dans nos classes

pour d'autres utilisations du plan repéré

par Bernard Destainville
IREM de Toulouse

L'utilisation d'une droite graduée nous permet de mieux analyser certains problèmes dans $\mathbb{R}$ *(inéquations, intervalles, valeur absolue, ...).*

Dans le même esprit, il semble possible de surmonter beaucoup de difficultés pour les problèmes à deux variables si l'on utilise le plan repéré, et mieux, cela permet de renouveler l'intérêt sur des techniques connues et même de dégager de nouvelles méthodes.

Par exemple, c'est probablement après des considérations graphiques pour l'optimisation d'un problème linéaire à deux variables qu'est née la méthode du simplexe, beaucoup plus générale. Voici quelques procédés utilisés en seconde.

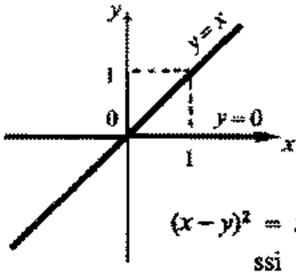
1. Equations à deux variables

a) Les égalités suivantes ne sont pas vraies quels que soient les réels x et y : $(x-y)^2 = x^2 - y^2$; $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; $\frac{x+2}{y+2} = \frac{x}{y}$; $\frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{y}$.

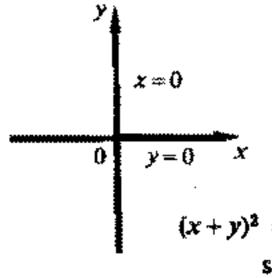
Trouver des contre-exemples.

Dans le plan repéré, trouver pour chacune l'ensemble des points M(x,y) satisfaisant à l'égalité.

Chaque exercice débouche sur une équation produit à deux variables ; il est surprenant de voir le désarroi devant ce produit nul !

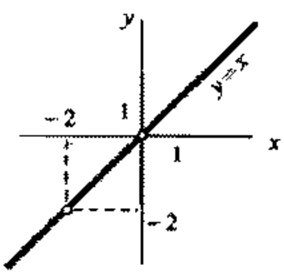


$$(x-y)^2 = x^2 - y^2$$
ssi
$$2y\,(y-x) = 0$$
ssi
$$y = 0 \text{ ou } y = x$$



$$(x+y)^2 = x^2 + y^2$$
ssi
$$2\,x\,y = 0$$
ssi
$$x = 0 \text{ ou } y = 0$$

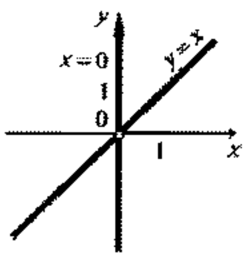
L'ensemble est la réunion de deux droites pour chacun des deux cas.



Pour $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R} - \{0\,;-2\}$,

$$\frac{x+2}{y+2} = \frac{x}{y}$$
ssi
$$y = x$$

L'ensemble est la première bissectrice privée de deux points.



Pour $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}^*$,

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{y}$$
ssi
$$x.y.(y-x) = 0$$
ssi
$$x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = x$$

L'ensemble est la réunion de deux droites privées de leur intersection.

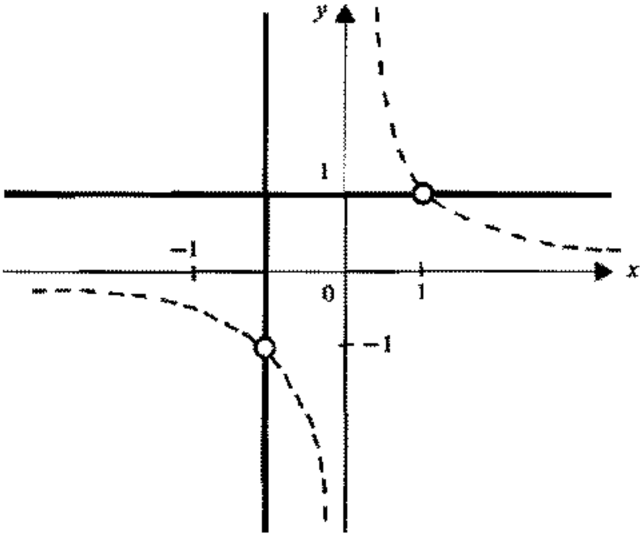
b) Déterminer l'ensemble des points M(x,y) tels que : $\frac{y-x}{1-x.y} = 1$.

Faut-il proposer un tel exercice en seconde alors que tout travail sur les fractions rationnelles a disparu du programme de troisième ?

Il ne semble pas que la présence de deux variables complique : il faut ici encore trouver l'ensemble de définition puis résoudre, mais en provoquant une nouvelle réflexion.

Résoudre $(1 + x)(1 - y) = 0$ avec $x.y \neq 1$ prend toute sa signification dans la figure ci-dessous : l'ensemble est la réunion de deux droites privée des points qui appartiennent en même temps à l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

La condition est étudiée conjointement ($x = -1$ ou $y = 1$) et $x y \neq 1$



2. Les pertes de précision dues aux calculs sur les encadrements

a) Soient x et y tels que ($1 \leqslant x \leqslant 5$ et $2 \leqslant y \leqslant 3$) (I)

— En déduire le couple (II) des encadrements pour $x+y$ et $x-y$; en remarquant que $2x = (x+y) + (x-y)$ et avec une égalité analogue pour y, déduire de (II) un nouveau couple appelé (III) d'encadrements pour x et y. Constater la perte de précision.

— Dans le plan repéré, on appelle A, B, et C les trois ensembles de points M(x,y) vérifiant respectivement (I), (II) et (III).

Comparer ces trois ensembles.

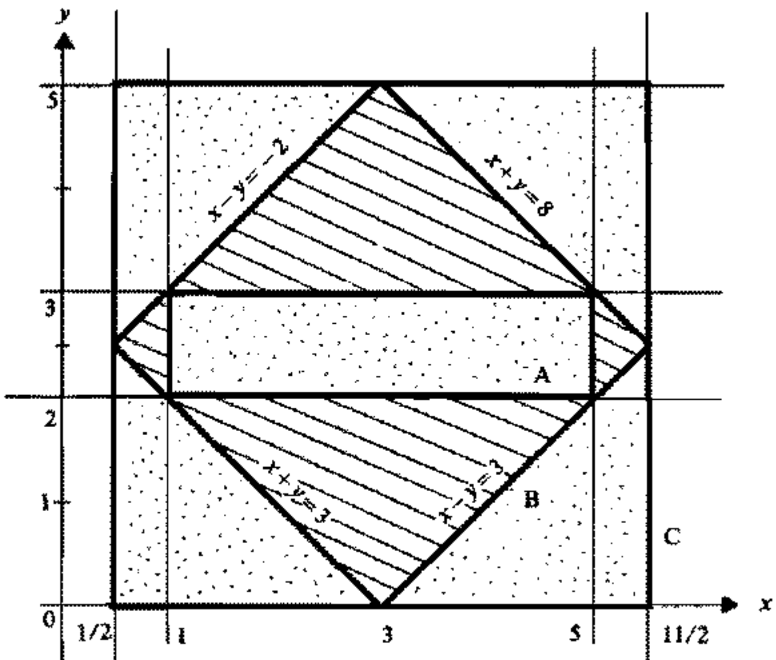
A : (I) $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 2 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$

B : (II) $\begin{cases} 3 \leqslant x+y \leqslant 8 \\ -2 \leqslant x-y \leqslant 3 \end{cases}$

C : (III) $\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11}{2} \\ 0 \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$

(I) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ III)

donc $A \subset B \subset C$.



La perte de précision est ainsi visualisée.
(Avec les 12 inéquations, les rectangles ont été obtenus comme intersections de bandes de plan.)

b) A propos de la multiplication membre à membre (pour des réels positifs).

Prenons

$$\text{(I)} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2 \leqslant y \leqslant 18 \end{array} \right.$$

ce choix n'est pas quelconque : si l'on veut que les résultats ultérieurs ne présentent pas de radicaux, il est nécessaire et suffisant que pour chaque intervalle le quotient des bornes soit un carré.

Les méthodes classiques donnent

$$\text{(II)} \quad \left| \begin{array}{l} 2 \leqslant x.y \leqslant 72 \\ \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{y}{x} \leqslant 18 \end{array} \right.$$

Le produit membre à membre donne $1 \leqslant y^2 \leqslant 36^2$.
De même avec $\frac{1}{18} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 2$, on obtient $\frac{1}{9} \leqslant x^2 \leqslant 12^2$.

x et y étant positifs, nous obtenons

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 12 \\ 1 \leqslant y \leqslant 36 \end{array} \right.$$

Pour (I) et (III), la représentation graphique nous donne encore des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes.

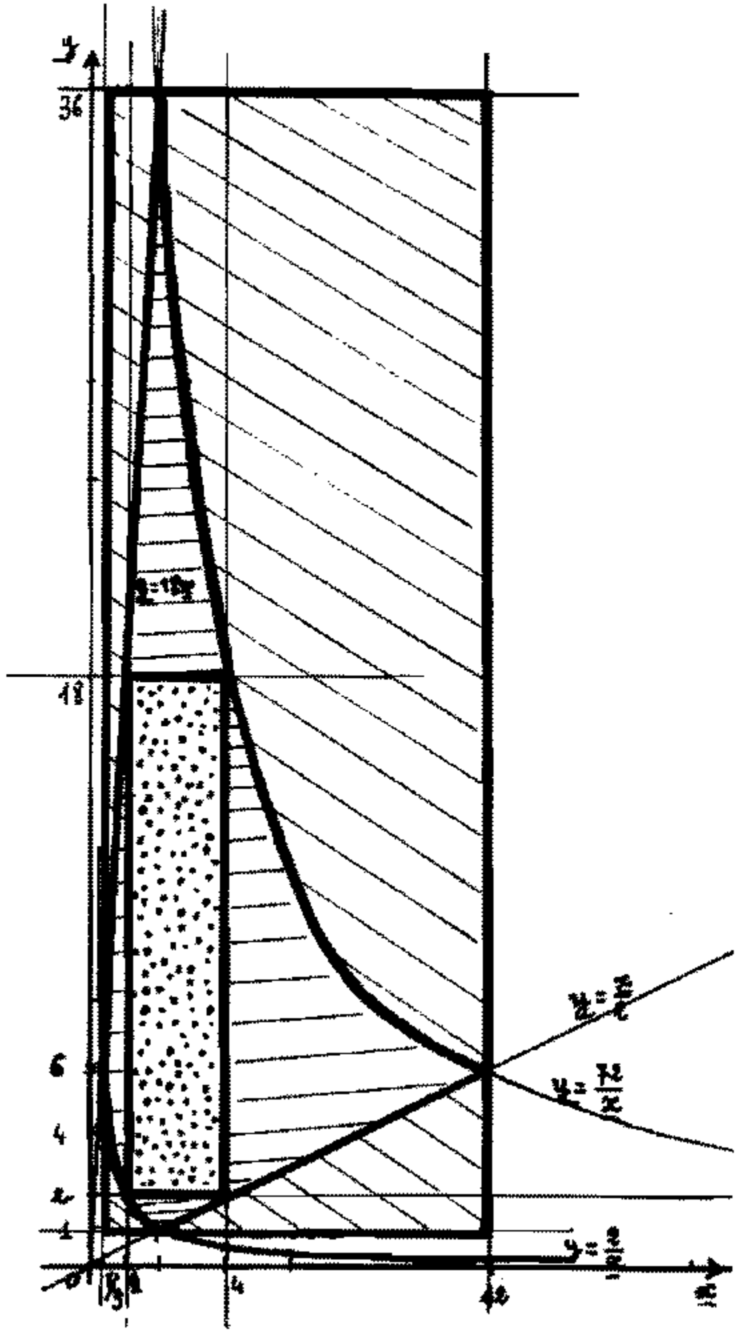
Pour (II), pour la condition $2 \leqslant x \leqslant 72$, nous sommes conduits à tracer les courbes d'équations $x.y = 2$ et $x.y = 72$ qui sont des demi-hyperboles ; la représentation graphique de $2 \leqslant xy \leqslant 72$ est la région comprise entre ces deux demi-hyperboles.

Pour la seconde condition $\frac{1}{2} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 18$, on est amené à prendre l'intérieur du secteur dont les côtés ont pour équation $y = \frac{x}{2}$ et $y = 18x$.

Le système (II) est donc vérifié à l'intérieur d'un quadrilatère curviligne dont les côtés sont deux segments et deux arcs d'hyperboles.

La figure ci-dessous fait apparaître comme pour l'addition, un affaiblissement : les trois domaines sont emboîtés, chaque côté passant par l'un des sommets du domaine précédent.

Adaptés au programme de seconde, de tels exercices semblent renouveler l'intérêt des élèves tout en permettant un nouvel approfondissement.


y
36
18
6
4
2
1
O
1/3
1
4
12
x
y = 18x
y = x/2
y = 72/x
y = 2/x