sur la présentation de la dérivation en première

par des animateurs de l'IREM de Poitiers(*)

1. Les idées derrière les mots

La dérivation donne la clé de trois grands problèmes apparemment disjoints : vitesse instantanée, tangente, approximation locale ; mais l'idée essentielle qui permet la résolution est celle-ci : *la dérivée mesure une variation instantanée, alors que le taux de variation mesure, lui, une variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle* (passage du global au local : i.e. une dérivée est la limite d'un taux de variation).

(Dans son livre "Mathématiques pour élèves-professeurs", G. GLAESER déplore que nos étudiants ne reconnaissent pas la dérivée dans d'autres domaines que les mathématiques : par exemple, un débit instantané, un coût marginal, un taux de natalité, etc... Les choses ont-elles changé ? Nos élèves voient-ils dans la dérivée autre chose qu'un moyen pour étudier les sens de variations ? Ont-ils l'idée décrite ci-dessus ? Le taux de variations est assez méconnu dans nos programmes ; pourtant dans beaucoup de domaines il a un sens concret : vitesse moyenne, débit moyen, coût moyen de fabrication, etc. ; il fournit le premier exemple de *linéarisation globale* : sur un intervalle on remplace la fonction par sa sécante).

2. Sur la présentation de la dérivée

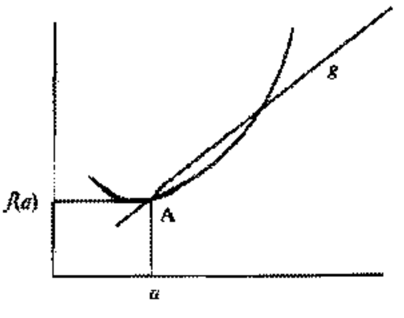
Les programmes et commentaires incitent fortement à aborder la dérivée par le problème de l'approximation locale, et certains manuels tendent à privilégier cet aspect de la dérivation.

Cette présentation occulte l'idée essentielle qu'une dérivée est la limite d'un taux de variation. Bien sûr on peut la retrouver ensuite, mais il est certain que la présentation première est celle qui laissera le plus de traces.

1°/ Quoi qu'il en soit le problème de l'approximation locale est souvent mal posé

En effet, pour une fonction f continue en a, il est clair que *toute* droite passant par A est une approximation de f autour de a, puisque si g est la fonction représentée par cette droite, on a :

$$\lim_{a} (f - g) = 0$$



Le *vrai* problème qui se pose n'est donc pas celui de la recherche d'une approximation locale, mais celui de la *meilleure* approximation locale ; et c'est ce problème là qui est le plus souvent passé sous silence ; puisque, en général (du moins à travers les manuels), on écrit, par exemple, avec $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $f(1+h) = 1 + 2h + h^2 = 1 + 2h + h\,\mathcal{E}(h)$; et on se contente de remarquer que $(1 + 2h)$ est une approximation affine de $(1 + h)^2$ avec un "reste" de la forme $h\,\mathcal{E}(h)$; et on généralise ; *en réalité, tant que l'on n'a pas démontré qu'il s'agit là de la meilleure approximation, on n'a ni rien posé, ni rien résolu.*

Voir plus loin une démonstration du résultat suivant : f dérivable (au sens ; le taux de variation a une limite), **équivaut à** f admet une meilleure approximation affine locale. Cette démonstration n'est pas à la portée des élèves de première.

2°/ La définition qui résulte de l'approximation locale contient une part de mystère (des affirmations d'existence souvent troublantes pour les débutants)

> f définie sur un intervalle I est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si il existe une fonction $\mathcal{E}$ définie sur $I - \{x_0\}$ et $\lim\limits_{x_0} \mathcal{E} = 0$, un réel A, tels que pour tout $x \in I - \{x_0\}$:
>
> $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,A + (x - x_0)\,\mathcal{E}(x).$$

Mais pourquoi ne pas dire, dans ces conditions, qu'il n'existe sur $I - \{x_0\}$ qu'*un seul candidat possible* pour la fonction $\mathcal{E}$; c'est la fonction :

$x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A$; et dire que $\lim\limits_{x_0} \mathcal{E} = 0$, c'est dire précisément

que $A = \lim\limits_{x_0} \left(x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$?

La définition ci-dessus n'est *pas opérationnelle* (hormis pour les polynomes, cas exceptionnels) car si l'on veut trouver cette fonction ϵ et ce réel A, il est *nécessaire* de savoir que si A existe, c'est nécessairement la limite en x_0 du taux de variations entre x et x_0, et que alors $\mathcal{E}$ existe nécessairement ; autrement dit dès que cette limite existe, $\mathcal{E}$ *existe nécessairement* ; et nous n'avons en pratique (lorsque f n'est pas écrite de manière évidente sous la forme voulue) qu'à étudier l'existence de la limite du taux de variations.

Pourquoi tous ces détours, pour dire que f est dérivable en x_0 si le taux de variations $t(x, x_0)$ a une limite en x_0 ?

3°/ Faire plus simple

Poser le problème de la recherche de la vitesse instantanée (par exemple), de la tangente à une courbe qui fait bien comprendre deux choses essentielles qui sont à la base de l'idée de dérivée :

a) pourquoi on s'intéresse au taux de variation $t(x, x_0)$

b) pourquoi il est nécessaire de passer à la limite.

Contrairement à la présentation précédente, on résoud là véritablement le problème.

Pour arriver ensuite à l'aspect approximation locale ; on note $\mathcal{E}$ la fonction $x \longmapsto t(x, x_0) - f'(x_0)$, qui est donc de limite nulle en x_0 ; et par simple jeu d'écriture, on obtient alors le développement limité d'ordre 1, suivi de tous les commentaires d'usage sur l'intérêt d'une telle écriture.

Cette présentation évite en outre de donner la définition la plus générale d'un développement limité et c'est aussi bien ; dans certains manuels on voit que sont définis des développements limités en des points extrémités d'intervalles, contrairement aux théories classiques où l'usage est de prendre le point *à l'intérieur* de l'intervalle ; ces auteurs risquent de gros ennuis au moment de la composition de fonctions admettant un développement limité ; heureusement ceci n'est pas au programme, mais inutile justement d'aller à ce niveau, chercher d'autres développements limités que ceux donnés par la dérivation.

3. Démonstration de l'équivalence entre f dérivable et f admet une meilleure approximation locale affine

I est un intervalle, $x_0 \in$ I, f est une fonction définie sur I. Pour simplifier $x_0 = 0$ et $f(0) = 0$.

f admet une approximation affine en 0, si il existe une fonction affine g telle que : $\lim\limits_{0}(f-g) = 0$. Si $g(x) = ax + b$, ceci implique $b = 0$, et $\lim\limits_{0} f = 0$. Ainsi on pourrait aller plus vite en supposant f continue en 0 et en disant alors que toute fonction affine g est une approximation de f en 0 ; ce que l'on suppose.

g_1 et g_2 étant affines, on dit que g_1 est meilleure approximation de f que g_2 si il existe un intervalle ouvert V de centre 0 tel que :

$$\forall x \in \text{V} \qquad |g_1(x) - f(x)| \leq |g_2(x) - f(x)|$$

1°/ On suppose que f admet une meilleure approximation affine qui est $g(x) = ax$; donc pour tout réel b, il existe un certain voisinage de 0, tel que sur ce voisinage pointé :

$$\left|\frac{f(x)}{x} - a\right| \leq \left|\frac{f(x)}{x} - b\right|$$

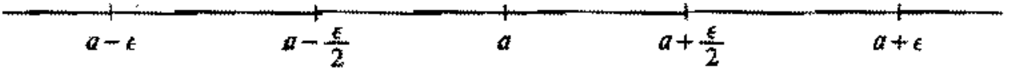
Soit un réel $\epsilon > 0$; prenons $b = a + \epsilon$; alors sur un voisinage pointé, V', de zéro, on a :

$$\left|\frac{f(x)}{x} - a\right| \leqslant \left|\frac{f(x)}{x} - (a+\epsilon)\right| \qquad (1)$$

Avec $b = a - \epsilon$, nous avons sur un voisinage pointé, V", de zéro :

$$\left|\frac{f(x)}{x} - a\right| \leqslant \left|\frac{f(x)}{x} - (a-\epsilon)\right| \qquad (2)$$

On en déduit que sur l'intersection des deux voisinages pointés : $\left|\frac{f(x)}{x} - a\right| < \frac{\epsilon}{2}$ et donc que $f'(a)$ existe et vaut a. (Pour voir cette inégalité, poser $\frac{f(x)}{x} = y$, et voir les valeurs absolues comme une distance ; (1) dit que la distance de y à a est inférieure à la distance de y à $(a+\epsilon)$, donc y est dans $]-\infty\,;\, a + \frac{\epsilon}{2}[$, etc.



2°/ On suppose que f est dérivable ($\lim\limits_{0} (x \mapsto \frac{f(x)}{x}) = a$) .

S'il existe un réel b tel que sur un voisinage pointé V de zéro, on a : $\left|\frac{f(x)}{x} - b\right| \leqslant \left|\frac{f(x)}{x} - a\right|$, par passage à la limite on déduit que $a = b$. Ainsi $g(x) = ax$ est meilleure approximation affine de f en 0.

(*) J. Bacle, R. Barra, J. Borowczyk, D. Gaud, P. Pimienta, J.C. Thiénard.

Note de la rédaction

Cet article présente un point de vue. On peut regretter la façon dont les auteurs parlent de l'autre présentation de la dérivée et l'absence de tout lien entre les choix formels et les problématiques que l'on veut attaquer. De telles prises de position ont pour mérite de souligner la diversité des points de vue possible et d'ouvrir un débat didactique toujours intéressant.