Bulletin de l'APMEP n°341 - 1983

A propos de la notion de limite en classe de Première S (et au-delà)

par D. LAZET, IREM de Bordeaux

I. Introduction (ou ne pas se tromper d'objectif) :

Les commentaires officiels des nouveaux programmes de Première S invitent à modifier quelque peu la définition de la notion de limite en un point pour une fonction de **R** vers **R**. Cette nouvelle définition demande aux enseignants de changer certaines de leurs habitudes. Mais s'agit-il d'un changement pour le plaisir de changer ? En toute modestie je m'efforcerai de montrer que cette nouvelle présentation rend le concept de limite plus adéquat au traitement des grands problèmes où il intervient, qu'elle permet d'éviter certains écueils dans l'utilisation du concept, et de donner plus de clarté et de justesse à la distinction entre situations pathologiques et non pathologiques (dans le domaine du Calcul infinitésimal).

L'objet de ces quelques pages est donc l'aspect qualitatif de la notion de limite. Pour autant, on ne doit pas perdre de vue que c'est là l'aspect *secondaire* de la notion. En effet :

— Il est indispensable de fixer une définition abstraite et rigoureuse du concept de limite en un point. Cette définition permettant de montrer que certaines fonctions de référence ont pour limite 0 en 0. Les autres fonctions s'étudiant le plus souvent par comparaison à celles-ci (d'où l'importance du bon maniement des inégalités).

— Mais ce concept qualitatif *n'est pas une fin en soi*, il est un outil dont le champ naturel d'intervention est essentiellement celui des *problèmes d'approximation*. Il permet à l'intérieur de ces problèmes de classifier les phénomènes rencontrés, il fournit un *langage* approprié et clair grâce auquel on peut cataloguer les comportements qualitatifs des êtres mathématiques étudiés. Cependant le problème d'approximation est loin d'être achevé lorsque cette classification est faite. Ce qui prime en analyse classique, ce sont les questions de précision, ordre de grandeur, croissances comparées ; les activités proposées aux élèves doivent donc largement inclure ce type de préoccupations, et les nouveaux programmes insistent nettement sur ce point. Ne poser aux élèves que des questions sur les limites se résolvant algorithmiquement et globalement par l'utilisation de théorèmes-outils, c'est faire de l'algèbre, c'est masquer l'environnement naturel qui est celui de ce concept en mathématique. Il y a là une déviation semblable à celle qui consiste, concernant l'intégration, à ne proposer que des exercices se ramenant à des calculs de primitives.

Notations : si f est une fonction de **R** vers **R**, on note D_f son ensemble de définition. Si a est un élément de **R**, on note $\vartheta_{(a)}$ l'ensemble des voisinages de a, et $V(a)$ un élément quelconque de $\vartheta_{(a)}$.

II. Deux remarques préliminaires :

1) La topologie de $\mathbf{R}$ n'est pas une simple topologie d'espace métrique, c'est une topologie liée à la relation d'ordre. Et la conception "intuitive" de la notion "x tend vers a" tient compte, plus ou moins consciemment, de ce fait : l'image mentale d'un mobile se déplaçant vers a nous suggère une approche de a par la droite ou par la gauche. Ainsi, pour une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, il convient de distinguer la notion de limite en un point, qui se rattache à la notion générale de limite pour une application entre espaces topologiques, et les notions de limite à droite et de limite à gauche qui relèvent d'une structure plus riche, celle de l'ordre.

2) La notion centrale dans la théorie des fonctions définies sur un espace topologique est celle de continuité. (Les applications continues sont les morphismes de la catégorie des espaces topologiques). Les applications continues sont notamment importantes parce que, sur des parties topologiquement intéressantes (compactes, connexes,...), elles ont des propriétés remarquables, et elles conservent aux images de ces parties les mêmes caractères. En ce sens, pour une fonction f de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, c'est en sachant que f est continue sur un intervalle I que je pourrai exploiter la richesse potentielle du concept de continuité ; tandis que, de ce point de vue, savoir que f est continue en a est un renseignement quasiment stérile. La continuité en un point est une simple propriété de limite.

III. Extraits des programmes de Première S et des commentaires officiels :

• **Programmes**

"II c) Limite d'une fonction en un point : on commencera par le cas de la limite 0 au point 0 ; on définira $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ par $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = 0$

on dira que ℓ est limite de la fonction f au point a si $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$".

• **Commentaires :**

"II c) On adoptera la définition suivante : soit E un intervalle, ou une réunion de deux intervalles choisi(s) de façon que $E \cup \{0\}$ soit un intervalle. Si f est une application de E dans $\mathbf{R}$, on dira que f admet la limite 0 en 0 (ou que $f(x)$ tend vers 0 avec x) si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*)\ (\exists \eta \in \mathbf{R}_+^*)\ [(x \in E \text{ et } |x| < \eta) \Rightarrow (|f(x)| < \varepsilon)]$$

On notera que l'inégalité $|x| < \eta$ a remplacé l'inégalité $0 < |x| < \eta$ qui prévalait dans l'usage antérieur. Une limite en 0 à gauche (resp. : à droite) est la limite de la restriction à $E \cap \mathbf{R}_-^*$ (resp. $E \cap \mathbf{R}_+^*$) [...]

Il résulte de là que, si une fonction est définie au point a, elle n'a de limite en ce point que si elle est continue en ce point

$$[\lim_{x \to a} f(x) = f(a)]\text{''}$$

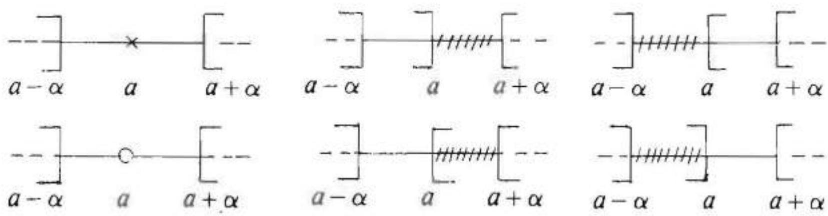
IV. Commentaires sur ces extraits :

Il y a dans les programmes et les commentaires officiels deux points à souligner.

1) Si dans les commentaires officiels on considère que le mot "intervalle" signifie "intervalle non réduit à un point", alors il découle des commentaires que, pour que le problème de la limite de f en a ait un sens, il faut qu'une *condition préalable* soit réalisée, à savoir :

Il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que : ou bien $]a-\alpha, a+\alpha[\cap (D_f \cup \{a\}) =]a-\alpha, a+\alpha[$
ou bien $]a-\alpha, a+\alpha[\cap (D_f \cup \{a\}) =]a-\alpha, a]$
ou bien $]a-\alpha, a+\alpha[\cap (D_f \cup \{a\}) = [a, a+\alpha[$

Autrement dit, au voisinage de a, l'ensemble de définition de f répond à l'un des schémas suivants : (la partie incluse dans D_f est représentée par ——, la partie non incluse par ++++)



Si dans les commentaires officiels on admet que l'on pourrait avoir $E = \{0\}$ (c'est bien un intervalle), alors dans la condition préalable ci-dessus il faudrait rajouter le 4ème cas possible, à savoir : "ou bien : $a \in D_f$ et $]a-\alpha, a+\alpha[\cap D_f = \{a\}$" (ie : a est isolé dans D_f).

Comme en un point isolé il n'y a plus à vrai dire de problème d'approximation locale, je crois que c'est la première lecture des commentaires qui correspond aux intentions des rédacteurs. Cependant, la deuxième lecture présente un avantage de forme que je vais expliquer :

Dans le calcul infinitésimal, pour les fonctions d'une variable réelle, seules importent, dans la pratique, les fonctions définies sur des réunions d'intervalles non réduits à un point ; mais lorsqu'on combine algébriquement de telles fonctions il peut en résulter des fonctions dont l'ensemble de définition est formé d'une réunion de tels intervalles *et* éventuellement de points isolés ; exemples :

$f : x \mapsto \sqrt{2-x}$, $g : x \mapsto \sqrt{(x+1)(x-2)}$, $D_{f+g} =]-\infty, -1] \cup \{2\}$
$f : x \mapsto x \sin^2 x$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $D_{g \circ f} = \mathbf{R}_+ \cup \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}_-^*\}$

Si l'on convient que, lorsque a est isolé dans D_f, on a : $\lim f = f(a)$, alors les théorèmes classiques sur les limites (limites d'une somme, d'un produit... et donc aussi pour la continuité) s'énoncent sans précaution sur les points envisagés. Par exemple, on a toujours :

$$(\lim_a f = \ell,\ \lim_a g = \ell') \Rightarrow (\lim_a (f+g) = \ell+\ell')$$
$$(\lim_a f = \ell,\ \lim_\ell g = \lambda) \Rightarrow (\lim (gof) = \lambda)$$

(Cela fonctionne même dans des cas tels que ceux des exemples donnés plus haut).

Au contraire, si l'on ne veut pas parler de limite (ou continuité) en un point isolé (ce qui est raisonnable pour les objectifs, avant tout quantitatifs, de l'approximation locale), il faut dans les divers énoncés avoir soin à chaque fois de préciser "a n'étant pas isolé dans D_{f+g} (resp. : $D_{f.g}$, D_{gof}...)" (ou "la condition préalable de recherche de limite en a étant satisfaite pour $f+g$ (resp. : $f.g$, gof...)"). Ainsi, on doit écrire par exemple :

$$(\text{a non isolé dans } D_{f+g}, \lim_a f = \ell, \lim_a g = \ell') \Rightarrow (\lim_a (f+g) = \ell+\ell')$$
$$(\text{a non isolé dans } D_{gof}, \lim_a f = \ell, \lim_\ell g = \lambda) \Rightarrow (\lim_a (gof) = \lambda)$$

Mais *cela ne présente aucun inconvénient pour la pratique ;* en effet l'usage des théorèmes sur les limites se fait quasiment toujours de la façon suivante : on part d'une fonction φ ; si on pose un problème de limite (ou de continuité) pour φ en a, *c'est que a est non isolé dans* D_φ, et alors s'il apparaît que φ peut être décomposée sous la forme $\varphi = f+g$ (resp. $\varphi = f.g$, $\varphi = gof$...), il n'y a pas d'obstacle préliminaire (lié au point a) à l'intervention éventuelle des théorèmes sur les limites.

Dans ce qui suit, je me référerai toujours à la première lecture des commentaires officiels ; autrement dit, je considérerai comme n'ayant pas de sens pour les élèves la notion de limite (ou continuité) en un point isolé.

2) *Lorsqu'une fonction f est définie en* **a**, il résulte des choix du programme officiel que f admet une limite en a uniquement si $\lim_a f = f(a)$ (ie : *f continue en a*). C'est principalement cette nouveauté par rapport aux anciens programmes qui choque certains enseignants. Je vais m'attacher à développer quelques arguments qui plaident en sa faveur.

V. Le point de vue de quelques "bons maîtres" :

Par l'intermédiaire de trois auteurs (non des moindres !) constatons que la nouvelle définition est dans le droit fil des théories modernes.

1) **Bourbaki** (Topologie Générale, chap. I, page 50)

"Soient **X** et **Y** des espaces topologiques, **A** une partie de **X**, a un point adhérent dans **X** à **A** (mais n'appartenant pas nécessairement à **A**). Soit $\mathfrak{F}$ la trace sur **A** du filtre des voisinages de a dans **X**. Si f est une application de **A** dans **Y**, au lieu de dire que $y \in \mathbf{Y}$ est limite de f suivant

$\mathcal{F}$ et d'écrire $y = \lim f$, on écrit : $y = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, et on dit que y est limite de f au point a relativement au sous-espace $\mathbf{A}$, ou que $f(x)$ tend vers y lorsque x tend vers a en restant dans $\mathbf{A}$".

On voit donc que Bourbaki fait toujours intervenir les voisinages de a, *a compris*. La nouvelle définition des programmes de 1ère S est exactement conforme à la définition de Bourbaki ($\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{R}$, $\mathbf{A} = D_f$, *a non isolé dans $D_f \cup \{a\}$*).

2) **J. Dieudonné** (Fondements de l'analyse moderne, page 45)

"Soient $\mathbf{E}$ un espace métrique, $\mathbf{A}$ un sous-ensemble de $\mathbf{E}$, a un point adhérent à $\mathbf{A}$. Supposons d'abord que a n'appartienne pas à $\mathbf{A}$. Alors, si f est une application de $\mathbf{A}$ dans un espace métrique $\mathbf{E}'$, on dit que $f(x)$ a une limite $a' \in \mathbf{E}'$ quand $x \in \mathbf{A}$ tend vers a, si l'application g de $\mathbf{A} \cup \{a\}$ dans $\mathbf{E}'$ définie par $g(x) = f(x)$ pour $x \in \mathbf{A}$ et $g(a) = a'$ est *continue au point a*. On écrit alors : $a' = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$.

Si $a \in \mathbf{A}$, on utilise le même langage et la même notation pour signifier que f est continue au point a avec $a' = f(a)$".

3) **S. Lang** (Analysis I)

(1) (Page 36)

"Soit $\mathbf{S}$ une partie de $\mathbf{R}$, soit a un point adhérent à $\mathbf{S}$. Soit f une application de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{R}$. On dit que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a, existe, s'il existe un réel L ayant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $\delta > 0$ tel que *pour tout* $x \in \mathbf{S}$, vérifiant $|x - a| < \delta$, on ait $|f(x) - L| < \varepsilon$. Dans ce cas on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x) = L$"

(2) (Page 50)

"Soit f une application définie sur $\mathbf{S}$ ($\mathbf{S} \subset \mathbf{R}$) et soit $a \in \mathbf{S}$. On dit que f est *continue en a* si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe* (ie : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x)$ existe) et par conséquent si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$"

VI. Limites et étude locale ; conséquences pour la définition du concept :

1) Etude locale :

La notion de limite en un point est nécessaire dans les études locales de fonctions. Il y a essentiellement *deux types* de situations :

• La fonction f est définie au moins sur un intervalle contenant a (ou plus généralement sur une partie **P** telle que $a \in \mathbf{P}$ et a non isolé dans **P**).

• La fonction f n'est pas définie en a, mais l'est au moins sur un intervalle de la forme $]a-\alpha, a[$ ou $]a, a+\alpha[$, (ou plus généralement sur une partie **P** telle que $a \in \mathbf{P}$ et $a \in \overline{\mathbf{P}}$). On cherche alors s'il y a un prolongement "naturel" de f en a. C'est le cas des "formes indéterminées" (dont les quotients différentiels), ou d'exemples tels que : $x \longmapsto x \sin \frac{1}{x}$ (au voisinage de 0).

Dans les deux cas, l'étude locale de f au voisinage de a est celle de $f(x)$ pour $x \in \mathrm{V}(a) \cap \mathrm{D}_f$ et il convient de ne pas exclure a de $\mathrm{V}(a) \cap \mathrm{D}_f$ si $a \in \mathrm{D}_f$ (cf. développements limités). On est donc cohérent avec cette unité d'attitude si la notion de limite en a ne rejette pas a priori le point a : en effet ce problème n'est autre que celui du *"devenir" de $f(x)$ lorsque x est pris dans des voisinages de a de plus en plus fins*. (Autrement dit, ce qu'on étudie en fait, c'est la famille des parties $f(\mathrm{V}(a) \cap \mathrm{D}_f)$ lorsque $\mathrm{V}(a)$ décrit $\vartheta(a)$).

2) **Les points "ordinaires" et les autres**

• Lorsque f est continue en a, nous pourrions dire que f est *"bien définie"* en a puisque la valeur de f en a est celle qui apparaît comme la plus "harmonieuse" quand on étudie f au voisinage de a.

• Lorsque f n'est pas définie en a mais y admet un prolongement par continuité, après prolongement nous retrouvons le cas précédent.

En fin de compte, la nature véritable du phénomène est la même dans les deux situations; aussi, dans les deux cas, je qualifierai le point a de *"point ordinaire"* pour f. Or précisément la définition des nouveaux programmes permet de mettre en relief l'analogie entre ces deux situations et leur simplicité théorique, puisqu'elles se traduisent par *"$\lim_a f$ existe"*.

• Au contraire, les points de discontinuité ou les points où un prolongement par continuité est impossible sont les points *"difficultueux"*. Leur caractère pathologique est nettement souligné avec la nouvelle définition : ce sont les points a tels que *"$\lim_a f$ n'existe pas"*.

3) **L'étude des points de discontinuité :**

On sait qu'en analyse *réelle*, lorsqu'une fonction f est discontinue en un point a, ce qui importe n'est pas d'étudier $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$, et par là de faire apparaître comme une classe pouvant avoir un intérêt propre la famille des fonctions f ayant des discontinuités du type $f(a) \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$. Il convient en réalité d'étudier $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$; ce qui amène à distinguer :

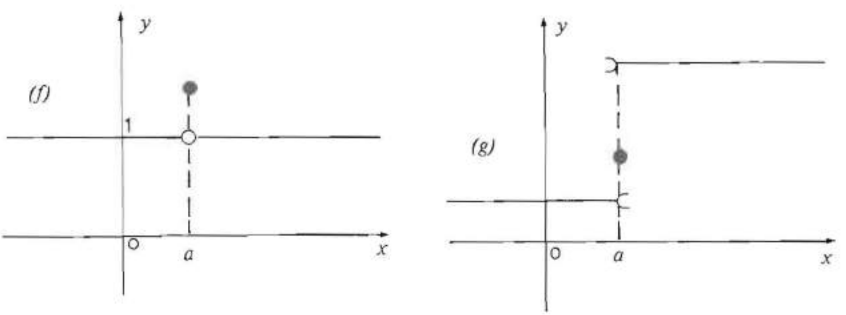
— les fonctions f telles que ces limites existent en tout $a \in D_f$, ce sont les fonctions *réglées* (bien sûr une seule des deux limites est à étudier si a n'est approchable que d'un côté). Les fonctions continues formant une sous-famille de cette famille.

— et les fonctions non réglées, c'est-à-dire présentant des discontinuités de *deuxième espèce*.

Or, à cause du rôle capital que jouent les fonctions réglées dans divers domaines de l'analyse (intégrale de Riemann, séries de Fourier), c'est bien entre ces deux classes qu'il est légitime de placer une cloison. Et on notera que, pour cette raison, dans la notion de limite à gauche ou à droite en a il est naturel de "retirer" a de D_f si $a \in D_f$.

Exemple :

Considérons les fonctions f et g associées aux schémas ci-après :



En adoptant les définitions choisies dans les nouveaux programmes on met bien en lumière les analogies et différences entre f et g :

• Ni f, ni g n'ont de limite en a, bien que définies en a. Donc f et g sont discontinues en a.

• f et g ont des limites à gauche et à droite en a. Donc f et g sont réglées (car continues ailleurs).

• Mais $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$, alors que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} g(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x)$.

Donc on pourrait redéfinir f en a de façon à en faire une fonction continue, alors que ceci est impossible pour g.

Au contraire, avec l'ancienne définition on aurait " $\lim\limits_{a} f = 1$" et " $\lim\limits_{a} g$ n'existe pas", et cette opposition dans le langage masquerait la proximité mathématique des deux fonctions (toutes deux sont réglées).

VII. La bonne adaptabilité de la nouvelle définition aux six problèmes de limites en un point :

• *Dans* **R**, il existe 6 bases de filtre fondamentales associées à un point $a \in \mathbf{R}$; ce sont :

$\mathcal{B}(a) = \{]a-\alpha, a+\alpha[\mid \alpha \in \mathbf{R}_+^*\}$ ($\mathcal{B}(a)$ engendre le filtre des voisinages de a)

$\mathcal{B}^*(a) = \{]a-\alpha, a[\cup]a, a+\alpha[\mid \alpha \in \mathbf{R}_+^*\}$

$\mathcal{B}_g(a) = \{]a-\alpha, a] \mid \alpha \in \mathbf{R}_+^*\}$

$\mathcal{B}_g^*(a) = \{]a-\alpha, a[\mid \alpha \in \mathbf{R}_+^*\}$

$\mathcal{B}_d(a) = \{[a, a+\alpha[\mid \alpha \in \mathbf{R}_+^*\}$

$\mathcal{B}_d^*(a) = \{]a, a+\alpha[\mid \alpha \in \mathbf{R}_+^*\}$

Pour une application f définie sur une partie A de **R**, à valeurs dans **R** (ou dans un espace topologique **Y**), et un point a tel que a soit à la fois adhérent à $A \cap]-\infty, a[$ et à $A \cap]a, +\infty[$, les 6 notions usuelles de limites de f en a correspondent à ces 6 bases de filtre :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}(a) \cap A} f$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}^*(a) \cap A} f$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leqslant a}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}_g(a) \cap A} f$,

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}_g^*(a) \cap A} f$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \geqslant a}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}_d(a) \cap A} f$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}_d^*(a) \cap A} f$

• La définition de limite des nouveaux programmes est parfaitement adaptée aux 6 cas ; en effet :

$\lim\limits_{\mathcal{B}(a) \cap A} f = \lim\limits_{a} f$ $\qquad$ $\lim\limits_{\mathcal{B}_g^*(a) \cap A} f = \lim\limits_{a} (f_{/A \cap]-\infty, a[})$

$\lim\limits_{\mathcal{B}^*(a) \cap A} f = \lim\limits_{a} (f_{/A \setminus \{a\}})$ $\qquad$ $\lim\limits_{\mathcal{B}_d(a) \cap A} f = \lim\limits_{a} (f_{/A \cap [a, +\infty[})$

$\lim\limits_{\mathcal{B}_g(a) \cap A} f = \lim\limits_{a} (f_{/A \cap]-\infty, a]})$ $\qquad$ $\lim\limits_{\mathcal{B}_d^*(a) \cap A} f = \lim\limits_{a} (f_{/A \cap]a, +\infty[})$

Au contraire, l'ancienne définition ne permettait pas d'envisager les limites concernant les bases de filtre $\mathcal{B}(a)$, $\mathcal{B}_g(a)$, $\mathcal{B}_d(a)$.

(Bien sûr si a n'est pas à la fois adhérent à $A \cap]-\infty, a[$ et à $A \cap]a, +\infty[$, mais seulement adhérent à A, on peut étudier certaines de ces limites, pas forcément les 6).

VIII. Quelques illustrations de l'intérêt pratique de "conserver le point a"

1) **Clarification de la situation** : dès l'exposé le type de situation est aisément caractérisé :

Soit f une fonction de **R** vers **R**, soit $a \in \mathbf{R}$, la condition préalable (voir IV 1)) de recherche de limite en a étant satisfaite pour f, on a :

$\left(\lim\limits_{a} f \text{ existe et } a \in D_f\right) \Leftrightarrow f$ continue en a	"point	
$\left(\lim\limits_{a} f \text{ existe et } a \notin D_f\right) \Leftrightarrow f$ prolongeable par continuité en a	ordinaire"	
$\left(\lim\limits_{a} f \text{ n'existe pas et } a \in D_f\right) \Leftrightarrow f$ discontinue en a	"point dif-	
$\left(\lim\limits_{a} f \text{ n'existe pas et } a \notin D_f\right) \Leftrightarrow f$ non prolongeable par continuité en a	ficultueux"	

2) **Le théorème de composition des limites :**

• Avec la nouvelle définition, ce théorème a un énoncé simple et de grande portée. Il est le suivant :

> Soit f une application de D dans **R** ($D \subset \mathbf{R}$), soit g une application de D' dans **R**. Soit $a \in \mathbf{R}$.
>
> Si on a : 1) $f(D) \subset D'$
>
> 2) $\lim\limits_{a} f = \ell$
>
> 3) $\lim\limits_{\ell} g = \lambda$
>
> Alors : $\lim\limits_{a} (gof) = \lambda$

L'ancienne définition demandait une hypothèse supplémentaire, à savoir : "il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in D \cap]\, a-\alpha, a+\alpha[$, $x \neq a$, on ait $f(x) \neq \ell$". Souvent, pour éviter cette complication du théorème, on se contentait de l'énoncer dans le cas où g est continue en ℓ, mais cela alourdissait son maniement et éliminait les cas $\lambda = +\infty$ ou $\lambda = -\infty$. Aujourd'hui, plus de précautions à prendre, et on peut noter que le théorème fonctionne aussi bien avec $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$, $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ (utile plus tard !).

• On peut donner à ce théorème une forme légèrement différente (j'y ai fait allusion dans IV) :

> Soient f et g des fonctions de **R** vers **R**, d'ensembles de définition D_f et D_g. Soit $a \in \mathbf{R}$.
>
> Si on a : 1) La fonction gof satisfait à la condition préalable de recherche de limite en a (ou plus généralement $a \in \overline{D_{gof}}$ et a non isolé dans D_{gof})
>
> 2) $\lim\limits_{a} f = \ell$
>
> 3) $\lim\limits_{\ell} g = \lambda$
>
> Alors : $\lim\limits_{a} (gof) = \lambda$

• Il en est de même lorsqu'on compose une suite et une fonction (grand intérêt pratique) ; on a le théorème :

> Soit f une application de D dans **R**($D \subset \mathbf{R}$). Soit $a \in \mathbf{R}$.
>
> Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle.

Si on a : 1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathrm{D}$ (ou : pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \mathrm{D}$)
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = a$
3) $\lim\limits_{a} f = \ell$

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$

(Théorème restant valable si $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$). Autrefois il fallait rajouter une hypothèse du type : "il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant k$, on ait $u_n \neq a$", ou bien se contenter d'énoncer le théorème pour les fonctions f continues en a (ce qui limitait son champ d'application).

3) **Pour la dérivation :** lorsqu'on caractérise la dérivabilité de f en a ($a \in \mathrm{D}_f$, a non isolé dans D_f) en écrivant :

$$(*)\ f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\mathcal{E}(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \mathcal{E}(h) = 0$$

il ne suffit pas de s'intéresser à $\mathcal{E}(h)$ pour h voisin de 0 et $h \neq 0$. En effet, il est *indispensable* de définir la fonction $\mathcal{E}$ en 0 pour que la condition (*) implique la continuité de f en a. En outre, il est nécessaire de l'y définir en posant $\mathcal{E}(0) = 0$ pour la démonstration du théorème sur la dérivabilité d'une fonction composée. Autrement dit, il convient d'écrire :

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\mathcal{E}(h)$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{E}(h) = 0 = \mathcal{E}(0)$ (ou $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{E}(h) = 0$ et $\mathcal{E}$ définie en 0)

4) **Plus généralement,** dans les notions de domination (notation O) ou de prépondérance (notation o), et, de là, pour les développements limités, on sait que les bonnes définitions sont les suivantes :

Soient f et g des applications de D dans $\mathbf{R}$($\mathrm{D} \subset \mathbf{R}$). Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$

$$[f \underset{a}{=} \mathrm{O}(g)] \Leftrightarrow [\exists \mathrm{V} \in \vartheta(a),\ \exists \mathrm{M} \in \mathbf{R}_+,\ \underline{\forall x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}},\ |f(x)| \leqslant \mathrm{M}.|g(x)|]$$

$$[f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)] \Leftrightarrow [\forall \mathcal{E} \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists \mathrm{V} \in \vartheta(a),\ \underline{\forall x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}},\ |f(x)| \leqslant \mathcal{E}.|g(x)|]$$

Si dans ces définitions on remplaçait "$\forall x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}$" par "$\forall x \in \mathrm{D} \cap (\mathrm{V} \setminus \{a\})$" on serait contraint dans le déroulement de la théorie à des complications d'hypothèses pour de nombreux théorèmes ou à des situations quelque peu paradoxales.

Exemples :

• Un *développement limité* d'ordre n, au voisinage d'un point $a \in \mathrm{D}_f$, pour une fonction f, se caractérise par :

— Le point a n'est pas isolé dans D_f
— Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et une fonction $\mathcal{E}$ *définie sur* D_f tels que :
$\forall x \in \mathrm{D}_f$, $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + (x-a)^n.\ \mathcal{E}(x)$
avec $\lim\limits_{x \to a} \mathcal{E}(x) = 0$

(Autrement dit, le reste, c'est-à-dire $(x-a)^n . \mathcal{E}(x)$, est au voisinage de a négligeable devant $(x-a)^n$). Il est nécessaire que la fonction $\mathcal{E}$ soit définie en a (et dans ce cas elle est donc continue en a) afin que soient vraies les équivalences logiques suivantes :

$$f \text{ admet un D.L. d'ordre 0 en } a \Leftrightarrow f \text{ continue en } a$$
$$f \text{ admet un D.L. d'ordre 1 en } a \Leftrightarrow f \text{ dérivable en } a$$

• De même, on a l'équivalence logique suivante (pour $a \in \overline{D_f}$) :

$$f \text{ négligeable devant 1 au voisinage de } a \Leftrightarrow \lim_a f = 0 \ (f \underset{a}{=} o(1))$$

Il serait "bizarre" que "f négligeable devant 1 au voisinage de a" n'implique pas $f(a)=0$ lorsque $a \in D_f$. Et pourtant il en serait ainsi si dans l'équivalence logique ci-dessus la limite était entendue au sens de l'ancienne définition.

5) A un niveau supérieur on fait souvent usage de la notion "*d'oscillation d'une fonction en un point*" (cf. théorie de Baire). La notion d'oscillation de f en a (notation $\omega_a(f)$) est une notion locale ; si on se laissait guider par les réflexes acquis lors de la manipulation de l'ancienne définition de limite, on serait amené à définir $\omega_a(f)$ à partir des voisinages de a épointés en a (donc à poser : $\omega_a(f) = \left| \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) - \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) \right|$) ;

mais alors on n'aurait plus l'équivalence logique :

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \omega_a(f) = 0,$$

ce qui ôterait quasiment tout son intérêt à la notion.

IX. A propos du caractère local de la notion de limite :

• Afin de bien faire saisir à l'élève qu'un problème de limite est un problème local et que local ne veut pas dire ponctuel, je crois que, dès qu'a été formulée la définition générale de limite en a, il faut l'éclairer des 2 éléments suivants :

1er élément : (caractère local de la limite) démontrer avec l'élève la propriété suivante :

> Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, soit D_f son ensemble de définition.
> Soit $a \in \mathbf{R}$.
> Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, soit g la restriction de f à $D_f \cap]a-\alpha, a+\alpha[$
> Alors on a : $\lim\limits_a f = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_a g = \ell$

2e élément : (local ≠ ponctuel) fournir des exemples (simples) où en modifiant la définition de f sur $]a, a+\alpha[$ (ou $]a-\alpha, a[$), même pour des α très petits, il en résulte un changement pour $\lim\limits_a f$.

• Avec la propriété énoncée ci-dessus et en la complétant des deux remarques suivantes :

($\lim\limits_{a} f = \ell$ et D_f contient un intervalle $]a, a+\alpha[$) $\Rightarrow$ ($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$)

($\lim\limits_{a} f = \ell$ et D_f contient un intervalle $]a-\alpha, a[$) $\Rightarrow$ ($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$),

on dispose d'un outil qui permet bien des simplifications dans le traitement algorithmique de nombreux problèmes de limite, par exemple :

— pour les théorèmes sur les limites d'une somme, d'un produit, ou d'un quotient de fonctions, on peut se contenter de formuler les théorèmes en prenant des fonctions définies sur une même partie. (En effet, si f et g sont des fonctions de **R** vers **R**, la fonction $f+g$ est définie sur $D = D_f \cap D_g$, la recherche de $\lim\limits_{a} (f+g)$ amène alors à considérer les restrictions de f et g à D).

— lorsqu'une fonction f est définie sur une réunion d'intervalles par des formules variant d'un intervalle à l'autre, ou bien lorsque l'expression de $f(x)$ peut être "simplifiée" au voisinage de a, dans le problème de la limite de f en a il suffit de s'intéresser à la (ou aux) formule(s) donnant $f(x)$ au voisinage de a (cas des fonctions faisant intervenir la valeur absolue, de fonctions rationnelles simplifiables...).

X. Quant au fait de toujours ramener la limite en a à une limite en 0 :

Le programme (de Première S) donne la directive suivante : "on définira $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ par $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = 0$; on dira que ℓ est limite de la fonction f au point a si $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$"

Ramener $\lim\limits_{a} f = \ell$ à $\lim\limits_{a} (f - \ell) = 0$ ne présente aucun inconvénient. Par contre, il me semble que vouloir systématiquement définir $\lim\limits_{a} f = \ell$ par $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \ell$ peut nuire à une bonne compréhension du phénomène. Il est vrai que, le plus souvent, l'étude de $f(x)$ au voisinage de a est facilitée par le changement de variable $x = a+h$ (dans les développements limités par exemple). Mais il ne faut pas perdre de vue que la translation sur la variable modifie sensiblement le problème ; en effet on travaille alors avec une autre fonction ($g : h \mapsto f(a+h)$). Celle-ci n'a plus le même ensemble de définition que f, il peut en résulter dans certains cas des complications inutiles.

En fin de compte, l'enseignement d'un concept a un double objectif :

— *un objectif formel*, ici c'est notamment la recherche d'une définition du concept aussi claire que possible. En ce sens ne serait-il pas préférable de définir $\lim\limits_{a} f = \ell$ sans recours à une translation sur la variable ?

— *un objectif fonctionnel,* et celui-ci conduit, pour la notion de limite, à habituer l'élève lors des problèmes (surtout d'ordre quantitatif) à effectuer la translation. Pour démontrer $\lim\limits_{a} f = \ell$, et plus encore pour estimer la rapidité avec laquelle $f(x)$ tend vers ℓ, la meilleure méthode est en général de chercher à établir une inégalité telle que :

$$|f(a+h)-\ell| \leqslant K.h^{\lambda} \; (\lambda \in \mathbf{R}_+^*, K \in \mathbf{R}_+, h \in \mathrm{V}(0) \cap \mathrm{D}', \mathrm{D}_f = a+\mathrm{D}')$$