4

ETUDES

L'algèbre des couleurs

par A. DELEDICQ, IREM de Paris-Sud, pour le texte
et J.B. TOUCHARD, IREM de Paris-Sud, pour les photos

VOYEZ-LES !

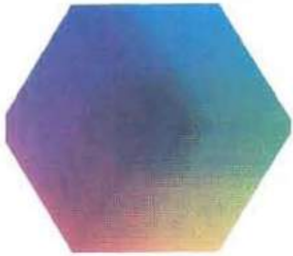
Zéro noir, Un rouge, Deux vert et Quatre bleu ;
Je dirai quelque jour vos naissances latentes
Au sein des processeurs aux puces frissonnantes
Qui déversent leurs bits dans les bus silencieux.

Canals sombres ; O, noirceurs des octets vides,
Calme des encres lasses, bruits blancs, tristes pixels ;
1, Signe, Son, couleur, vrai sang des portes belles
A l'entrée RVB, ivre de bauds avides ;

2, un-zéro, impulsions digitales
Prêtes à opérer leurs unions formidables
Sur l'écran balayé, où deux et un font jaune ;

4, profond azur, fermant la trinité
Dont la somme, ô grâces, engendre l'unité
Des merveilles du monde : Am ! Stram ! Blanc ! Vibrez cônes !

A. ~~R~~ D



1. Le code des couleurs

Entre moi et les couleurs, tout a commencé par un échec de mémoire. Sur le micro-ordinateur que j'utilisais, le code des couleurs était le suivant :

ϕ : Noir
1 : Rouge
2 : Vert
3 : Jaune
4 : Bleu
5 : Magenta (ressemble au "violet")
6 : Cyan (ressemble au bleu lavé du ciel)
7 : Blanc.

Non seulement je n'arrivais pas à apprendre le code par cœur mais je m'attristais de penser qu'il faudrait que j'en apprenne un autre avec un micro-ordinateur différent. C'est là que mon ami Jean-Baptiste TOUCHARD me traita d'ignare, et me fit remarquer ce que tout le monde devrait savoir (d'où la décision d'écrire aujourd'hui cet article en essayant d'expliciter pour tous les structures mathématiques cachées sous les couleurs du monde) :

UN Noir c'est l'absence de lumière : ϕ

DEUX Les trois couleurs *de base* sont le *rouge*, le *vert* et le *bleu* (que ceux qui croient plutôt au tiercé rouge-jaune-bleu attendent la fin de l'article pour perdre leurs illusions) ; sur les télévisions, par exemple la "prise d'images" est dite "RVB". Et, sur l'écran, on voit bien (lorsqu'on regarde de très près) que l'image n'est que la juxtaposition de points Rouges, Verts et Bleus plus ou moins éclairés.

$\boxed{\text{TROIS}}$ Pour le reste, les couleurs *s'additionnent* tout à fait "normalement" ;

Jaune	(3)	=	Rouge (1)	+	Vert (2)			
Magenta	(5)	=	Rouge (1)	+	Bleu (4)			
Cyan	(6)	=	Vert (2)	+	Bleu (4)			
Blanc	(7)	=	Rouge (1)	+	Vert (2)	+	Bleu (4).	

Cette "addition" des couleurs est tout à fait facile à mettre en évidence à l'aide de 3 projecteurs respectivement Rouge, Vert et Bleu et dont les faisceaux s'intersectent les uns les autres *(figure 1)*. De simples lampes de poche avec des filtres de couleur font d'ailleurs l'affaire.

Et, en écrivant *les* codes en binaire, tout devient "clair" : *les* 8 couleurs se fabriquent à partir de la présence ou de l'absence de 3 éléments de base.

On a donc affaire à un objet mathématique bien connu : le *cube*.

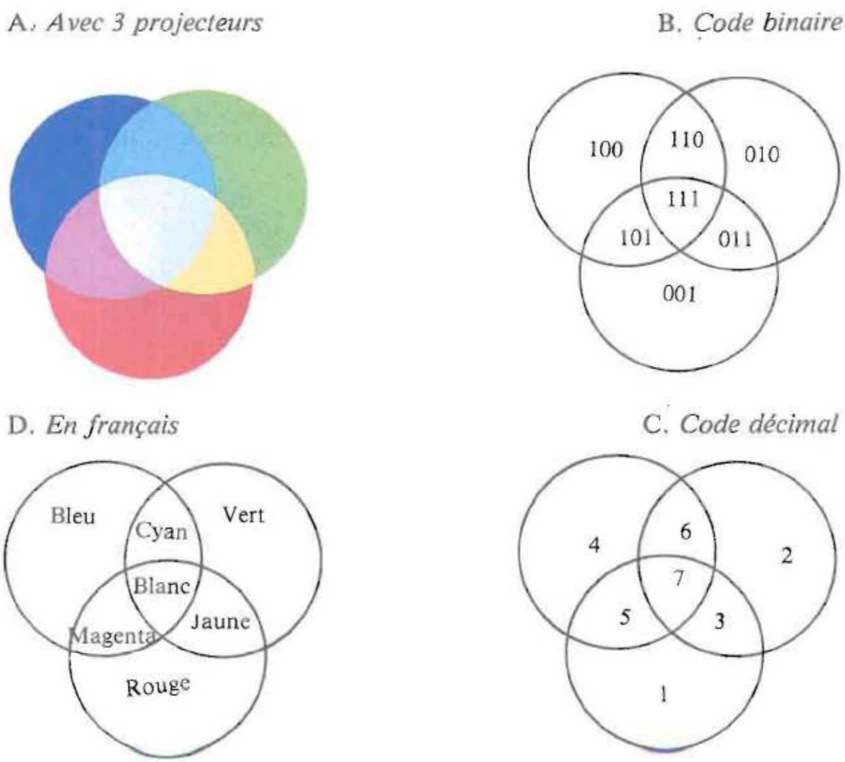


figure 1 - La synthèse "additive" des couleurs

Exemple d'"addition" des couleurs ("Union" des rayons lumineux) :

$$\begin{array}{rl} 001 & \text{(Rouge)} \\ +\ 010 & \text{(Vert)} \\ \hline 011 & \text{(Jaune)} \end{array}$$

Mais attention, il ne s'agit pas de l'addition habituelle des nombres de **N** écrits en base 2. En effet :

$$\begin{array}{rl} 011 & \text{(Jaune)} \\ +\ 011 & \text{(Jaune)} \\ \hline 011 & \text{(Jaune)} \end{array}$$

L'opération se fait ainsi chiffre à chiffre et cette opération est le "OU" logique (c'est donc une simple porte "OU" qui est présente sur chacune des trois entrées de la prise RVB). Rien d'étonnant puisque, pour l'ensemble des rayons, il s'agit bien de l'opération "union", au sens à la fois mathématique et physique du terme.

2. Le modèle $[0,1]^3$

L'ensemble des 8 couleurs citées dans le premier paragraphe se structure donc "naturellement" (c'est-à-dire "vectoriellement", le "naturel" étant canoniquement — pour tout un chacun — le "linéaire") selon les 8 sommets d'un cube *(figure 2)*.

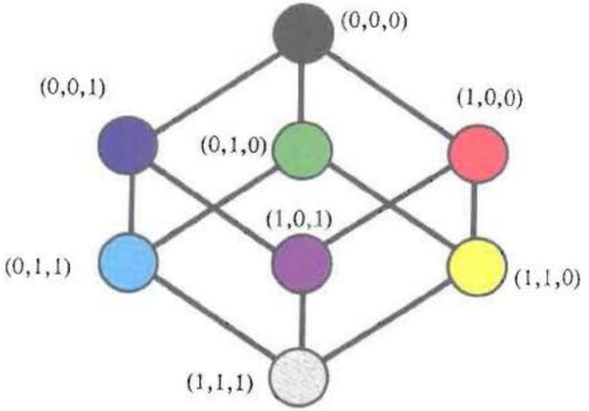


figure 2 : Le cube des couleurs

Un "bon" modèle de toutes les couleurs du monde est alors l'enveloppe convexe de ces points c'est-à-dire le volume intérieur du cube (on trouve de belles images de ce cube dans la brochure de l'utilisateur de l'ordinateur Hewlett PACKARD 9825 ou bien dans le très beau livre de Harold KUPPERS : "la couleur" aux éditions Dessain et Tolra).

Les sections de ce cube par différents plans donnent lieu à de fantastiques coloriages. Intéressons-nous successivement à 3 d'entre elles.

a) **La section $x + y + z = 1$**

Le triangle bâti à partir des 3 couleurs de base (RVB) est particulièrement intéressant *(figure 3)*.

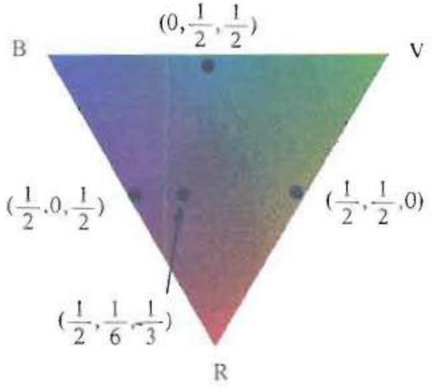
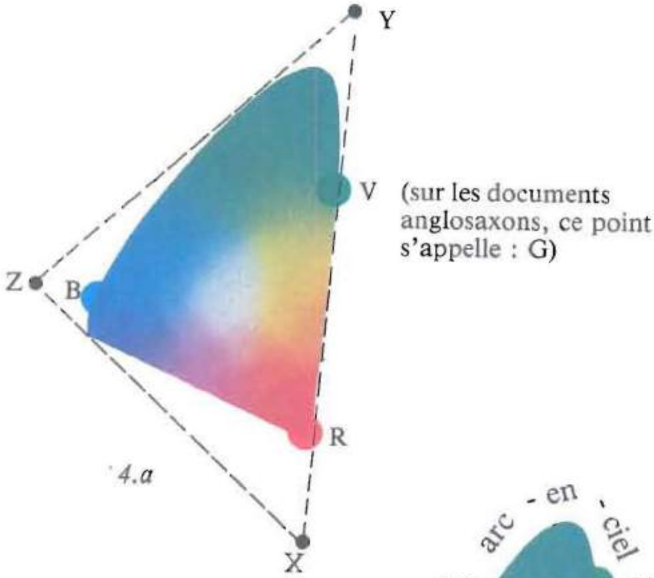


figure 3 : le triangle barycentrique des couleurs

Mes collègues mathématiciens comprendront, sans plus de discours, l'interprétation barycentrique qui peut être associée à chaque point intérieur à ce triangle pour représenter une couleur. *Mais l'autre intérêt de cette section d'un cube théorique est qu'elle approche de manière satisfaisante le "triangle" de couleurs "réellement" perçu par les cônes de notre rétine.*

Notre physiologie impose en effet une *torsion* à ce triangle ; le système de la CIE (Commission Internationale de l'Energie), mis en place en 1931, tient compte de cette distorsion et impose aux scientifiques l'utilisation du diagramme de la *figure 4*.

Remarquez que les couleurs de base normalisées ne sont pas exactement aux sommets de ce "triangle". Afin de pouvoir tout de même mener des calculs barycentriques à coefficients positifs, le système CIE utilise des composantes trichromatiques fictives à partir d'un triangle XYZ dont les côtés tangentent le triangle tordu (voir *figure 4.a*).



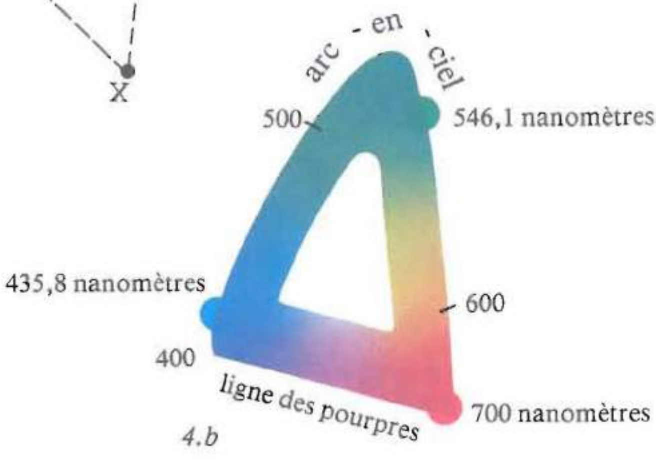


figure 4 : Le triangle chromatique de la CIE

- Sur 2 côtés du triangle de la *figure 4.b*, on trouve les *couleurs pures* (dites "spectrales"), dont les longueurs d'onde sont données et qui sont celles que l'on voit dans la décomposition spectrale de la lumière blanche.
- La *ligne des pourpres* entre le rouge-scientifique et le bleu-scientifique, correspond à des couleurs obligatoirement mélangées.

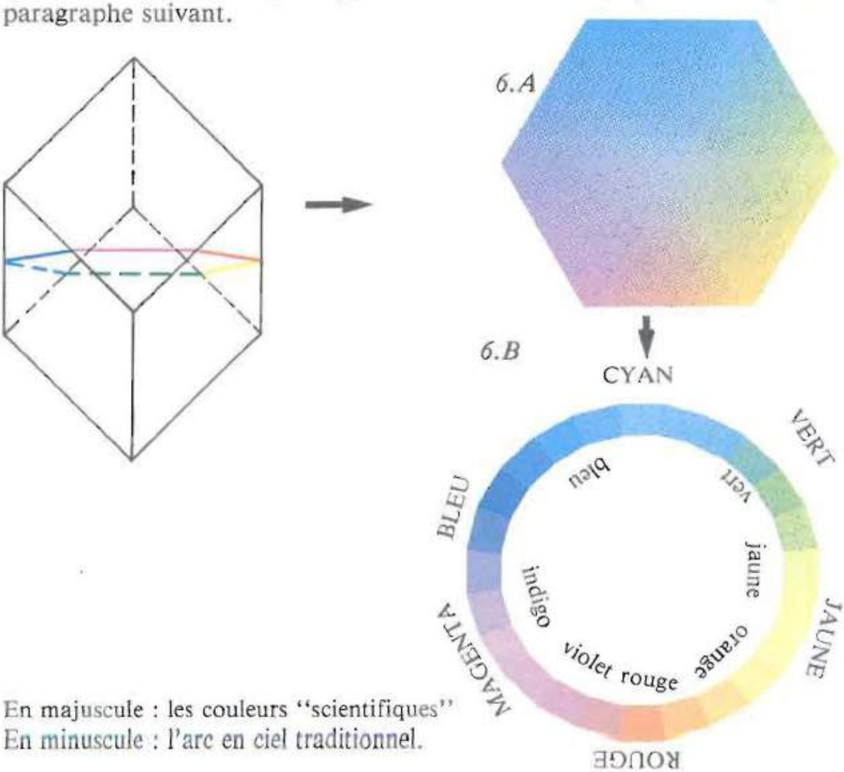
b) La section $x + y + z = 2$

Cette section est "duale" de la précédente au sens de l'échange des faces et des sommets (voir *figure 5).*

figure 5 : La section duale

c) La section hexagonale

La section "médiane" $x + y + z = 3/2$ a l'avantage de traiter symétriquement les six "véritables" couleurs. La section hexagonale, représentée sur la *figure 6-A*, approche le cercle que nous avons tous dessiné dans nos jeunes classes de dessin. Nous retrouvons alors maintenant la pratique de la "peinture" (par opposition à la "vidéo") qui fait l'objet du paragraphe suivant.



En majuscule : les couleurs "scientifiques"
En minuscule : l'arc en ciel traditionnel.

figure 6 : La section hexagonale et le cercle des couleurs

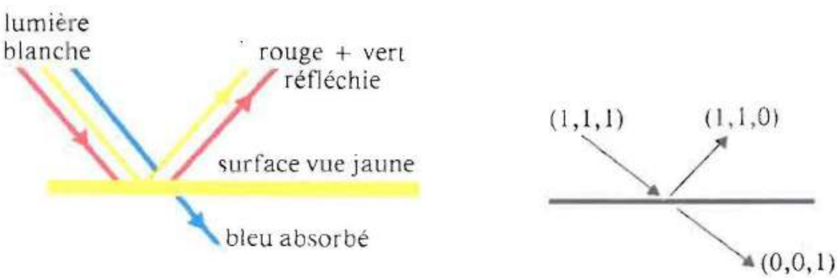
3. La synthèse soustractive des couleurs

1° Mélanges d'encres

Nous avons tous, en effet, "mélangé" un jour des couleurs pour en obtenir d'autres. C'est là que le début de cet article ne semble pas coller à la réalité. En effet : *personne n'a jamais obtenu du jaune en mélangeant (encre ou peinture) du vert et du rouge.*

Mais, il y a une petite chose à comprendre :

- Lorsqu'un ensemble de rayons lumineux "se mélange" à un autre ensemble de rayons lumineux, nous voyons les deux ensembles et nous percevons la couleur obtenue par "addition" comme prévu par le modèle du paragraphe 2.
- Mais lorsqu'une encre ou une peinture d'une certaine couleur, se mélange à une encre ou une peinture d'une autre couleur, ce que nous voyons est le résultat d'une "soustraction". En effet si une encre est vue jaune (1,1,0) c'est qu'elle renvoie des rayons verts (0,1,0) et rouges (1,0,0). Et si elle renvoie ces rayons, c'est parce qu'elle absorbe les rayons bleus (0,0,1) (voir *figure 7*).



"Absorption de X"
"Vision du complémentaire de X"

"Projection sur les 2 premiers axes de coordonnées"

figure 7 : La soustraction des couleurs

Qu'arrive-t-il donc si on mélange une *encre verte* et une *encre rouge*?

- Une encre vue verte (0,1,0) absorbe le bleu et le rouge (1,0,1)
- Une encre vue rouge (1,0,0) absorbe le bleu et le vert (0,1,1).

Au total :
$$\begin{array}{r} (1,0,1) \\ \oplus\ (0,1,1) \\ \hline (1,1,1) \end{array}$$

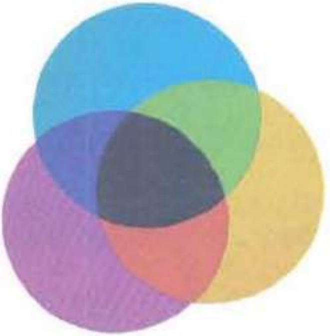


figure 8 : La synthèse soustractive des couleurs

... toutes les couleurs sont absorbées et le résultat est *noir*. En fait, les choses ne sont pas aussi pures que celà et le résultat n'est pas "vraiment" noir ; le bleu étant "plus" absorbé que le rouge et le vert, le résultat sera plutôt un noir tirant sur le jaune genre "caca d'oie" ou "terre de sienne" selon l'humeur du spectateur.

2° L'axe des gris (*)

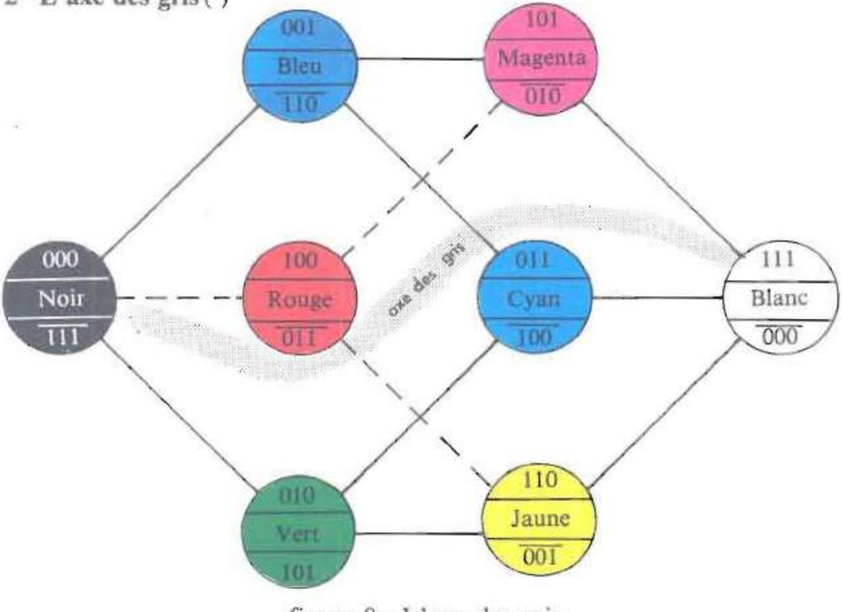


figure 9 : L'axe des gris

(*) A partir de ce paragraphe nous nous exprimons en terme de coordonnées et nous simplifions l'écriture (1,1,0) en 110 ; cela se lit à l'envers de la lecture des nombres en base deux mais le contexte devrait éviter la confusion.

On voit, ici, apparaître la dualité rayons-encres qui peut se traduire rapidement ainsi :

— En superposant des rayons de couleurs différentes, on s'approche du blanc.

— En mélangeant des encres de couleurs différentes, on s'approche du noir.

Tout a ainsi l'air de se passer de manière symétrique autour de *l'axe des gris* porté par la diagonale principale du cube des couleurs (voir *figure 9*).

De la même manière que la superposition des rayons a pu se traduire par une opération algébrique, il devrait donc être possible de traduire le mélange des encres par une autre opération algébrique tout aussi simple. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3° La "base soustractive" Cyan-Magenta-Jaune

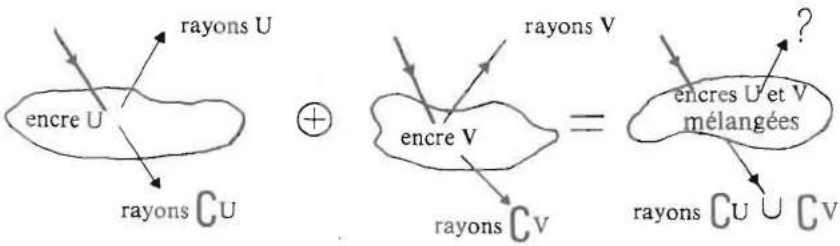


Figure 10

La *figure 10* montre bien ce qui se passe sur l'ensemble des rayons lorsqu'on mélange les encres U et V.

Les rayons absorbés par le mélange sont exactement $\complement U \cup \complement V$, c'est-à-dire $\complement(U \cap V)$. Les rayons renvoyés sont donc exactement $U \cap V$. L'opération correspondante dans l'ensemble des rayons est donc l'intersection.

Avec le code dans lequel les 3 couleurs de base sont le rouge, le vert et le bleu, l'opération correspondant au mélange des encres est donc le ET logique opérant sur chaque chiffre du code.

Exemple : On retrouve enfin ici le mélange "Bleu-Jaune" donnant du vert ! Pourtant Cyan et Bleu ne sont pas la même chose exactement (pour ce point de vocabulaire, voir plus loin).

$$\begin{array}{ccccc} \text{(Encre Cyan)} & \oplus & \text{(Encre Jaune)} & = & \text{(Encre verte)} \\ 0\,1\,1 & \oplus & 1\,1\,0 & = & 0\,1\,0 \end{array}$$

Cependant la plupart des gens qui manipulent, sans le savoir, des modèles mathématiques, semblent préférer le OU au ET, l'union à l'intersection, l'addition à la multiplication. Heureusement De Morgan vole à notre secours pour nous signaler que, si on intervertit les 0 et les 1, alors le ET devient le OU et nous pouvons retrouver l'addition bien aimée.

C'est ainsi que pour passer des rayons directs aux encres, il suffit véritablement d'inverser le modèle des paragraphe 1 et 2 :

- L'origine est en "blanc" (111 que nous noterons désormais $\overline{000}$)
- Les trois couleurs de base sont :

Cyan (011 notée maintenant $\overline{100}$)
Magenta (101 notée maintenant $\overline{010}$)
Jaune (110 notée maintenant $\overline{001}$)

et les couleurs (des encres) s'additionnent alors naturellement avec la différence signalée que le mélange $\overline{111}$ est le noir.

Ce modèle mathématique est évidemment postérieur à la construction et à la connaissance pratique (et artisanale) du système des couleurs. C'est pourquoi la synthèse des couleurs fabriquées par mélange à partir de la base (Cyan, Magenta, Jaune) est qualifiée de *soustractive* (par référence à l'absorption de rayon). La "logique" est ici arrivée trop tard !

Remarque sur les noms de couleurs :

Il est bien connu que chacun ne voit pas les couleurs comme son voisin ; et la traduction des noms de couleurs d'une langue à une autre pose des problèmes parfois insurmontables. Cette ambiguïté existe déjà dans le système ici expliqué ; ainsi la normalisation scientifique de la CIE attribue au BLEU la longueur d'onde 435,8 nm, au VERT 546,1 nm et au ROUGE 700 nm.

En France ce BLEU là serait plutôt qualifié de "Bleu soutenu" ou encore "d'Indigo" alors que le ROUGE serait plutôt appelé "Rouge-orange" (voir figure 6.b) et, la *base* des 3 couleurs utilisée en peinture est plutôt appelée "Rouge-Bleu-Jaune" et non "Magenta-Cyan-Jaune". On entend souvent parler d'ailleurs de "Rouge-Magenta".

Tout cela ne doit pas nous troubler outre mesure : le cube des couleurs n'est qu'un modèle abstrait. Nos yeux, nos impressions et notre culture ne coïncident heureusement pas avec $[0,1]^3$!

4. L'Algèbre des couleurs

Le modèle $[0,1]^3$ est évidemment trop fin pour le pouvoir séparateur de notre vue : à l'œil rien ne distingue la couleur (0,27 - 0,3 - 0,82) de la couleur (0,28 - 0,3 - 0,82).

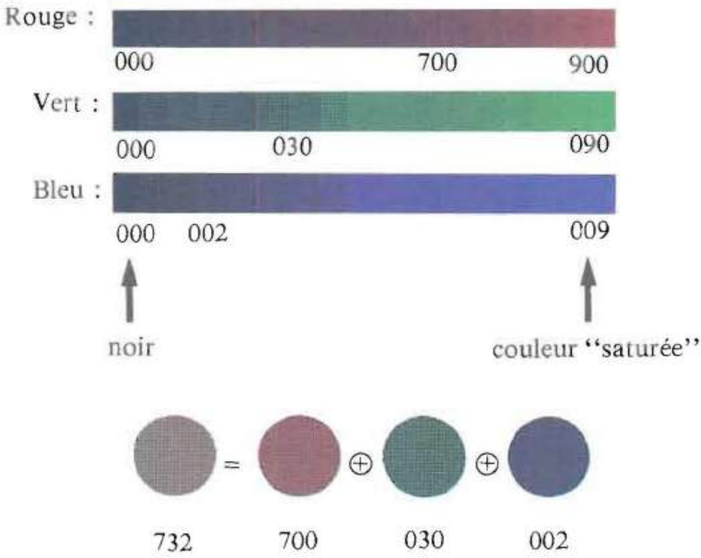


Figure 11

Un bon modèle numérique est alors celui qui ne conserve qu'une décimale significative. Chaque couleur peut alors être représentée par un nombre de trois chiffres entre 000 et 999 selon le principe exposé dans la *figure 11* où l'on s'est intéressé à la couleur 732 (vaguement orange).

Ce codage numérique fut proposé par Alfred Hickethier en 1925. Depuis, d'autres systèmes sont venus envahir le marché de la normalisation. Pourtant la simplicité de ce cube ainsi divisé en 1000 petits cubes passant graduellement du blanc au noir est extrêmement satisfaisante pour le mathématicien. En fait, Hickethier travaillait pour l'imprimerie et faisant de la synthèse soustractive à partir de Cyan ($\overline{100}$), Magenta ($\overline{010}$) et Jaune ($\overline{001}$).

Le passage du codage "additif" au codage "soustractif" n'offre aucune difficulté puisqu'il suffit de "passer au complémentaire" chiffre à chiffre. Ainsi :

$$732 = \overline{267}$$

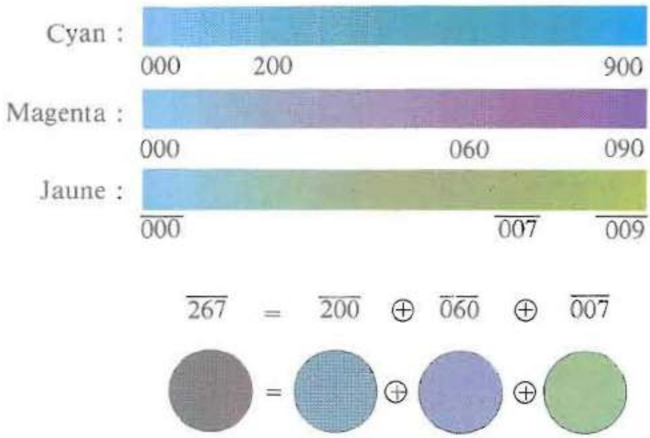


Figure 12

La *figure 12* montre la synthèse soustractive correspondante. On peut d'ailleurs vérifier, pour le plaisir, que l'addition fonctionne bien ; par exemple, on peut fabriquer l'orange bistrée $\overline{267}$ à partir d'un gris léger $(\overline{222})$ et d'un mélange de Rouge - Magenta moyen $(\overline{040})$ avec un jaune moyen $(\overline{005})$ comme cela est fait sur la *figure 13*

$$\overline{267} = \overline{222} + \overline{040} + \overline{005}$$

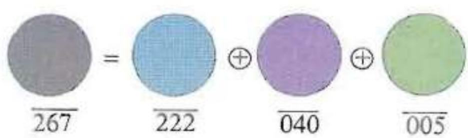


Figure 13

Conclusion :

Ces quelques pages n'avaient pas d'autre ambition que de réunir les quelques éléments de base nécessaire à l'apprenti coloriste. Si cette "algèbre" vous intéresse, il vous reste à vous munir de 3 vecteurs-outils de base : 3 projecteurs ou 3 encres selon votre style ou votre humeur. En ajoutant quelques filtres ou trames homogènes, vous ne tarderez pas à devenir des modélistes de talent. Et, pour peu que vous disposiez de transparents pour rétro-projecteur, vous allez vous sentir l'égal du plus célèbre des habitants de Givenchy.

Nous attendons vos "impressions" !