études

géométrie sphérique : géodésiques et loxodromies
(navigation aérienne ou maritime)

par Daniel Lehmann
Université de Lille

I. Introduction

Les géodésiques de la sphère sont les arcs de "grands cercles", c'est-à-dire les arcs des cercles obtenus comme intersection de la sphère avec un plan diamétral (i.e. passant par le centre de la sphère). Leur intérêt, en navigation, est de réaliser le plus court chemin pour aller d'un point à l'autre de la surface terrestre. Leur inconvénient est de couper les méridiens rencontrés sous un angle généralement variable, qui oblige le navigateur voulant suivre une telle géodésique à modifier constamment son cap.

Les courbes qui coupent les méridiens sous un angle (*) constant s'appellent les "*loxodromies*", et sont évidemment plus faciles à suivre par un navigateur qui n'a qu'à maintenir toujours le même cap (abstraction faite des dérives dues aux vents ou aux courants). Seuls, les arcs de cercle portés par un méridien ou par l'équateur sont à la fois géodésiques et loxodromiques. Les cercles parallèles (latitude constante) sont des loxodromies, mais non des géodésiques (exception faite pour l'équateur).

(*) Angle de 2 courbes sécantes : c'est l'angle des tangentes au point d'intersection.

Nous verrons par exemple plus loin que la distance (géodésique) de Paris (Roissy) à New York (Kennedy airport) est de 5 835 km, mais on doit partir vers le Nord Ouest (cap 292° plus exactement, avec les conventions précisées plus loin) et on arrive en naviguant vers le Sud Ouest (cap 233° plus exactement). Par contre, une navigation à cap constant devrait se faire au 261°, avec un kilométrage de 6 077 km, soit 242 km en plus.

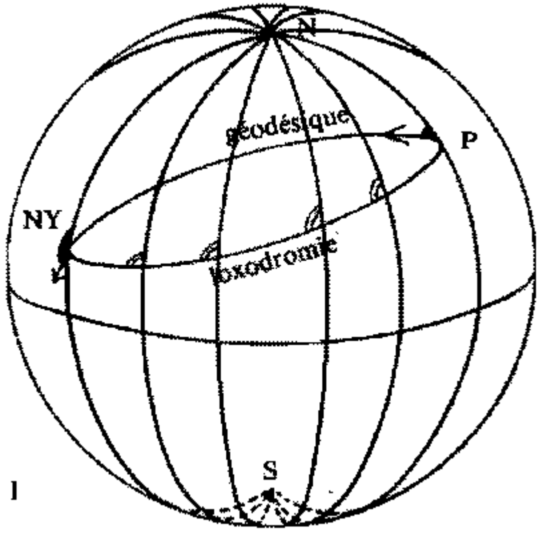

Fig. 1

Une méthode de navigation permettant de concilier les deux impératifs d'économie et de commodité va consister à approcher la géodésique par des tronçons loxodromiques. Plus précisément, on va diviser la géodésique joignant un point M_0 de la terre à un autre M en n parties d'égales longueurs $\widehat{M_0M_1}$, $\widehat{M_1M_2}$, ... $\widehat{M_{n-1}M_n}$ avec $M_n = M$ (n entier $\geqslant 1$), et la navigation se fera le long d'une loxodromie entre 2 points consécutifs M_i et M_{i+1}.

Nous allons voir que l'équation différentielle qui donne les loxodromies est facile à intégrer, et que tous les calculs de géodésiques et de loxodromies se laissent aisément programmer. Nous écrirons explicitement un tel programme pour une TI-58, qui n'est pas loin des limites de capacité de la calculatrice : ayant en effet besoin de 386 pas de programme, nous serons contraints de n'utiliser que 10 mémoires (partition 399-09). Bien entendu, beaucoup de résultats partiels devront être notés au fur et à mesure sur le "journal de navigation", parce qu'ensuite effacés afin que les mémoires puissent être réutilisées. La TI-59, dont la capacité est double, permettrait une rédaction du programme un peu moins acrobatique ou une mise en mémoire des résultats successifs.

II. Notations et conventions

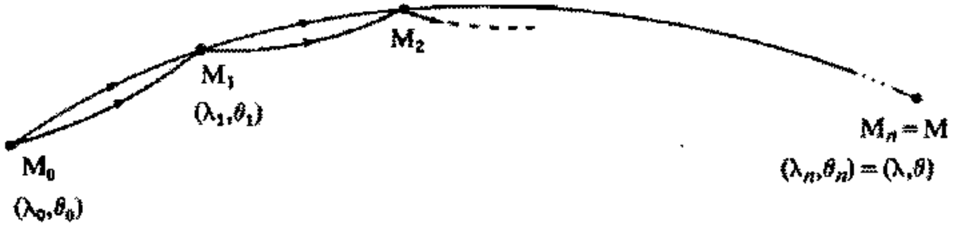

Fig. 2

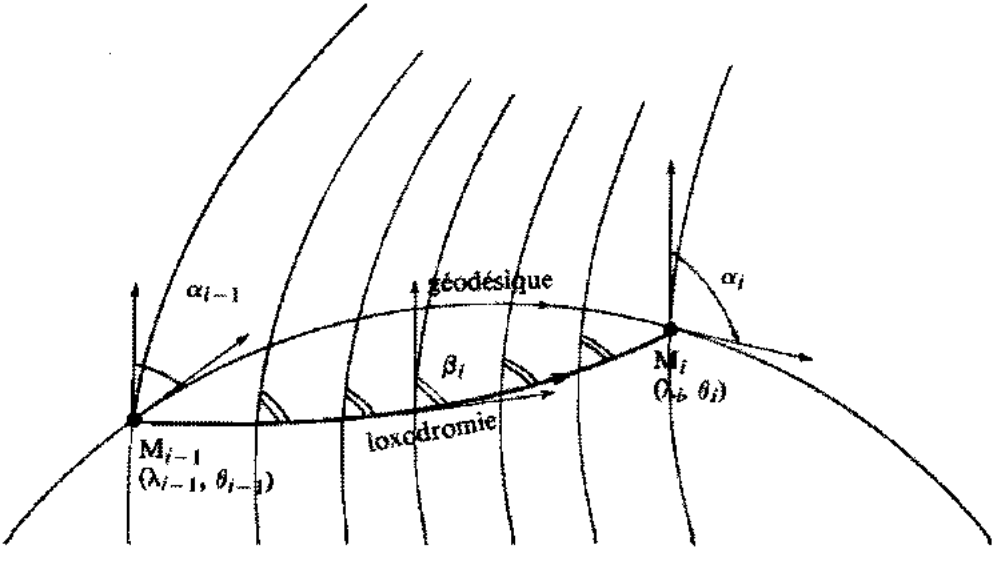

Fig. 3

Utilisons les conventions suivantes :

— les latitudes varient de $-90°$ à $+90°$
(signe + pour les latitudes N
signe − pour les latitudes S),

— les longitudes varient de $-180°$ à $+180°$
(signe + pour les longitudes E
signe − pour les longitudes W),

— les caps varient de 0° (N) à 360° (N)
en passant par 90° (E), 180° (S), 270° (W).

[Il s'agit de caps géographiques (angles avec le méridien), et non magnétiques : les déclinaisons ne sont pas prises en compte.]

Notons
- λ_0 la latitude du point de départ M_0,
- θ_0 la longitude du point de départ M_0,
- λ la latitude du point d'arrivée M,
- θ la longitude du point d'arrivée M.

Soit D la distance géodésique de M_0 à M, n un entier $\geqslant 1$ et M_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) les points qui divisent le segment géodésique $\overset{\frown}{M_0M}$ en n tronçons $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) d'égales longueurs $\frac{D}{n}$.

Notons
- λ_i la latitude de M_i ($\lambda_n = \lambda$),
- θ_i la longitude de M_i ($\theta_n = \theta$),
- β_i le cap loxodromique de M_{i-1} à M_i,
- δ_i la longueur de la loxodromie de M_{i-1} à M_i, ("distance loxodromique" $\delta_i \neq \frac{D}{n}$),
- α_i le cap géodésique en M_i.

On notera encore :

$\Phi \in [0°, 180°]$ l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$.

$\Psi = \frac{1}{n}.\Phi \in [0°, 180°]$ les angles égaux $(\overrightarrow{OM_{i-1}}, \overrightarrow{OM_i})$.

R la longueur (en km) du rayon terrestre ($\pi \times R = 20\,000$ km).

$\vec{\Omega} = \frac{1}{R^2}\,\overrightarrow{OM_0} \wedge \overrightarrow{OM}$ (vecteur normal au plan de la géodésique joignant M_0 à M, O désignant le centre de la terre).

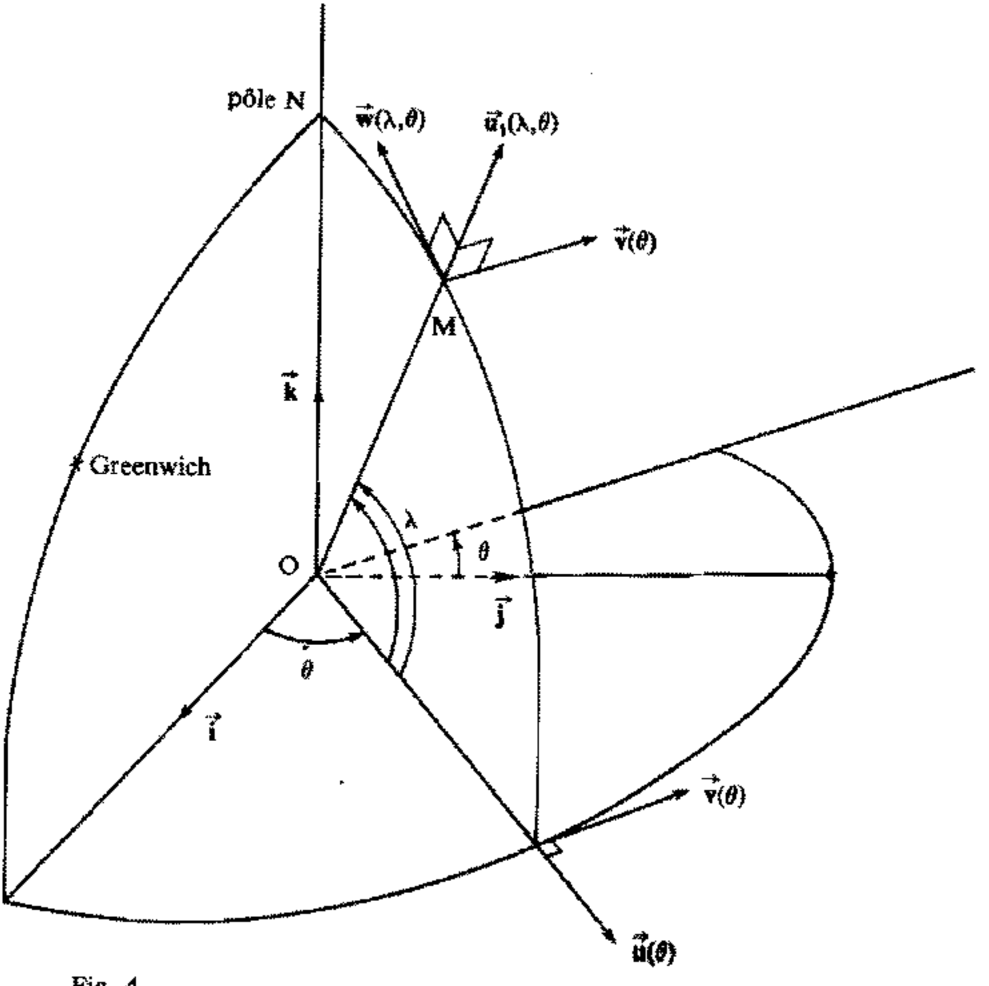

Fig. 4

On notera :

$\vec{i}$ le vecteur unitaire de la demi-droite joignant O au point de latitude 0 sur le méridien de Greenwich,

$\vec{k}$ le vecteur unitaire de la demi droite joignant O au pôle Nord,

$\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}$.

Si M désigne le point de latitude λ et longitude θ, $\overrightarrow{OM} = R\, \vec{u}_1(\lambda,\theta)$ avec :

$$\vec{u}_1(\lambda,\theta) = \cos\lambda\, \vec{u}(\theta) + \sin\lambda\, \vec{k}$$
$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$$

On posera encore :

$$\vec{w}(\lambda,\theta) = \vec{u}_1(\lambda+90°,\theta)$$
$$\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta+90°)$$

III. Formules utilisées et démonstration

1) *Calcul de* Φ, Ψ, D

$$\cos\Phi = <\vec{u}_1(\lambda_0,\theta_0), \vec{u}_1(\lambda,\theta)> \text{ (produit scalaire)}$$
$$= <\cos\lambda_0 \, \vec{u}(\theta_0) + \sin\lambda_0 \, \vec{k}, \cos\lambda \, \vec{u}(\theta) + \sin\lambda \, \vec{k}>$$

$$\boxed{\cos\Phi = \cos\lambda_0 \cos\lambda \cos(\theta-\theta_0) + \sin\lambda_0 \sin\lambda}$$

$\Phi = (\text{Arc cos}(\cos\Phi))_{\text{deg}}$ car $\Phi \in [0, 180°]$

$$\Psi = \frac{1}{n}\Phi$$

$$D_{km} = R_{km} \times \Phi_{rd}$$

$$D_{km} = \frac{1000}{9} \times \Phi_{deg}$$

2) *Calcul de* $\vec{\Omega}$, *et de* α_i

$$\vec{\Omega} = \vec{u}_1(\lambda_0, \theta_0) \wedge \vec{u}_1(\lambda,\theta)$$
$$= (\cos\lambda_0 \, \vec{u}(\theta_0) + \sin\lambda_0 \, \vec{k}) \wedge (\cos\lambda \, \vec{u}(\theta) + \sin\lambda \, \vec{k})$$
$$= \cos\lambda_0 \cos\lambda \sin(\theta-\theta_0)\vec{k} - \sin\lambda \cos\lambda_0 \, \vec{v}(\theta_0) + \sin\lambda_0 \cos\lambda \, \vec{v}(\theta).$$

Remplaçant $\vec{v}(\theta)$ par $-\sin(\theta-\theta_0)\,\vec{u}(\theta_0) + \cos(\theta-\theta_0)\,\vec{v}(\theta_0)$, on obtient :

$$\vec{\Omega} = X\vec{w}(\lambda_0, \theta_0) + Y\vec{v}(\theta_0)$$

avec $\left| \begin{array}{l} X = \cos\lambda \sin(\theta-\theta_0) \\ Y = \sin\lambda_0 \cos\lambda \cos(\theta-\theta_0) - \sin\lambda \cos\lambda_0 \end{array} \right.$

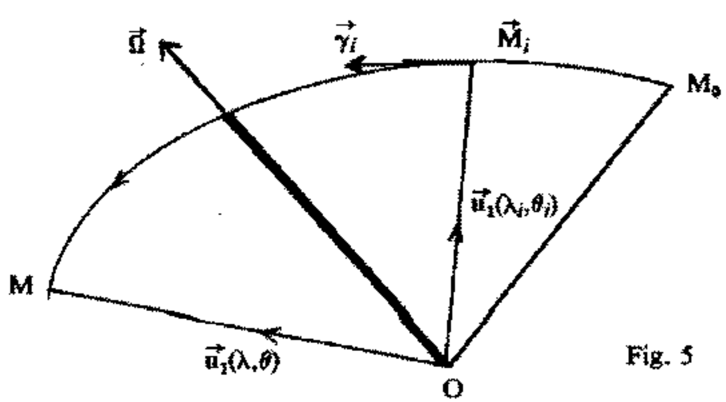

Fig. 5

Bien évidemment, $\vec{\Omega}$ est encore positivement colinéaire à

$$\vec{u}_1(\lambda_i,\theta_i) \wedge \vec{u}_1(\lambda,\theta) = X_i\vec{w}(\lambda_i,\theta_i) + Y_i\vec{v}(\theta_i)$$

avec $\boxed{\begin{array}{l} X_i = \cos\lambda \sin(\theta-\theta_i) \\ Y_i = \sin\lambda_i \cos\lambda \cos(\theta-\theta_i) - \sin\lambda \cos\lambda_i \end{array}}$

(la courbe est orientée de M_0 vers M, et $\vec{\gamma}_i$ est le vecteur unitaire tangent orienté).

Le vecteur unitaire tangent $\vec{\gamma}_i$ en M_i à la géodésique joignant M_0 à M est positivement colinéaire à $\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_1(\lambda_i,\theta_i) = -Y_i\vec{w}(\lambda_i,\theta_i) + X_i\vec{v}(\theta_i)$

d'où $\boxed{\begin{array}{l} \alpha_i = (\vec{w}(\lambda_i,\theta_i), \vec{\gamma}_i) \\ \text{avec la convention } (\vec{w}(\lambda_i,\theta_i), \vec{v}(\theta_i)) = +90° \end{array}}$

(ce qui revient à définir l'orientation du plan tangent à la sphère en M_i).

3) ***Calcul de*** M_i ***à partir de*** M_{i-1}

Soit $\Psi = \dfrac{1}{n}\Phi = (\overrightarrow{OM}_{i-1}, \overrightarrow{OM}_i)$ (angle de vecteurs compris entre 0 et 180°).

On a alors :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(\lambda_i,\theta_i) &= \cos\Psi\, \vec{u}_1(\lambda_{i-1}, \theta_{i-1}) + \sin\Psi\, \vec{\gamma}_{i-1} \\ &= \cos\Psi\, \vec{u}_1(\lambda_{i-1}, \theta_{i-1}) + \\ &\qquad \sin\Psi\,(\cos\alpha_{i-1}\, \vec{w}(\lambda_{i-1},\theta_{i-1}) + \sin\alpha_{i-1}\, \vec{v}(\theta_{i-1})) \\ &= K_{i-1}\, \vec{u}(\theta_{i-1}) + L_{i-1}\, \vec{v}(\theta_{i-1}) + z_i\vec{k} \end{aligned}$$

avec $\boxed{\begin{array}{l} K_{i-1} = \cos\Psi \cos\lambda_{i-1} - \sin\Psi \cos\alpha_{i-1} \sin\lambda_{i-1} \\ L_{i-1} = \sin\Psi \sin\alpha_{i-1} \\ z_i = \cos\Psi \sin\lambda_{i-1} + \sin\Psi \cos\alpha_{i-1} \cos\lambda_{i-1} \end{array}}$

soit $\vec{u}_1(\lambda_i,\theta_i) = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$

avec $\boxed{\begin{array}{l} x_i = K_{i-1} \cos\theta_{i-1} - L_{i-1} \sin\theta_{i-1} \\ y_i = K_{i-1} \sin\theta_{i-1} + L_{i-1} \cos\theta_{i-1} \end{array}}$

d'où $\boxed{\lambda_i = (\text{Arc sin } z_i)_{\deg} \in [-90°, +90°]}$

et $\boxed{\begin{array}{l} \theta_i = \varepsilon.\,(\text{Arc cos } \dfrac{x_i}{\cos\lambda_i})_{\deg} \in [-180°, +180°] \\ \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \text{ selon le signe de } y_i \end{array}}$

4) ***Calcul de β_i et δ_i***

Soit $t \longmapsto \mathrm{Ru}_1(\lambda(t), \theta(t))$ une courbe différentiable sur la sphère terrestre : $\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\,\vec{w} + \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\lambda\,\vec{v}$ fait, avec $\vec{w}$, un angle $\beta(t)$ tel que

$$\operatorname{tg}\beta(t) = \cos\lambda \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{si } \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

$$\operatorname{cotg}\beta(t) = 0, \qquad \text{si } \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = 0.$$

$$\left(\begin{array}{lll} \beta(t) \in \,]0, 180°[& \text{si } \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} > 0 & \\ \qquad \in \,]180°, 360°[& \text{si } \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} < 0 & \\ \beta(t) = \;\; 0 & \text{si } \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ et } & \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} > 0 \\ \qquad = \;\; 180° & \text{si } \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ et } & \dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} < 0 \end{array}\right)$$

Les loxodromies de cap constant β sont donc les solutions de l'équation différentielle $\mathrm{d}\theta = \operatorname{tg}\beta\,\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\cos\lambda}$ (en dehors des pôles) si $\operatorname{cotg}\beta \neq 0$ ($\mathrm{d}\lambda = 0$ si $\operatorname{cotg}\beta = 0$), d'où, par intégration, la loxodromie de cap constant β_i passant par M_{i-1} :

$$\left|\begin{array}{ll} (\theta - \theta_{i-1})_{rd} = \operatorname{tg}\beta_i \times \operatorname{Log}\left[\dfrac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda} \times \dfrac{\cos\lambda_{i-1}}{1+\sin\lambda_{i-1}}\right] & \text{si } \operatorname{cotg}\beta_i \neq 0 \\ \lambda = \lambda_{i-1} \qquad \text{si } \operatorname{cotg}\beta_i = 0. & \text{(cercle parallèle de latitude constante)} \end{array}\right.$$

On en déduit, pour que cette loxodromie passe par $M_i(\lambda_i, \theta_i)$, le calcul de β_i :

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\beta_i = (\theta_i - \theta_{i-1})_{\deg} \times \dfrac{\pi}{180} \times \left[\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+\sin\lambda_i}{1+\sin\lambda_{i-1}} \times \dfrac{\cos\lambda_{i-1}}{\cos\lambda_i}\right)\right]^{-1} \\ \text{si } \lambda_i \neq \lambda_{i-1} \\ \operatorname{cotg}\beta_i = 0, \qquad \text{si } \lambda_i = \lambda_{i-1} \end{array}}$$

avec en outre

$$\boxed{\begin{array}{ll} \beta_i \in \,]0, 180°[& \text{si } \theta_i > \theta_{i-1}, \\ \quad \in \,]180°, 360°[& \text{si } \theta_i < \theta_{i-1}, \\ \beta_i = 0° & \text{si } \theta_i = \theta_{i-1}, \lambda_i > \lambda_{i-1}, \\ \quad = 180° & \text{si } \theta_i = \theta_{i-1}, \lambda_i < \lambda_{i-1}. \end{array}}$$

Le vecteur vitesse à la courbe $t \longmapsto R\,\vec{u}_1\,(\lambda(t), \theta(t))$ a une norme égale à $R\,\sqrt{\lambda'^2 + \cos^2\lambda\ \theta'^2}$.

Pour une loxodromie de cap constant β_i,

$$\theta' \cos\lambda = \mathrm{tg}\beta_i\,\lambda', \text{ si } \cos\beta_i \neq 0 \quad (\lambda' = 0 \text{ si } \cos\beta_i = 0),$$

la norme du vecteur vitesse est égale à

$$R\left|\frac{\lambda'}{\cos\beta_i}\right| \text{ si } \cos\beta_i \neq 0 \qquad (R\,|\cos\lambda|\,.\,|\theta'| \text{ si } \cos\beta_i = 0).$$

On en déduit

$$\boxed{\begin{aligned}(\delta_i)_{\mathrm{km}} &= \frac{1000}{9} \times \left|\frac{(\lambda_i - \lambda_{i-1})_{\deg}}{\cos\beta_i}\right| \quad \text{si } \cos\beta_i \neq 0\,,\\ &= \frac{1000}{9} \times |\cos\lambda_i \times (\theta_i - \theta_{i-1})_{\deg}| \quad \text{si } \cos\beta_i = 0\,.\end{aligned}}$$

IV - Rédaction du programme pour TI-58 ou TI-59

Utiliser la partition 399-09 pour la TI-58 ou toute partition de 399-79 à 879-09 pour la TI-59.

000	76	LBL	introduction des données *(SBR A)*
001	11	A	
002	22	INV	$\leftarrow \lambda_0$
003	58	FIX	
004	88	DMS	
005	42	STO	
006	00	00	$\lambda_0 \in R_0$
007	91	R/S	$\leftarrow \theta_0$
008	88	DMS	
009	42	STO	
010	01	01	$\theta_0 \in R_1$
011	91	R/S	$\leftarrow \lambda$
012	88	DMS	
013	42	STO	
014	02	02	$\lambda \in R_2$
015	91	R/S	$\leftarrow \theta$
016	88	DMS	
017	42	STO	$\theta \in R_3$
018	03	03	
019	75	-	
020	43	RCL	
021	01	01	
022	95	=	
023	42	STO	
024	05	05	$\theta - \theta_0 \in R_5$
025	92	RTN	
026	76	LBL	Calculs de D, Φ et Ψ *(SBR B)*
027	12	B	
028	43	RCL	
029	05	05	
030	39	COS	
031	65	×	
032	43	RCL	
033	02	02	
034	39	COS	
035	65	×	
036	43	RCL	
037	00	00	
038	39	COS	
039	85	+	
040	43	RCL	
041	02	02	
042	38	SIN	
043	65	×	
044	43	RCL	
045	00	00	
046	38	SIN	
047	95	=	$\cos\Phi$
048	22	INV	
049	39	COS	

050	42	STO	
051	04	04	$\Phi \in R_4$
052	65	×	
053	53	(	
054	01	1	
055	00	0	
056	00	0	
057	00	0	
058	55	÷	
059	09	9	
060	54	)	
061	42	STO	
062	09	09	$1000/9 \in R_9$
063	95	=	
064	58	FIX	
065	00	00	
066	91	R/S	→ D *affiché*
067	35	1/X	← *n introduit*
068	65	×	
069	43	RCL	
070	04	04	
071	95	=	
072	42	STO	
073	04	04	$\Psi \in R_4$
074	92	RTN	
075	76	LBL	**Calculs de α_{i-1}**
076	13	C	**λ_i, y_i, β_i, δ_i**
077	43	RCL	**à partir de λ_{i-1}, θ_{i-1}**
078	03	03	**Ψ, λ, θ**
079	75	-	**(SBR C)**
080	43	RCL	
081	01	01	
082	95	=	
083	42	STO	
084	05	05	$\theta - \theta_{i-1} \in R_5$
085	38	SIN	
086	65	×	
087	43	RCL	
088	02	02	
089	39	COS	
090	95	=	X_{i-1}
091	32	X⇄T	
092	43	RCL	
093	02	02	
094	38	SIN	
095	65	×	
096	43	RCL	
097	00	00	
098	39	COS	
099	75	-	
100	43	RCL	
101	02	02	
102	39	COS	
103	65	×	
104	43	RCL	
105	00	00	
106	38	SIN	
107	65	×	
108	43	RCL	
109	05	05	
110	39	COS	
111	95	=	Y_{i-1}
112	32	X⇄T	
113	22	INV	
114	37	P/R	
115	42	STO	
116	06	06	$\alpha_{i-1} \in R_6$
117	32	X⇄T	
118	00	0	**ajoute**
119	77	GE	**360°**
120	45	Y^X	**si valeur**
121	32	X⇄T	**négative**
122	58	FIX	**(SBR y^x)**
123	00	00	
124	91	R/S	→ α_{i-1} *affiché*
125	39	COS	
126	65	×	
127	43	RCL	
128	00	00	
129	39	COS	
130	65	×	
131	43	RCL	
132	04	04	
133	38	SIN	
134	85	+	
135	43	RCL	
136	00	00	
137	38	SIN	
138	65	×	
139	43	RCL	
140	04	04	
141	39	COS	
142	95	=	Z_i
143	22	INV	
144	38	SIN	
145	42	STO	
146	08	08	$\lambda_i \in R_8$
147	58	FIX	

148	02	02	
149	22	INV	
150	88	DMS	
151	91	R/S	→ λ_i *affiché*
152	43	RCL	
153	04	04	
154	39	COS	
155	65	×	
156	43	RCL	
157	00	00	
158	39	COS	
159	75	−	
160	43	RCL	
161	04	04	
162	38	SIN	
163	65	×	
164	43	RCL	
165	00	00	
166	38	SIN	
167	65	×	
168	43	RCL	
169	06	06	
170	39	COS	
171	95	=	
172	48	EXC	K_{i-1} *remplace*
173	06	06	α_{i-1} *dans* R_6
174	38	SIN	
175	65	×	
176	43	RCL	
177	04	04	
178	38	SIN	
179	95	=	
180	42	STO	
181	07	07	$L_{i-1} \in R_7$
182	65	×	
183	43	RCL	
184	01	01	
185	39	COS	
186	85	+	
187	43	RCL	
188	06	06	
189	65	×	
190	43	RCL	
191	01	01	
192	38	SIN	
193	95	=	
194	48	EXC	y_i *remplace*
195	06	06	K_{i-1} *dans* R_6
196	65	×	

197	43	RCL	
198	01	01	
199	39	COS	
200	75	−	
201	43	RCL	
202	07	07	
203	65	×	
204	43	RCL	
205	01	01	
206	38	SIN	
207	95	=	x_i
208	55	÷	
209	43	RCL	
210	08	08	
211	39	COS	
212	95	=	
213	22	INV	
214	39	COS	
215	65	×	
216	43	RCL	
217	06	06	
218	69	OP	
219	10	10	
220	95	=	
221	48	EXC	θ_i *remplace*
222	01	01	θ_{i-1} *dans* R_1
223	75	−	
224	43	RCL	
225	01	01	
226	95	=	
227	42	STO	$\theta_{i-1} - \theta_i$ *remplace*
228	05	05	$\theta - \theta_{i-1}$ *dans* R_5
229	43	RCL	
230	01	01	
231	22	INV	
232	88	DMS	
233	91	R/S	→ θ_i *affiché*
234	43	RCL	
235	08	08	
236	75	−	
237	43	RCL	
238	00	00	
239	95	=	
240	42	STO	$\lambda_i - \lambda_{i-1}$ *remplace*
241	06	06	y_i *dans* R_6
242	32	X⇌T	
243	00	0	*programme*
244	67	EQ	*particulier*
245	24	CE	*si* $\lambda_i = \lambda_{i-1}$
			(SBR CE)

246	53	(	
247	53	(	
248	43	RCL	
249	08	08	
250	38	SIN	
251	85	+	
252	01	1	
253	54	)	
254	55	÷	
255	53	(	
256	43	RCL	
257	00	00	
258	38	SIN	
259	85	+	
260	01	1	
261	54	)	
262	65	×	
263	43	RCL	
264	00	00	
265	39	COS	
266	55	÷	
267	43	RCL	
268	08	08	
269	39	COS	
270	54	)	
271	23	LNX	
272	35	1/X	
273	65	×	
274	43	RCL	
275	05	05	
276	94	+/-	
277	65	×	
278	89	π	
279	55	÷	
280	01	1	
281	08	8	
282	00	0	
283	95	=	
284	22	INV	
285	30	TAN	
286	42	STO	*Arctg(tgβ_i)*
287	00	00	*remplace λ_0*
288	00	0	*ajoute 180°*
289	77	GE	*si $\lambda_{i-1} > \lambda_i$*
290	33	X²	*(SRB x^2)*
291	43	RCL	
292	00	00	

293	32	X⇌T	*ajoute*
294	00	0	*360° si*
295	77	GE	*valeur < 0*
296	34	√X	*(SRB $\sqrt{x}$)*
297	32	X⇌T	
298	58	FIX	
299	00	00	
300	91	R/S	→ *β_i affiché*
301	39	COS	
302	35	1/X	
303	65	×	
304	43	RCL	
305	09	09	
306	65	×	
307	43	RCL	
308	06	06	
309	95	=	
310	50	|X|	
311	58	FIX	
312	01	01	
313	91	R/S	→ *δ_i affiché*
314	43	RCL	
315	08	08	
316	42	STO	*λ_i remplace*
317	00	00	*λ_{i-1} dans R_1*
318	61	GTO	*calcul du tronçon*
319	13	C	*suivant (M_i, M_{i+1}) :*
320	76	LBL	*retour à C*
321	33	X²	*ajoute 180° à*
322	43	RCL	*(Arctg tgβ_i)$_{deg}$*
323	00	00	*si $\lambda_{i-1} > \lambda_i$*
324	85	+	*(SBR x^2)*
325	01	1	
326	08	8	
327	00	0	
328	95	=	
329	61	GTO	
330	02	02	*retour au*
331	98	98	*pas 298*
332	76	LBL	
333	34	√X	*ajoute 360° à*
334	32	X⇌T	*β_i*
335	85	+	*si valeur*
336	03	3	*trouvée < 0*
337	06	6	*(SBR $\sqrt{x}$)*
338	00	0	
339	95	=	
340	61	GTO	

341	02	02	*retour au pas 298*
342	98	98	
343	76	LBL	
344	45	Y^x	*ajoute 360° à λ_{i-1} si trouvée < 0*
345	32	X⇌T	
346	85	+	
347	03	3	*(SBR y^x)*
348	06	6	
349	00	0	
350	95	=	
351	61	GTO	
352	01	01	
353	22	22	*retour au pas 122*
354	76	LBL	
355	24	CE	
356	43	RCL	*(SBR CE)*
357	05	05	*affiche 90° si $\theta_i > \theta_{i-1}$*
358	32	X⇌T	
359	00	0	
360	77	GE	
361	29	CP	
362	02	2	
363	07	7	

364	00	0	*pas n° 365 : β_i affiché quand égal à 90° ou 270°*
365	91	R/S	
366	43	RCL	
367	09	09	
368	65	×	
369	43	RCL	
370	05	05	
371	65	×	
372	43	RCL	
373	08	08	
374	39	COS	
375	95	=	
376	61	GTO	*retour au pas 310*
377	03	03	
378	10	10	
379	76	LBL	*afficher 90° si $\theta_i > \theta_{i-1}$*
380	29	CP	
381	09	9	*(SBR CP)*
382	00	0	
383	61	GTO	
384	03	03	
385	65	65	

V - Utilisation du programme

— Latitudes et longitudes sont écrites en degrés et minutes sous la forme ddd.mm (signe + pour latitudes N et longitudes E ; signe − pour latitudes S et longitudes W).
— Les distances sont écrites en km.
— Les caps sont donnés de 0° à 360°.

1) *Entrée des données de* M_0 *et* M

Afficher	λ_0 ; presser A	
	θ_0	R/S
	λ	R/S
	θ	R/S

2) *Calcul de* D *et entrée de* n

Presser	B − D	affiché en km
Entrer	n	presser R/S

- 3) *Calcul de la navigation*

Presser successivement

C	→ affichage de	α_0
R/S	"	λ_1
R/S	"	θ_1
R/S	"	β_1
R/S	"	δ_1
R/S	"	α_1
R/S	"	α_{i-1}
R/S	"	λ_i
R/S	"	θ_i
R/S	"	β_i
R/S	"	δ_i
R/S	"	α_i
R/S	"	δ_n

VI - Exemples

1) De Paris Roissy $\begin{pmatrix} 49°02'\text{N} \\ 2°35'\text{E} \end{pmatrix}$ à New York JFK $\begin{pmatrix} 40°38'\text{N} \\ 73°50'\text{W} \end{pmatrix}$ avec $n = 5$

$$D = 5835_{\text{km}} \qquad \sum_{i=1}^{5} \delta_i = 5845_{\text{km}} \qquad D/n = 1166{,}9_{\text{km}}$$

	α_i	λ_i	θ_i	β_i	δ_i
M_0 (Paris)	292°	49°02′	+2°35′	286°	1169,2 km
M_1	279°	51°51′	−13°20′	273°	1169,7
M_2	266°	52°19′	−30°27′	259°	1169,4
M_3	253°	50°21′	−47°00′	247°	1168,7
M_4	242°	46°16′	−61°36′	238°	1168,0
M_5 (New York)		40°38′	−73°50′		

2) Même trajet Paris-New York avec $n = 1$

	α_i	λ_i	θ_i	β_i	distance loxodromique	distance géodésique D
Paris Roissy	292°	49°02′	2°35′	261°	6077 km	5835 km
New York JFK		40°38′	−73°50′			

3) Autres exemples avec $n = 1$

	α_i	λ_i	θ_i	β_i	distance loxodromique δ_i	distance géodésique D
Calais Mark Marseille Marignane	162°	50°58′ 43°26′	1°57′ 5°12′	164°	872,1 km	872,0 km
Brest Guipavas Strasbourg Entzheim	85°	48°26′ 48°32′	−4°25′ +7°38′	89°	887,5 km	886,6 km

Remarque : sur le trajet presque N.S., loxodromie et géodésique sont plus proches l'une de l'autre que sur le trajet W.E. à la latitude non négligeable de la France.