira de nouveau des foules de décrocheurs.

J'aime plutôt les petits groupes de travail — même et de préférence hétérogènes —, la différenciation non par rapport à la matière à enseigner et à la vitesse d'apprentissage, mais par rapport à la profondeur de l'entendement des participants. Est-ce que c'est une illusion, ces équipes de collaboration à des niveaux divers ? Mais cela existe partout dans la société et si l'école promet de préparer ses disciples à entrer dans la société ou plutôt à en faire partie, est-ce trop de lui demander que d'apprendre les leçons que la société a apprises depuis longtemps ?

Cela demanderait aussi une réorganisation de notre système d'enseignement. Il y en a déjà des exemples expérimentaux et chez nous on s'occupe de recherches plus formelles de cette organisation nouvelle. Comment stimuler la collaboration effective ? Comment contrebalancer dans une équipe le poids d'un chef dominant ? Que faire avec les décrocheurs qui restent artificiellement accrochés ? Ce sont des questions didactiques auxquelles je ne peux donner que quelques réponses préliminaires, mais des questions qui valent la peine d'être abordées pour être approfondies.

A cet égard, l'exemple que je vous ai montré ne compte presque pas. Il ne compte pas du point de vue de la matière à enseigner, parce qu'elle était trop traditionnelle. S'il y a une chose qu'on doit apprendre en mathématiques, c'est de mathématiser des situations. C'est une attitude que l'enseignement traditionnel ne développe pas ou plutôt qu'il étouffe. Mais ce qui manquait le plus à mon exemple, c'était la discussion : travailler en commun sur des problèmes, cela permet de préciser les intuitions vagues des uns, de dépasser les malentendus et les ignorances des autres, cela nécessite de réfléchir sur ce qu'on croit avoir compris pour

l'expliquer à ses copains, ou sur ce qu'on n'a pas compris pour poser des questions à celui qui dit l'avoir compris — situation humaine mais aussi mathématique si l'on entend la mathématique au sens qu'elle mérite.

Cette espèce d'enseignement ne s'applique-t-il à chaque matière à enseigner ? Ne me suis-je pas amusé avec des généralités ? Non, au contraire. S'il s'applique plus généralement, la mathématique en est le meilleur paradigme. Premièrement, parce que nulle part on ne peut développer mieux l'aptitude à résoudre des problèmes, et deuxièmement parce que nulle part ailleurs on n'est forcé autant de réfléchir sur ce qu'on a compris ou n'a pas compris pour créer les outils linguistiques précis de réponse et de question.

Si tout cela fonctionne, n'y aura-t-il plus d'échec en mathématiques ? L'échec des coureurs est inévitable. Mais ce qui compte, ce sont les promenades réussies.

Ce texte n'est qu'un résumé de la conférence prononcée par Hans Freudenthal en introduction aux Journées de Lille. Les lecteurs qui souhaiteraient obtenir le texte complet peuvent s'adresser à l'auteur :

Hans Freudenthal
Rijksuniversiteit Utrecht
Subfaculteit der Wiskunde
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht/Overvecht
Tel. 030 - 611611