Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux

par Catherine GRISVARD et François LÉONARD, Laboratoire de Psychologie expérimentale de l'Université de Nice

Introduction

Le travail que nous présentons ici complète celui que nous avons exposé dans un article paru au Bulletin (*Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs*, n° 327, Fév. 1981).

Nous avions montré qu'en Quatrième, 40 % des élèves ne savent pas ordonner des nombres décimaux (positifs) et qu'il ne s'agit ni d'erreurs accidentelles, ni de réponses données au hasard mais d'erreurs systématiques.

Nous avons pu identifier deux "règles" qui permettent d'interpréter 80 % des réponses fausses.

Nous montrons maintenant que beaucoup d'élèves, qui ne se trompent pas dans des comparaisons simples, utilisent les règles que nous avons identifiées lorsque les comparaisons deviennent plus complexes. D'autre part, nous avons mis en évidence une troisième "règle" qui permet d'affiner l'interprétation des résultats.

On comprendra l'importance de la connaissance de ces "règles" en constatant qu'elles fournissent souvent la bonne réponse. Ainsi, l'élève qui les utilise a rarement l'occasion de découvrir qu'il se trompe, de même que le professeur a peu l'occasion de constater que l'élève n'utilise pas la bonne procédure.

I. Les règles

Les trois règles que nous avons mises en évidence s'appliquent lorsque les nombres décimaux considérés ont la même partie entière (les comparaisons demandées portent toujours sur des décimaux positifs non entiers). Divers travaux ont montré que, si les décimaux à comparer n'ont pas la même partie entière, les erreurs sur l'ordre sont très rares dès le CM1 et quasiment absentes en Cinquième et en Quatrième, classes dans lesquelles nous avons mené nos recherches. Citons, en particulier, un test effectué par l'IREM de Lyon (ZOOM AVANT n° 11, Oct. 78) : on trouve, à la fin du CM2, 96 % de réponses exactes au problème de trouver le plus petit de trois décimaux de parties entières différentes.

Règle 1 : Elle applique la règle de comparaison des entiers aux parties décimales considérées seules.

12,8 < 12,17	"car"	8 < 17
12,1 < 12,02	"car"	1 < 2
12,18 < 12,289	"car"	18 < 289

Règle 2 : Elle range les décimaux en ordre inverse de la longueur de leur partie décimale.

12,17 < 12,8
12,02 < 12,1
12,289 < 12,18

Lorsqu'il n'y a que deux décimaux à comparer, il n'y a que deux réponses possibles dont une est la bonne réponse. Lorsque les règles 1 et 2 sont toutes les deux susceptibles d'être appliquées, elles sont contradictoires et l'une d'elles donne la bonne réponse. Par contre, lorsque l'une d'elles ne peut être appliquée (par exemple R1 pour 19,02 et 19,2 ou R2 pour 12,17 et 12,81), celle qui s'applique donne toujours la bonne réponse.

Ces deux règles ont été étudiées dans notre travail précédent ; nous proposons ici d'y adjoindre une troisième règle qui nous paraît être un progrès vers une compréhension des décimaux.

Règle 3 : Elle apparaît de façon nette dans les réponses des élèves lorsque la comparaison porte sur plus de deux décimaux et concerne les séries dont un des nombres a pour première décimale un zéro ; avant de la décrire, illustrons-la par un exemple :

Les différentes règles donnent pour un ordre croissant :

Bonne réponse	4,06 < 4,249 < 4,3
Règle 1	4,3 < 4,06 < 4,249
Règle 2	4,249 < 4,06 < 4,3
Règle 3	4,06 < 4,3 < 4,249

D'après la règle 3, le plus petit des nombres est celui dont la première décimale est un zéro, les autres nombres étant rangés par ailleurs selon la règle 1.

Il s'agit bien d'un progrès puisque cette règle contient la règle 1 et qu'elle prend en compte une information supplémentaire pertinente.

Lorsqu'il n'y a que deux décimaux à comparer, la règle 3 donne la bonne réponse lorsqu'elle est applicable ; son existence risque donc de passer totalement inaperçue si on ne propose que des couples à comparer, alors que nous montrons qu'elle apparaît aussi fréquemment que R1 (du moins en Quatrième) lorsqu'il y a plus de deux nombres à comparer (1).

---

(1) Une expérience dont nous ne détaillons pas les résultats ici proposait de classer des couples de décimaux dont un élément au moins avait toujours un zéro en première décimale. On obtient en Quatrième un pourcentage d'erreurs presque nul (0,9 % sur 444 réponses). *A posteriori* on peut penser que parmi ce nombre massif de bonnes réponses beaucoup sont obtenues par l'application de la règle 3 qui, dans le cas d'un couple, donne la bonne réponse.

II. Augmentation de la charge de travail

Ainsi que nous l'avons indiqué dans l'introduction, les élèves sont souvent capables de donner de bonnes réponses pour la comparaison de deux nombres et se trompent si la comparaison porte sur un plus grand nombre d'éléments.

A ceci nous pouvons donner deux explications de nature différente :

— *du point de vue du sujet :*

Le travail à accomplir, l'information à traiter quand il y a plus de deux nombres, sont plus importants. Bien que la nature de la tâche ne change pas et que l'algorithme de comparaison soit le même pour ordonner deux nombres et pour en ordonner plus de deux, l'augmentation de l'ampleur de la tâche à accomplir a pour effet de perturber le bon fonctionnement des sujets et de faire apparaître des modes de fonctionnement plus primitifs et moins bien adaptés au problème.

— *du point de vue des possibilités d'erreurs :*

Aux perturbations du fonctionnement des sujets, observé fréquemment et à tous les niveaux dans ces conditions, s'ajoute le fait que dans le cas du couple il n'y a que deux réponses possibles, ce qui favorise l'obtention de bonnes réponses par application de règles fausses. Dans le cas de la comparaison de trois décimaux (ou plus de trois) il est plus facile de choisir des nombres qui permettent de discriminer les différentes règles et la bonne procédure (voir l'exemple de présentation de la règle 3 plus haut). De plus, il est possible de reconnaître l'application d'une règle avec un risque d'erreur très faible lorsqu'il y a plus de deux décimaux à ordonner. Pour un triplet, six réponses sont possibles, à chacune des règles identifiées correspond une réponse au plus et une réponse au hasard n'a qu'une chance sur six de coïncider avec la réponse résultant de l'application de l'une ou l'autre des règles.

Ainsi la tâche de sériation de listes plus longues est susceptible de faire apparaître de nouvelles régularités dans les réponses des sujets et donc de permettre l'identification de règles implicites qui, dans le cas de la comparaison de couples, ne pourraient être distinguées de celles déjà connues.

L'expérience a porté sur 162 élèves de classes de Cinquième, âge moyen 12 ans 11 mois, écart type 13 mois, et sur 132 élèves de classes de Quatrième, âge moyen 14 ans 1 mois, écart type 7 mois. Tous les sujets étaient élèves d'un même établissement.

L'épreuve proposée aux sujets était la suivante : il s'agissait d'ordonner par ordre croissant cinq listes de nombres :

— un couple (deux décimaux de même partie entière)
— un triplet (trois décimaux de même partie entière)
— un quintuplet (cinq décimaux de même partie entière)

— une liste de cinq nombres composée d'un couple mêlé à un triplet (deux parties entières différentes)

— une liste de dix nombres composée de un couple, un triplet, un quintuplet (trois parties entières différentes). Voir en annexe un exemple d'épreuve.

Dans ces deux derniers cas, puisque les élèves ne mélangent pas les parties entières, le travail de comparaison est exactement le même que pour un couple (respectivement triplet ou quintuplet) présenté seul, une fois que le tri sur les parties entières a été fait. Cependant, nous pensions que la présence des autres nombres était de nature à "compliquer" la tâche et à faire apparaître des erreurs.

Il y avait quatre épreuves différentes de façon qu'un même sujet n'ait pas à ordonner un même couple (resp. triplet, quintuplet) seul ou dans une liste plus longue. L'ordre des listes était différent dans les différentes épreuves ainsi que l'ordre des nombres dans ces listes. Ces ordres ont été obtenus par tirage au sort.

Le dépouillement global (sur l'ensemble des élèves) a permis de comparer le nombre de mauvaises réponses à la sériation des trois séries — couples, triplets, quintuplets — nous pensions observer une augmentation du nombre des mauvaises réponses avec la longueur de la série. Voir § III.a).

De même, nous avons regardé si le plongement d'une série dans une liste plus longue, mais dont les éléments n'interfèrent pas puisqu'ils n'ont pas la même partie entière, augmente le nombre des erreurs. Ces résultats sont présentés au § III.b).

L'étude individuelle (réponse de chaque sujet dans les différentes situations) nous a paru plus adaptée pour connaître la nature des erreurs faites. Les résultats de cette étude sont présentés au § III.c).

Pour les raisons exposées plus haut, il était compté, lors du dépouillement, une seule mauvaise réponse pour chaque ordre différent de la bonne réponse.

Les mauvaises réponses ont été classées, chaque fois que c'était possible, selon la règle fausse dont l'application permet de les obtenir. Les mauvaises réponses qui ne découlent d'aucune des règles 1, 2 et 3, ont été rassemblées sous une même rubrique "autres MR".

III. Les résultats en Cinquième et en Quatrième

a) Nous analysons d'abord les résultats concernant le nombre et la nature des erreurs selon que la liste comporte 2, 3 ou 5 éléments à ordonner. L'augmentation du nombre théorique de possibilités de réponses des couples (deux réponses possibles), aux triplets (six réponses possibles) et aux quintuplets (cent vingt réponses possibles), ne permet pas de faire des comparaisons de pourcentages d'utilisation des différentes règles entre les trois situations.

Nous présentons dans les **tableaux 1 et 2**, pour la bonne procédure (BR) et pour chacune des règles identifiées, le nombre théorique de réponses qu'elles permettent d'obtenir et le nombre de réponses qui ont été effectivement obtenues dans notre expérience. Les nombres théoriques ont été calculés en supposant que toutes les réponses étaient équiprobables, ils sont placés entre parenthèses.

Le tableau 1 correspond aux résultats de l'expérience en Cinquième et le tableau 2 à ceux de Quatrième.

Rappelons que BR : *Bonne réponse* ; R1 : *Réponse de la Règle 1* ; R2 : *id. Règle 2* ; R3 : *id. Règle 3* ; Autres MR : *les mauvaises réponses qui n'entrent pas dans ces précédentes catégories.*

Tableau 1

Nombres (observé et théorique) de réponses correspondant aux différentes procédures en Cinquième

		BR	R1	R2	R3	autres MR	total
couples tels que BR = R1 :	obs.	76		7			83
	théo.	(41,5)		(41,5)			83
couples tels que BR ≠ R1 :	obs.	64	9				73
	théo.	(36,5)	(36,5)				73
triplets tels que BR = R1 :	obs.	62		9		2	73
	théo.	(12)		(12)		(49)	73
triplets tels que BR ≠ R1 :	obs.	35	3			1	39
sans zéro	théo.	(6,5)	(6,5)			(26)	39
triplets tels que BR ≠ R1 :	obs.	32	5		2	2	41
avec zéro	théo.	(7)	(7)		(7)	(21)	41
quintuplets sans zéro :	obs.	56	10	4		6	76
	théo.	(0,6)	(0,6)	(0,6)		(74,2)	76
quintuplets avec zéro :	obs.	47	10	3	7	9	76
	théo.	(0,6)	(0,6)	(0,6)	(0,6)	(73,6)	76

Tableau 2

Nombres (observé et théorique) de réponses correspondant aux différentes procédures en Quatrième

		BR	R1	R2	R3	autres MR	total
couples tels que BR = R1 :	obs.	55		5			60
	théo.	(30)		(30)			60
couples tels que BR ≠ R1 :	obs.	56	2				58
	théo.	(29)	(29)				58
triplets tels que BR = R1 :	obs.	53	5			1	59
	théo.	(10)	(10)			(39)	59
triplets tels que BR ≠ R1 :	obs.	23	7			1	31
sans zéro	théo.	(5)	(5)			(21)	31
triplets tels que BR ≠ R1 :	obs.	25	5		1	1	32
avec zéro	théo.	(5)	(5)		(5)	(17)	32
quintuplets sans zéro :	obs.	49	9	3		13	64
	théo.	(0,5)	(0,5)	(0,5)		(62,5)	64
quintuplets avec zéro :	obs.	38	7	0	7	6	58
	théo.	(0,5)	(0,5)	(0,5)	(0,5)	(56)	58

Les résultats des tableaux 1 et 2 montrent que les élèves ne répondent pas au hasard, mais que leurs réponses sont fortement organisées. On obtient bien sûr un grand nombre de bonnes réponses. Ce qui est plus intéressant, c'est la place relative des réponses correspondant à la règle 1 et de celles correspondant aux "autres mauvaises réponses". On voit que dans tous les cas, les réponses résultant de l'application de la règle 1 sont nettement majoritaires parmi les mauvaises réponses. De plus, celles résultant de l'application de la règle 3 sont aussi nombreuses, tant en Cinquième qu'en Quatrième, que toutes les autres mauvaises réponses, alors que pour les triplets elles seraient trois fois moins nombreuses en cas de réponses aléatoires et pour les quintuplets dix fois moins. Il est donc permis de penser que, à défaut d'une bonne organisation, les élèves ont mis en place des procédures inexactes mais très solides et stables. En ce qui concerne la règle 2 les résultats sont moins nets, sauf pour les couples et c'est alors la seule mauvaise réponse possible. Dans cette expérience la règle 2 n'apparaît pas comme une organisation très fréquente ; elle se trouve en fait partiellement recouverte par la règle 3 que le mode de décompte des erreurs que nous avions utilisé dans notre première expérience n'avait pas permis de mettre en évidence.

b) Nous étudions maintenant l'influence de la charge de travail sur les réponses des élèves. Pour cela nous nous intéressons aux erreurs faites sur les séries selon qu'elles sont présentées seules ou dans une liste plus longue. Le plongement d'un couple ou d'un triplet dans une liste de cinq nombres n'augmente pas suffisamment la charge de travail pour induire une variation du nombre des erreurs. Nous avons pu remarquer d'autre part que le nombre des erreurs sur les quintuplets ne change guère selon que ceux-ci sont présentés seuls ou mélangés à cinq autres nombres ; le résultat est valable en Quatrième comme en Cinquième.

Nous pensons donc que pour les élèves qui n'ont pas une bonne maîtrise de l'algorithme de comparaison des décimaux, la sériation de cinq nombres est, en soi, une tâche suffisamment difficile et que, par contre, ceux qui ne se trompent pas à la sériation de cinq nombres ne sont pas mis en difficulté avec le plongement dans une liste plus longue. Il semble qu'on obtienne avec cinq nombres un exercice relativement discriminatif des deux types d'élèves.

En ce qui concerne le plongement des couples et des triplets dans une liste de dix nombres nous avons obtenu, en Cinquième, les résultats que nous avions anticipés, ainsi que pour les couples en Quatrième. Le **tableau 3** donne, pour la Cinquième et pour la Quatrième, les pourcentages de mauvaises réponses pour les couples et les triplets tels que R1 ≠ BR selon qu'ils sont présentés seuls ou dans une liste de dix nombres. On constate qu'il est possible d'obtenir de cette manière une dégradation de la performance qui est particulièrement frappante en Quatrième pour les couples puisqu'on passe de 3 % à 27 % d'erreurs. (Pour les triplets en Quatrième, le résultat est paradoxal et nous ne savons pas l'expliquer).

Tableau 3

Nombre de mauvaises réponses (MR), nombre total de réponses (T) et pourcentage de mauvaises réponses (%), pour les couples et les triplets, selon la situation, en Cinquième et en Quatrième :

	SEULS				DANS DIX		
	MR	T	%		MR	T	%
En 5ème							
Couples ...	9	73	12	....	16	72	22
Triplets	13	80	16	....	18	75	24
En 4ème							
Couples ...	2	58	3	....	16	59	27
Triplets	15	63	24	....	11	52	18

c) Etude individuelle : nous étudions ici l'hypothèse selon laquelle l'apprentissage d'une notion comme celle de la comparaison des décimaux ne se fait pas instantanément lorsque le maître présente la notion et l'illustre par des exemples, mais procède par étapes de mieux en mieux adaptées au problème posé et que nous proposons de ranger hiérarchiquement. Ainsi nous pensons que la règle 3 est une meilleure adaptation que la règle 1 qu'elle contient partiellement et que la règle 1 elle-même traduit une organisation de l'information selon une certaine cohérence que nous n'avons pas trouvée dans les autres mauvaises réponses.

Nous pouvons proposer une hiérarchie des réponses sous la forme :

MR quelconques → R1 → R3 → BR

L'augmentation de la difficulté de la tâche (avec l'augmentation de la longueur de la série à ordonner : couple, triplet, quintuplet) doit entraîner une régression dans la nature des réponses fournies. Ainsi nous allons étudier, sujet par sujet, les réponses données pour les trois séries présentées seules.

Le nombre des réponses que nous avons obtenues concernant la règle 3, que nous avons identifiée à l'occasion de cette expérience, est insuffisant pour nous permettre une étude valable sur le passage éventuel de R3 à R1, les séries n'ayant pas été choisies dans ce but ; il semble qu'il y ait une tendance à l'abandon des réponses correspondant à la règle 3 quand la longueur de la série augmente, et c'est une des interprétations que nous proposons pour expliquer le nombre très faible d'erreurs sur les couples en Quatrième (voir aussi la note 1).

Compte tenu de cette remarque nous classons les réponses en trois catégories : BR, R1 et R3, autre MR.

En Cinquième, sur 55 sujets,
— 42 % sont stables soit en réponse R1 soit en BR,
— 24 % donnent BR au couple et R1 à une série plus longue,
— 23 % donnent BR au couple et une autre MR à une série plus longue,
— 11 % varient leurs réponses en sens inverse.

En Quatrième, sur 48 sujets,
— 42 % sont stables,
— 27 % donnent BR au couple et R1 à une série plus longue,
— 19 % donnent BR au couple et une autre Mauvaise Réponse à une série plus longue,
— 12 % varient leurs réponses en sens inverse.

Ces résultats apparaissent comme la confirmation du fait que la règle 1 est un moyen très puissant et très stable d'organisation de la tâche ; même lorsque le sujet a acquis une connaissance permettant l'application de la bonne procédure dans les cas simples, la règle 1 réapparaît si l'ampleur du travail ne permet pas une organisation optimale de l'information. Il semble donc que cette règle puisse coexister chez un même sujet avec la bonne règle, tant que cette dernière n'est pas assez solidement établie.

Conclusion

Ce type de travail nous paraît important pour plusieurs raisons, il montre que :

1. la compréhension d'une notion n'est pas immédiate, qu'il s'agit d'une construction procédant le plus souvent par étapes,

2. l'enseignement aussi procède par étapes, mais l'élève s'adapte à la situation d'enseignement et utilise des règles pour produire des "bonnes réponses", c'est-à-dire des réponses qui ne permettent pas à l'enseignant de voir l'écart entre le cheminement de la pensée de l'élève et la progression pédagogique.

Il nous paraît essentiel de se donner les moyens de comprendre ce que fait l'enfant, d'une part pour construire des situations didactiques aussi adaptées que possible à la progression de l'enfant, d'autre part pour identifier les bonnes réponses correspondant à des règles fausses afin de ne pas féliciter pour sa réponse juste un enfant qui effectue un raisonnement faux.

Ceci suppose un travail important qui peut difficilement être mené par l'enseignant tout seul en situation pédagogique et qui ne peut pas, non plus, être mené par un observateur extérieur sans collaboration avec l'enseignant.

Nous pensons donc qu'il est utile de développer des recherches sur l'enseignement dans une collaboration entre enseignants et psychologues et que notre travail a contribué sous deux formes à de telles recherches :

— d'une part en identifiant trois règles fausses utilisées par les élèves ;
— d'autre part en proposant deux moyens de les mettre en évidence.

Nous ne prétendons pas avoir fait le tour de la question, d'autres règles fausses sont peut-être à l'origine de certaines "Bonnes Réponses" et les "autres MR" ne sont peut-être pas toutes des erreurs accidentelles. Des recherches futures sur le sujet et sur d'autres usages des décimaux à l'école et hors de l'école permettront certainement de mieux comprendre la nature des difficultés rencontrées à l'occasion de l'étude de cette notion en classe.

Annexe

NE TOURNEZ PAS LA PAGE AVANT QU'ON VOUS LE DISE.

Date de naissance : Classe :

Votre travail va consister à ordonner des nombres par ordre croissant, c'est-à-dire DU PLUS PETIT AU PLUS GRAND.

Répondez aux questions dans l'ordre ; ne revenez pas en arrière.
Ne vous servez pas de brouillon ; écrivez sur la feuille.
Ne gommez pas ; si vous vous êtes trompé, rayez et écrivez de nouveau.

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 5 nombres :

7,609 8,98 7,55 8,898 7,5

Réponse :

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 10 nombres :

19,1 12,7 19,02 12,6 12,8 16,12 16,734 12,49 16,72 12,344

Réponse :

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 5 nombres :

15,5 15,078 15,349 15,41 15,069

Réponse :

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 2 nombres :

17,2 17,23

Réponse :

Ordonner par ordre croissant (du plus petit au plus grand) les 3 nombres :

18,65 18,8 18,067

Réponse :