1

ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE

Réflexions sur les décimaux au cycle moyen

par la Commission A.P.M.E.P. "Enseignement Elémentaire"

Les instituteurs n'ont pas tort lorsqu'ils font état d'amertume devant la maigreur de la partie qui les concerne dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. La Commission Elémentaire, qui a mis au point les réflexions qui vont suivre, en est bien consciente, mais voici deux circonstances atténuantes :

• Le "niveau" des articles du Bulletin, même s'il se situe, dans ses études techniques ou didactiques, bien au-dessus du premier cycle secondaire, demeure en très grande partie dans les limites de ce qui devrait être accessible aux instituteurs si la formation initiale qui leur est fournie était de la qualité de celle dont ils bénéficient dans bien d'autres disciplines. Il faut bien comprendre que nous ne pouvons pas, contre tout ce que nous avons prôné depuis des années, donner au Bulletin l'allure d'un recueil de recettes pratiques au détriment d'une tenue culturelle que nous considérons comme essentielle pour l'établissement de démarches didactiques adaptées à la personnalité des maîtres et à la composition "actuelle" de leur classe.

• Le Bulletin, au surplus, n'est pas la "chose" de quelques pontifiants collègues. Les instituteurs sont nombreux à réaliser, avec leurs élèves, d'intéressantes séances. Il faut nous en envoyer des relations, même si des critiques de tous ordres en sont la conséquence : ces critiques constituent le courant d'échanges indispensable dans une vie associative responsable.

Enfin n'oublions pas que, si nous sommes satisfaits de voir siéger, au Comité National, des Professeurs d'Ecole Normale et des Inspecteurs Départementaux, nous appelons toujours au recrutement, au sein des militants de régionales, de candidats instituteurs aux responsabilités nationales. Il n'y en avait pas en 1983 et c'est très regrettable.

Maintenant, pourquoi cet article ? Justement, pour relancer la publication de textes concernant la "petite école". Nous avons choisi le thème des décimaux parce qu'il est assez épineux, mais il n'est pas le seul dans ce cas : la géométrie, les fonctions numériques, etc. ne le sont pas moins. Il faudra donc aussi y penser.

Notre source est un travail animé par François COLMEZ (Colloque Elémentaire-Collège) publié par l'IREM de Limoges. Peu soucieux du Copyright, nous refondrons tout sans dissocier ce qui appartient au travail de ces collègues et ce que nous y ajoutons. Il est inopportun de couper le contexte par des citations incessantes...

1. Un peu d'histoire, et de quintessence...

On doit à Simon STEVIN (mort en 1620) le premier traitement systématique des fractions décimales et un système de notation figurant expressément la succession des puissances de DIX. Mais l'"envie des décimaux" était dans l'air depuis bien longtemps. L'épistémologie de cette notion n'est pas encore vraiment claire et les curieux auront grand plaisir à approfondir cette question avec la brochure A.P.M.E.P. n° 41, ou avec certaines recherches de Dijon (voir en appendice bibliographique).

Nous avons recueilli l'héritage, et de nos jours, l'écriture et l'usage des décimaux font partie du bagage quotidien indispensable. S'il est vrai que leur introduction à l'école élémentaire pose, à partir du cycle moyen, des problèmes sérieux, elle s'impose néanmoins et ce n'est pas hier qu'on s'en est rendu compte.

Les collègues de formation littéraire seront sans doute heureux que nous rappelions ce qui va suivre. Les autres sauteront plus loin...

Presque tous les nombres proposés aux petits de l'Ecole Elémentaire peuvent être considérés (du moins par le maître) comme produits d'un nombre naturel par une puissance de DIX. Quelques exemples :

30 c'est 3×10^1

3 c'est 3×10^0 (car $10^0 = 1$)

2,15 c'est 215×10^{-2}

ou encore $215 \times \frac{1}{10^2}$ etc.

La plupart des nombres sont donc décimaux, à l'école élémentaire, du cycle préparatoire à la fin du cycle moyen, les enfants ne le percevant évidemment pas immédiatement.

Mais il existe d'autres nombres, non décimaux, rencontrés occasionnellement au CM et étudiés plus tard :

$1/7 = 0{,}142\,857\,142\,857\,142\,857\ldots$

$\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,808\ldots$

$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$

qu'on ne peut pas considérer comme produits d'un naturel par une puissance de DIX.

1/7 est un *rationnel* (quotient de deux naturels quelconques). On pourra d'ailleurs proposer à des élèves de C.M.2 la recherche de remarques intéressantes sur la périodicité du développement...

$\sqrt{3}$ n'est pas rationnel, mais il est *algébrique* (racine d'un polynome non nul à coefficients entiers : ici $x^2 - 3$). On dit que ce nombre est *irrationnel*, mais il y a des irrationnels qui ne sont pas algébriques. Ainsi :

π, dont le rôle en mathématiques est envahissant (son utilité dans les calculs de rondeurs géométriques n'est que vétille, à côté de tout le reste). Les mathématiciens sont ravis de disposer de cette catégorie de nombres irrationnels et non algébriques : ils les appellent *transcendants* et sont bien loin d'en avoir fini avec eux. Ainsi, ils ne sont pas encore capables de bien distinguer si tel nombre donné est transcendant ou pas.

Encore n'est-il question, dans ce qui précède, que des nombres *réels*. Nous éviterons ceux du genre de x dans :

$$x^2 + 1 = 0$$

qui ne sont "même pas" réels...

Concluez, pour le moment, que le domaine qui va nous occuper est très modeste en étendue, puisqu'on peut construire *infiniment* plus de nombres *transcendants* que de nombres *rationnels*. Incroyable, mais vrai.

2. Les travaux d'approche, au cycle moyen :

Remarquons en passant que nous n'avons pas parlé des négatifs. Dans ce qui précède, vous pouvez remplacer le mot "naturel" par "entier relatif" (ou simplement par "entier"), et rien ne change aux définitions données. Mais les textes officiels n'incitent pas particulièrement à travailler avec des négatifs à l'école élémentaire : rien ne s'oppose à ce qu'on y invite peu ou prou les petits curieux, mais c'est à décider sur place.

C'est vers la notion de *nombre réel* que l'enfant du cycle moyen entreprend une longue marche, qui ne le conduira pas toujours au but, mais il nous faut néanmoins penser avec la même sollicitude à celui qui ira un jour au cœur du temple mathématique, et à celui qui ne fera qu'utiliser une mince partie des propriétés des nombres. Nous avons la chance que, pour l'un comme pour l'autre, un bon concept de construction soit celui d'approximation, et c'est de son éclosion qu'il importe de nous préoccuper. Certains IREM ont pousuivi, et poursuivent encore, sûr cette genèse du nombre réel des travaux rigoureux.

Tout nombre non décimal peut être encadré par des décimaux, qu'il soit rationnel ou non, transcendant ou algébrique, et ceci de manière aussi fine qu'on le souhaite :

$$0 < 1/7 < 1$$
$$0{,}1 < 1/7 < 0{,}2$$
$$0{,}14 < 1/7 < 0{,}15$$
$$0{,}142 < 1/7 < 0{,}143 \qquad \text{etc.}$$

Jusqu'où peut conduire cette approche d'un concept de nature topologique, avec des enfants du cycle moyen, voilà qui dépend des situations que nous aurons su créer, ou dont nous aurons su profiter dans nos recherches avec les élèves eux-mêmes.

Mais nous pensons, avec le groupe de Colmez, que les procédés pédagogiques conduisant aux bilans suivants devraient être abandonnés :

- les décimaux sont des naturels déguisés,
- les décimaux sont des "opérateurs" (ainsi 5/7 est le résultat de m.5 suivi de d.7).

Dans le cadre des instructions de 1980, nous pouvons mettre l'accent sur les tactiques suivantes, qui ne sont pas les seules :

- toujours (nous disons : toujours) exhiber le concept comme réponse à une situation de problème, et alors :
- le décimal pourra être un nombre de nature nouvelle (de nouveaux nombres, dit le programme) permettant une solution du problème où les naturels font faillite,
- on ira vers l'impression grandissante qu'une infinité de décimaux peut être intercalée entre deux décimaux donnés,
- on apprendra à s'exprimer de façon variée selon les cas : un décimal peut s'écrire de plusieurs manières, chacune d'elles se transcrivant au moyen des autres.

Bien entendu, tout ne sera pas acquis à la fin du cycle moyen. Il faudra en convaincre les professeurs de collège, comme le sous-entend le texte officiel.

Au surplus, il ne faut pas considérer comme assimilation d'un fait topologique fondamental ce qui n'est qu'une approche intuitive. Il est bien beau de concevoir qu'entre

$$1{,}4 \qquad \text{et} \qquad 1{,}5$$

on peut fourrer des nombres décimaux "à la pelle", autant qu'on veut jusqu'à la fin des temps, mais il n'est pas dit que les dix-onze ans puissent imaginer qu'en fait, le "trou" ne sera jamais bouché (il y aura, en effet, toujours assez de "place" pour insérer, entre ces deux mêmes nombres, beaucoup plus de non-décimaux qu'on n'y aura inséré de décimaux).

En revanche, il faut que les maîtres en aient pleinement conscience : des "chantiers" d'instituteurs et professeurs de collège auraient l'avantage, maintes fois souligné ici, de combler certaines lacunes et de mettre en contact des enseignants concernés par les mêmes enfants.

3. Suggestions :

La réflexion et la concertation conduiront à des voies plus nombreuses. Nous nous bornerons ici à soulever des objections sur les caractéristiques de différents modes d'introduction des décimaux.

• **Une introduction par les fonctions numériques :**

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \text{d.10} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & \ldots \end{array}$$

puis :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & \ldots \\ \text{d.10} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 0 & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}06 & \ldots \end{array}$$

on peut continuer.

Avantages : addition, soustraction, multiplication (décimal par naturel) sont assez faciles, la fonction étant linéaire.

Inconvénients : il est difficile d'intercaler, comparer, diviser. Cette construction est, en outre, assez théorique : à quelle sorte de question peut-elle apparaître comme une réponse, à l'âge du cycle moyen ?

• **Une introduction par la mesure :**

Les instructions antérieures y pensaient déjà : "Une ville compte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le décimal 10,850".

Nous pensons, avec l'équipe de Limoges, qu'il est préférable de recourir aux grandeurs continues (comme les longueurs) : sur un tableau de conversion (mm, cm, dm), on introduit une écriture où la virgule est un repère.

Avantages : il est facile d'y venir par des situations de toutes sortes provenant de l'environnement. On utilisera assez bien les propriétés des décimaux pour les calculs, même si elles sont dégagées sans rigueur.

Inconvénients : le nombre décimal n'est pas un nouveau nombre, mais seulement la juxtaposition de deux naturels. Esclave de l'unité choisie, l'enfant verra-t-il dans 3,52 le suivant de 3,51 ?

• **Une introduction par les partages, les fractions :**

Le texte officiel la prévoit : on écrira

4/5 sous la forme 8/10 puis 0,8.

Parmi les systèmes de notation des décimaux, il est évident qu'il ne faut pas oublier la notation fractionnaire. Mais les objectifs ne prévoient pas les opérations sur les fractions : il faut donc mettre en garde les maîtres contre la surenchère éventuelle des manuels scolaires.

• **Une introduction par le repérage :**

Dès le cycle préparatoire, les enfants manipulent une droite dite "numérique", et ils y placent des nombres. Au cycle moyen, on cherchera à *coder* un point placé, par exemple, entre 2 et 3 ...

Avantages : nécessité d'intercaler, possibilité d'intercaler encore et encore.

Inconvénients : mais les opérations sur les décimaux sont peu évidentes. Et puis, il ne faudrait pas que ces fichus galopins s'imaginent que tout point de la droite représente un décimal !

L'équipe de Colmez, dans son rapport (voir bibliographie), donne d'autres pistes que ci-dessus, où tout figure déjà dans le texte officiel des objectifs au cycle moyen. Entre autres un procédé très intéressant : partage par la bande de papier. Mais soulignons encore qu'il est ambitieux d'espérer que les quatre modes d'approche évoqués ci-dessus puissent être abordés et explorés à fond dans les deux années de CM... et, naturellement, on cherche encore le mode d'approche qui cumulerait les avantages des quatre en évitant leurs inconvénients.

En conclusion :

Constater avec nos collègues de Limoges qu'il faudrait enfin songer à remettre en chantier la rédaction des programmes de sixième pour y prendre en compte le travail nouveau effectué au cycle moyen, *et surtout celui qui n'aura pas pu s'y faire !* Comment accepter, par exemple, qu'un professeur de sixième se limite à faire *effectuer* des calculs de quotients sur les décimaux, alors que c'est pour lui une *notion à introduire* ?

Les textes disent nettement qu'en sortant de l'école élémentaire, les enfants auront "une fréquentation du domaine mathématique dont le calcul n'est qu'une composante, sans qu'on puisse considérer que ces apprentissages mathématiques sont achevés : ils devront être entretenus, consolidés, réinvestis et surtout prolongés et approfondis tout au long du premier cycle du collège dont les enfants doivent pouvoir aborder, sans rupture, le programme".

Evidemment, ce n'est pas simple : le professeur de sixième reçoit des enfants en provenance de diverses classes, donc ayant pratiqué différentes approches des décimaux. Tâche complexe, s'il veut harmoniser ces points de vue disparates, d'autant plus complexe que les enfants ne l'aident pas beaucoup : à cet âge ils sont hors d'état d'expliciter, parfois même d'évoquer, les activités pratiquées avec leur instituteur de CM.

C'est vrai à tous les niveaux : dans la "petite école" aussi, le CM reçoit des enfants provenant de CE différents, mais les maîtres se voient tous les jours. La récréation est un conseil de classe permanent, et, dans les meilleurs des cas, l'équipe pédagogique est une réalité.

Le collège étant, trop souvent encore, coupé de l'école, citons le texte intégral, cette fois, du rapport de nos collègues :

"On peut se poser la question de savoir si la seule distribution de brochures (programmes de sixième et programmes de CM distribués aux enseignants de CM et sixième), pour utile qu'elle soit, sera suffisante, et s'il ne serait pas souhaitable que ces différentes catégories d'enseignants puissent se rencontrer (sur les plans locaux, sans exclure évidemment d'autres rencontres du type colloque de Limoges) dans des réunions où l'on peut avoir la satisfaction de voir travailler ensemble différentes catégories d'enseignants en dépassant heureusement le stade : les enfants qui arrivent au CM ne savent rien ; les enfants qui arrivent en sixième ne savent rien ; les enfants qui arrivent en seconde ne savent rien..."

"Dans cette perspective, le colloque de Limoges ne constitue qu'un des premiers pas. Il faut aller plus loin..."

Pour une bibliographie :

• En premier lieu la publication du colloque cité, assurée par l'IREM de Limoges. On y trouvera bien d'autres idées sur les décimaux, entre autres dans le rapport d'une expérience effectuée à l'école Michelet de Talence dont Nadine Brousseau avait montré un document filmé. Situation d'une grande richesse, ayant les vertus de la libre recherche et de l'auto-correction, le maître étant à peu près inutile.

• *Fractions et rationnels.* IREM de Rennes.

• *Objectifs de l'enseignement et pratique enseignante dans le premier cycle.* IREM de Rennes.

• *A la recherche d'activités mathématiques en classe de sixième,* tomes I et II. IREM de Rennes.

• *L'introduction des fractions au cours moyen.* IREM de Reims.

• *La proportionnalité et son utilisation.* PLUVINAGE et DUPUIS. IREM de Strasbourg.

• *Grand N*, revue éditée par l'IREM de Grenoble. Numéro spécial CM, et les n° 5, 10, 17, 18, 20, 21. (Distribué par le CRDP).

• Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 313 : *Quelles connaissances les enfants ont-ils des structures multiplicatives ?* ROUCHIER et VERGNAUD.

• Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 327 : *L'enseignement des fractions à l'école élémentaire.* ROGER MAURIN.

• Bulletins de l'A.P.M.E.P. n° 327 et n° 340 : *Sur deux règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux.* (LÉONARD et GRISVARD).

• *Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs.* A. ROUCHIER. Dans Recherches en didactique n° 2 (1980), édité par La Pensée Sauvage.

• *Approche des réels en situation d'apprentissage scolaire* (enfants de 6 à 11 ans). R. DOUADY. Recherches en didactique n° 1 (1980).

• *Problèmes de l'enseignement des décimaux.* GUY BROUSSEAU. Ibidem.

• *De nouveaux nombres. Une introduction.* IREM de Poitiers.

• Au point de vue des mots : MOTS, évidemment... Voir premières pages de ce Bulletin.

• Au point de vue historique : demander à l'IREM de Dijon la liste de ses publications (Groupe d'Histoire des Mathématiques pour nos élèves).

• et... *Fragments d'Histoire des Mathématiques.* Brochure A.P.M.E.P. n° 41.