échanges

composantes de l'activité mathématique qui devraient jouer un rôle significatif dans la mathématique pour tous

par Anna Zofia Krygowska,
Cracovie, Pologne

Ce texte a fait l'objet d'une communication au symposium organisé par l'I.C.M.I. (International Commission on Mathematics Instruction) à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens qui a eu lieu à Varsovie du 16 au 24 août 1983.

Le thème initialement proposé "MATHÉMATIQUES POUR TOUS" devait être précisé par la question : "Quels devraient être les buts et les objectifs d'un enseignement général de mathématiques ?".

La discussion concernant l'éducation mathématique pour tous ne peut pas ignorer les fins et les objectifs de cette éducation. On peut discerner trois niveaux de tels objectifs.

Le premier concerne les *connaissances* et le *savoir-faire* de base dans le domaine mathématique jugés nécessaires pour tous. Ces éléments sont généralement définis par le contenu du programme scolaire, souvent sous forme d'objectifs plus ou moins opérationnalisés [*par exemple, savoir formuler le théorème de Pythagore, l'interpréter et l'appliquer dans les situations standards, savoir définir la fonction linéaire, connaître ses propriétés de base, son graphique cartésien, savoir appliquer ses connaissances dans la résolution des problèmes typiques, etc.*]. On observe dans ce domaine une grande diversité de conception allant du minimalisme radical aux programmes riches, voire surchargés.

Le second niveau concerne les *comportements* spécifiques à *l'activité mathématique* et les *attitudes* relatives à certains éléments de la méthodologie mathématique [*par exemple, attitude active dans la résolution des problèmes, disposition à percevoir et formuler des problèmes mathématiques dans une situation familière mais ouverte, savoir se servir de certaines stratégies simples dans leur résolution, représentation spatiale d'objets géométriques, une certaine compréhension du sens de la démonstration et comportement actif dans sa recherche dans des situations assez familières à l'élève, une certaine compréhension du sens de la définition et comportement actif aussi bien dans la recherche d'une définition décrivant a posteriori le concept intuitivement saisi, que dans la recherche et l'appropriation d'un concept par l'interprétation de sa définition donnée a priori, etc.*].

Ces attitudes et ces comportements spécifiques à l'activité mathématique devraient se développer successivement au cours de l'apprentissage des contenus définis par le programme. Evidemment, les attitudes et les comportements intellectuels spécifiques ne peuvent être développés chez l'élève qu'au cours de l'activité spécifique. Le contenu du programme devrait donc assurer les conditions favorables à une telle activité à chaque niveau de l'enseignement.

Le troisième niveau des objectifs concerne les *attitudes* et les *comportements intellectuels*, fonctionnant en dehors de l'activité mathématique et développés par le transfert et l'accommodation des attitudes et des comportements spécifiques à d'autres domaines de l'activité intellectuelle. Dans cette perspective, on peut considérer qu'un des rôles de l'apprentissage mathématique dans l'éducation est d'intellectualiser les attitudes et les comportements de larges couches de la société par le contact actif des jeunes, à l'étape scolaire, avec les éléments d'une science fondamentale pour la culture humaine.

En réalité, le plus souvent, les programmes sont écrits sans une réflexion approfondie sur le deuxième et le troisième niveau des objectifs. En particulier, nous savons très peu sur le transfert dont je viens de parler ; de plus, nous ne connaissons pas encore de moyens méthodologiques qui nous permettraient de faire des recherches sérieuses sur les mécanismes d'un tel transfert chez les élèves moyens ou plus faibles. Certaines de nos études prouvent que pour un nombre d'élèves non négligeable du point de vue social, l'apprentissage des mathématiques non seulement ne développe pas des attitudes et des comportements du deuxième niveau, mais qu'il fixe ce que nous appelons le *formalisme dévié* qui se caractérise par l'absence dans la pensée de l'élève du sens sémantique des termes et des symboles utilisés et par le chaos dans l'application des règles syntactiques. Nos observations prouvent que la conviction selon laquelle les objectifs de deuxième et de troisième niveaux se réalisent presque automatiquement au cours de l'apprentissage des connaissances et du savoir-faire de base définis par le programme, est fausse. L'élève qui cite correctement le théorème de Pythagore, en présente la démonstration, et sait même appliquer ce théorème dans certaines situations typiques, révèle trop souvent, dans une situation un peu chargée, une grande perplexité. Sa pensée s'ouvre immédiatement aux non-sens les plus surprenants et incompréhensibles pour ceux qui n'ont pas eu l'occasion d'analyser plus profondément le phénomène du formalisme dévié.

Une des causes essentielles de ce phénomène semble être, entre autres, l'apprentissage basé avant tout sur la réception du contenu dans la forme de la mathématique toute faite. Dans la réalité scolaire, on accepte — même en silence — cet état de chose comme normal et inévitable, en considérant que l'activité mathématique n'est accessible qu'aux élèves doués et qui s'intéressent, par eux-mêmes, aux mathématiques, et qu'elle reste inaccessible à la plupart des élèves moyens ou faibles. Selon cette opinion assez répandue, bien qu'on introduise dans les programmes scolaires destinés à tous les élèves la mathématique comme sujet obligatoire, il faut s'incliner devant ce fait et fonder son apprentissage, chez les élèves dits faibles, sur leur mémoire et sur certains automatismes exercés au cours d'exercices semblables, répétés un grand nombre de fois. Ceci est la réalité scolaire en dépit des tendances de la pédagogie contemporaine.

Cet état de chose est dû, entre autres, à certains malentendus se rapportant à la conception même de l'activité mathématique au niveau scolaire, peut-être même à l'absence d'une telle conception.

Il est vrai que l'acte créateur de la pensée mathématique reste encore un sujet d'étude passionnant pour les philosophes, les épistémologistes, les psychologues et les mathématiciens eux-mêmes, sujet ayant un noyau inconnu, qui se prête à une analyse plus précise, à une description détaillée, à une modélisation. Mais la pensée mathématique en acte ne se réduit pas à ce noyau inaccessible à une telle analyse. Comme le reconnaissent les mathématiciens créateurs eux-mêmes, cet acte de l'illumination est précédé et suivi normalement par un grand travail, organisé consciemment, composé de démarches diverses qui jouent un rôle essentiel dans la recherche mathématique, et qui caractérisent l'activité intellectuelle en général. Ce qui décide de la spécificité de ces démarches en mathématique, c'est avant tout l'objet qu'on crée, qu'on découvre, l'objet sur lequel la pensée mathématique agit.

Au cours d'une discussion, Marshall Stone a fait la remarque suivante : l'illumination dans la pensée mathématique semble consister dans l'organisation rapide, totale, de beaucoup d'éléments élaborés précédemment. Nous ne savons rien sur les mécanismes de cette organisation, mais ce qui la précède et ce qui la suit cependant est plus accessible à une analyse peu précise et partielle. Cette analyse nous permet de discerner certaines composantes de cette activité qui jouent un rôle particulier. Mais la structure d'ensemble de ces démarches et composantes ne peut pas être présentée sous la forme d'un arbre. C'est plutôt une forêt vierge où les branches des arbres particuliers sont mutuellement entrelacées. Chaque essai pour discerner les composantes de base de l'activité mathématique, même dans les parties les plus accessibles à une telle analyse, conduit évidemment à une simplification brutale de la réalité. Mais pour la didactique de la mathématique, un tel essai, même avec ces risques, est absolument nécessaire.

De ce point de vue, il faudrait donc concentrer l'attention sur les composantes :

1° - les étudier et analyser leur fonctionnement dans la recherche mathématique,

2° - chercher les moyens de les provoquer et les développer à divers niveaux de l'enseignement,

3° - étudier quelles sont les conditions, favorables ou non, à un tel développement, ces conditions concernant aussi bien le contenu et la structure du programme que l'activité didactique du maître.

Il faut de cette façon démythifier la conception même de l'activité mathématique, quand on pense à l'activité d'un enfant débutant à l'école ou à l'élève de l'enseignement secondaire. Il s'agit, ici aussi, de démarches intellectuelles ayant une importance générale, mais spécifiques, car elles agissent sur les objets spécifiques tels que nombres, figures géométriques, fonctions, relations, structures diverses, etc.

Je me bornerai à signaler quelques exemples de telles activités, c'est-à-dire des exemples des composantes de l'activité mathématique qui me semblent

1° - particulièrement importantes dans l'enseignement,

2° - susceptibles d'être provoquées et développées dans les formes appropriées au niveau scolaire dans l'apprentissage de la mathématique pour tous.

Ces composantes ne fonctionnent évidemment pas isolément, et elles ne doivent pas être considérées comme disjointes.

Percevoir et exploiter les analogies

Stefan Banach soulignait souvent que la perception et l'utilisation des analogies est le mécanisme essentiel de la création mathématique. Le mathématicien se sert des analogies à divers niveaux et de manière diverse, aussi bien quand il s'agit d'une idée intuitive et encore vague, que lors d'une activité spécifique au niveau formel, comme par exemple l'identification des structures à la base des isomorphismes. Il est vrai que l'analogie joue toujours un certain rôle dans l'apprentissage de la mathématique au niveau scolaire, car, sans appel à des analogies différentes, un tel apprentissage serait impossible. Mais si on comprend le terme "analogie" au sens large souligné par Banach, on voit facilement comment ce rôle est encore pauvre dans la réalité scolaire et quelles sont les possibilités de l'éducation intellectuelle pour les élèves les plus faibles, si on sait exploiter les analogies d'une manière pédagogiquement et mathématiquement raisonnable. En allant des analogies simples — à la base de la formation des notions fondamentales — jusqu'à des analogies de procédés — à la base de la prise de conscience des méthodes — à chaque pas, au cours de chaque élément de contenu, on peut orienter diverses activités des élèves vers la perception de l'analogie spécifique à la situation, vers le transport des propriétés d'une situation à l'autre perçue comme analogique, vers les généralisations, vers les hypothèses, vers la perception de problèmes nouveaux, etc. L'élève qui propose spontanément l'hypothèse concernant les formules du volume et de l'aire de la boule, en prolongeant les formules correspondantes pour le disque, compose dans un cas une formule juste [l'aire de la surface], dans l'autre une formule fausse [le volume de la boule], mais il est évidemment mathématiquement actif. Mathématiquement actif est aussi l'élève qui cherche ce qui change et ce qui ne change pas dans une transformation. Il est déjà très proche de la perception de l'analogie structurelle. La perception de l'analogie joue un rôle essentiel dans la prise de conscience de la récurrence par un enfant débutant à l'école, dans le passage de la géométrie plane à la géométrie de l'espace, etc. Il ne s'agit évidemment pas des analogies révélées par le maître, mais de l'organisation de situations appropriées, qui provoquent l'activité de percevoir et d'utiliser les analogies par les élèves eux-mêmes.

Schématiser

Hans Freudenthal traite cette activité comme particulièrement digne aujourd'hui d'une étude didactique approfondie. De telles études sont encore assez peu nombreuses en comparaison, par exemple, des travaux didactiques consacrés à l'initiation des élèves à la déduction, à la démonstration, aux méthodes de résolution des problèmes, etc. Ces lacunes sont dues avant tout aux difficultés concernant l'observation des démarches intellectuelles orientées vers la schématisation, en particulier vers la schématisation généralisant un courant essentiel de la mathématisation. Selon Hans Freudenthal, mathématiser c'est ordonner une réalité en utilisant des moyens mathématiques. Dans ce sens, on mathématisait pendant des siècles et on mathématise toujours la mathématique elle-même. Un des mécanismes de ce processus, c'est la schématisation.

Dans la pratique scolaire, on se sert des divers schémas relativement à leur forme, leur fonction, leur portée. Le processus de la schématisation est provoqué souvent au cours de la préparation des sehémas matériels [par exemple, dessin ou modèle physique d'une situation géométrique, graphe, diagramme, organigramme, etc.]. Ces activités manuelles ainsi que la préparation des projets de la construction des objets en jeu sont basées sur l'activité intellectuelle de la schématisation, orientée vers l'isolement d'une structure particulière dans la richesse des différentes structures de la situation. Nous avons souligné l'importance de la perception de l'analogie. L'activité de la schématisation est, non seulement, la prise de conscience de l'analogie structurelle, mais aussi la construction d'un objet structurellement analogue à un autre objet, plus simple d'un certain point de vue, plus abstrait d'un autre.

Le schéma assure le sens d'une telle représentation grâce au code approprié, ou admis généralement, ou admis seulement à cette occasion. De cette façon, l'activité de schématiser est étroitement liée à l'activité de coder.

La *polyvalence* est la propriété constitutive du concept même de schéma. Mais l'élève construit souvent son schéma matériel sans avoir conscience de cette polyvalence. Le schéma devient polyvalent quand l'élève se rend compte des variables et de leur signification. Ainsi, par exemple, un diagramme construit ad hoc au cours de la résolution d'un problème particulier peut se transformer dans la pensée de l'élève en schéma polyvalent d'un algorithme. Cette prise de conscience des variables caractérise la schématisation orientée, dès l'origine, vers la généralisation.

Est-ce que la construction du schéma matériel ordonne une certaine réalité en utilisant des moyens mathématiques? Evidemment oui. Ces moyens fonctionnent dans la pensée de l'élève qui trouve, dans la réalité matérielle, un support pour cette pensée.

La schématisation, comme composante fondamentale de l'activité mathématique, ne se limite pas à ces procédés. Si l'apprentissage est mathématiquement et pédagogiquement organisé par le programme d'une part et par le maître d'autre part, la plupart des généralisations reposent sur la schématisation, faite par l'élève lui-même, exprimée aussi bien par un schéma matériel, que verbalement ou symboliquement par une définition, un théorème, un algorithme, etc.

Définir, interpréter la définition donnée a priori, utiliser rationnellement les définitions

La construction d'une *définition* d'un concept déjà entrevu intuitivement est une activité très riche en démarches intellectuelles, particulièrement digne des études didactiques. Formellement, la définition est une convention, formulée selon certaines règles syntactiques, qui permet de remplacer dans un système une écriture par une autre. Mais ce n'est pas le point de vue formel qui nous intéresse avant tout, quand nous étudions l'activité mathématique liée à la construction, l'interprétation et l'utilisation d'une définition, en particulier quand nous pensons à ces activités au niveau scolaire. Ce qui nous intéresse avant tout ici c'est le rôle sémantique d'une définition. De ce point de vue, la définition, aussi bien en mathématiques que dans les autres domaines, fixe et transmet la signification d'un terme nouveau ou d'une expression contenant de tels termes.

La définition n'est pas la seule forme de la transmission de la signification. On peut la faire dans le langage démonstratif [j'utilise ici l'expression introduite par Hans Freudenthal], comme par exemple par la présentation d'un objet désigné par le terme en jeu, ou de plusieurs tels objets, ou par la présentation d'un modèle matériel du concept défini, etc. On peut transmettre la signification par le langage relationnel [toujours selon l'expression de Hans Freudenthal], par exemple en utilisant les analogies. La définition qui vise aussi, du point de vue sémantique, la transmission de la signification, fonctionne néanmoins dans un système, dans un univers du langage limité et est soumise à certaines règles formelles du point de vue syntactique.

On donne la définition d'un objet, d'une relation, d'une structure, dont l'idée a été saisie précédemment. Mais il arrive qu'au cours de l'activité de définir, cette idée se précise, passe par certaines rectifications, devienne de plus en plus claire. La construction d'une définition n'est donc pas seulement le compte rendu de ce qu'on a saisi précédemment, ni seulement un projet concernant le nom de l'objet défini, mais c'est aussi une activité pénétrant profondément la nature de cet objet.

La signification du terme défini dépasse largement ce que présente la définition. Définir c'est faire un choix parmi les propriétés constitutives d'un objet. C'est le choix des conditions nécessaires et suffisantes dans le système donné pour désigner l'objet par le terme défini.

Ces remarques sont évidemment banales. Je me permets néanmoins de les faire, car je voudrais souligner la richesse des démarches intellectuelles qui peuvent être provoquées chez les élèves et qui sont le plus souvent négligées dans la pratique scolaire, car traditionnellement les définitions sont imposées par le maître.

Nous avons néanmoins dégagé les étapes caractéristiques du processus de définition à divers niveaux de l'école.

1° - prise de conscience d'une notion au cours d'une recherche en classe [par exemple, recherche de la solution d'un problème, construction matérielle, classification, observation, etc.],

2° - terme imposé par le maître, comme nom généralement admis en mathématiques,

3° - tentatives des élèves pour fixer et transmettre la signification de ce terme.

Cette dernière étape se développe différemment aux divers niveaux de l'école. Chez les plus jeunes on observe ce passage dès l'utilisation des langages démonstratif et relationnel jusqu'à la formulation de la définition admise après consensus. Les plus âgés, plus entraînés au contexte formel, passent directement à cette dernière étape. Dans chaque cas, on observe une évolution vers une certaine concrétisation des idées, des images, des intuitions.

La voie inverse, orientée vers la prise de conscience de l'objet défini selon une définition verbale donnée a priori, ouvre aussi des possibilités très riches pour l'activité mathématique, dont une démarche fondamentale au niveau scolaire est la déformalisation du texte verbal ou symbolique à l'aide de la construction d'exemples et des contre-exemples. Je ne développerai pas ce thème, je me borne seulement à le signaler.

L'utilisation correcte de la définition au cours du raisonnement mathématique exige la coordination de deux activités, en un certain sens opposées. D'une part, on se sert des images, des connaissances intuitives concernant l'objet considéré qui dépassent largement le texte de la définition ; de l'autre, on doit s'incliner devant les exigences formelles du système, donc conserver au cours du raisonnement ce qu'on appelle *disciplina mentis* et se limiter aux conséquences formelles de la définition. Cette coordination peut et doit être développée pas à pas, à tous les niveaux de l'apprentissage scolaire. Ce qui est dangereux, c'est d'imposer trop tôt cette *disciplina mentis* comme camisole de force du formalisme non compris.

Déduire et réduire

La pédagogie traditionnelle considérait la déduction comme l'activité la plus caractéristique de la pensée mathématique, et l'initiation de l'élève à la déduction précise comme le premier objectif de l'éducation mathématique. Aujourd'hui nous ne sommes pas de cet avis simpliste, car l'activité mathématique ne se réduit pas à des chaînes d'inférences. Mais il est vrai que la nature même des objets mathématiques, structures abstraites, est telle que la déduction joue le rôle primordial aussi bien au cours de la recherche en acte qu'au cours de la vérification finale des résultats de cette recherche. Si l'élève ne comprend pas ce caractère naturel de la déduction en mathématiques, la méthode qu'il est obligé d'appliquer devient pour lui camisole de force du formalisme artificiel, et la voie au formalisme dévié est immédiatement ouverte. C'est pourquoi l'initiation au raisonnement déductif, absolument nécessaire, pose des problèmes délicats à la didactique, exigeant encore des études approfondies.

A l'activité de *déduire* on oppose souvent l'activité de *réduire*. Dans le premier cas on cherche les conditions nécessaires, dans le second les conditions suffisantes. Au cours de la recherche de la solution d'un problème, au cours de la recherche d'une démonstration, dans l'étude initiale d'un domaine, on avance aussi bien par pas déductifs que par pas réductifs. Mais la réduction contient aussi les pas déductifs car pour être sûr qu'une condition suffit à une autre il faut finalement mettre en œuvre une chaîne d'inférences. L'initiation à ce jeu mental de déduire et de réduire devrait trouver une place importante dans l'éducation mathématique pour tous.

Dans la pratique mathématique, la déduction n'est jamais formellement pure. Dans l'apprentissage scolaire, les exigences concernant la précision de la déduction doivent être appropriées au niveau de l'enseignement. Mais malgré ces relâchements dans la chaîne d'inférences, malgré certains actes de conclusion globale, la déduction, même au niveau scolaire ne doit pas être faussée par les apparences ; l'élève doit être initié à l'activité de déduire dès le début.

Le mathématicien crée et développe des théories globalement organisées de manière déductive. L'axiomatique définit une structure ; la théorie, c'est la théorie de cette structure. Ce qui peut être transmis de cette activité dans l'éducation mathématique pour tous, ce sont les menus fragments du cours localement ordonnés par l'organisation déductive, et qui, ensemble, couvrent le contenu de l'apprentissage. C'est là aussi un grand et délicat problème de la didactique des mathématiques.

Coder, construire et utiliser rationnellement le langage symbolique

Henri Poincaré soulignait souvent le rôle de la symbolique dans le travail créateur du mathématicien. Il disait que le symbole avec les règles syntactiques de son utilisation, choisies convenablement, travaille lui-même pour le mathématicien qui peut alors concentrer son travail sur les idées nouvelles, ou plus profondes. Cela est dû évidemment au caractère spécifique de la symbolique mathématique qui est opératoire. L'histoire des mathématiques révèle comment le développement du langage symbolique a influencé et accéléré le développement de cette science. Les activités telles que coder, construire les symboles convenables utilisés seulement au cours de la recherche, ainsi que savoir se servir des symboles admis généralement, appliquer les conventions et les règles syntactiques en jeu, devraient donc aussi être provoquées et organisées dans l'enseignement. Mais, attention aussi au formalisme dévié dû à la perte facile de la signification sémantique des symboles. Evidemment la symbolique travaille pour nous par elle-même, grâce au fait qu'elle opère sans faire appel à chaque pas à notre conscience de la signification du symbole utilisé et transformé. Mais, ce qui est important, c'est la possibilité du retour à cette signification, quand cela s'avère nécessaire. A cette restriction près, l'activité de construire et de se servir rationnellement de symboles devrait jouer aussi un rôle significatif dans l'enseignement de la mathématique pour tous.

Algorithmiser, se servir rationnellement des algorithmes

Les notions mathématiques ont un caractère opératoire. Le jeune esprit est largement ouvert à la mise en œuvre du contenu mathématique, car il est souvent plus intéressé par la question "comment on fait cela ? comment on construit cela ?" que par la question "qu'est-ce que ?". Ces deux faits sont particulièrement favorables à l'initiation des élèves aux algorithmes. Dans la pratique scolaire, on a déjà créé beaucoup de situations didactiques, organisées et exploitées en fonction de ce but. Les activités de coder et de schématiser trouvent ici une base particulièrement naturelle, même pour un enfant débutant à l'école. Les élèves formulent aussi volontiers les définitions sous forme de chaînes d'opérations, la solution d'un problème sous forme d'organigramme, etc... Un autre problème didactique est l'initiation des élèves à l'utilisation raisonnable des algorithmes. Je ne peux pas analyser maintenant ce problème plus profondément, je me borne à le signaler. Etant donné l'importance de l'algorithmisation, comme de l'utilisation des algorithmes tout prêts, dans l'activité mathématique ou en dehors, ces procédés méritent notre attention.

On pourrait évidemment prolonger encore la liste que je viens de présenter : comparer, ordonner, classifier, etc. Tout cela fonctionne ensemble au sein d'activités plus complexes comme la mathématisation, l'application aux autres domaines, la solution de problèmes divers, etc.

*

* *

Il me faut faire une remarque finale. Toutes ces activités sont accessibles à l'élève à chaque niveau, à condition qu'elles soient dans un domaine de situations, de problèmes, de concepts qui lui sont suffisamment familiers. L'élève ne peut être actif qu'à l'intérieur d'une zone qui lui est appropriée. Cette zone s'élargit continuellement, justement grâce à l'activité que l'élève y développe, mais elle n'est jamais totalement ouverte. Si à une étape donnée on dépasse ses limites, l'élève précédemment actif devient inactif et la voie au formalisme dévié est immédiatement ouverte. Cela est dû souvent aux programmes trop ambitieux sur le plan des connaissances ou au manque de temps. Dans un débat sur les mathématiques pour tous, on ne doit pas passer ce problème sous silence.