4

UN COIN DE CIEL

Matastro ou la suite enchantée

par Gilbert WALUSINSKI, St-Cloud

Dans le cadre du séminaire "**Concrétisation de la Mathématique**" qu'il anime, Jean-Michel Kantor, responsable du thème "Mathématiques" au futur Musée National des Sciences et des Techniques (La Villette), m'a demandé de discuter des liens entre l'astronomie et les mathématiques. Sujet qui présente le premier intérêt de ne pas être original. D'illustres savants y ont réfléchi ; certains se sont exprimés dans des écrits célèbres. Entre autres, **Henri Poincaré** : "L'astronomie", chapitre VII, entre "L'analyse et la physique" et "L'histoire de la physique mathématique" dans *La valeur de la science*, ou encore "La science astronomique" avec le chapitre sur "La Voie Lactée et la théorie des gaz" dans *Science et Méthode*. Pour ne rien dire des ouvrages du même Poincaré sur la mécanique céleste ou de ses célèbres et encore aujourd'hui délectables *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* qui datent de 1911 : les théories actuelles sous l'éclairage rasant du récent passé prennent un relief saisissant.

Bref, j'acceptai de parler du sujet, assuré que j'étais de ne pas trop dire de bêtises si je ne m'écartais pas trop du modèle. Et puis, c'était dans un séminaire : aux participants de corriger. Aux lecteurs, ici, de critiquer, de contredire ou de compléter.

Intimité oppositionnelle

A ne voir que l'évolution actuelle des mathématiques et de l'astronomie, on pourrait croire que tout oppose ces deux sciences, le niveau d'abstraction auquel se développent les premières, l'attachement congénital à l'observation que marque la seconde. L'histoire des sciences nous apprend pourtant qu'il n'existe aucune discipline totalement étrangère à ce que ses voisines peuvent lui apporter ou lui emprunter. Et, en ce qui concerne mathématiques et astronomie, c'est, tout au long de leur histoire, une longue intimité avec ce qu'il faut de conflits ou d'apparente opposition pour souder les alliances qui durent.

Tout cela par l'action en chaîne d'esprits raisonneurs qui ont imaginé des constructions aussi étranges que la sphère, l'ensemble des réels, les calendriers ou l'Univers.

On peut alors se demander qui a aidé au développement de l'autre, qui a bénéficié des découvertes de l'autre. Ce pourrait être un jeu de dresser ainsi des listes sur deux colonnes, à gauche ce que l'astronomie doit aux mathématiques, à droite ce que les mathématiques doivent à l'astronomie. Il ne suffirait d'ailleurs pas de compter les lignes dans chaque colonne, encore faudrait-il apprécier la valeur de chaque apport. Je n'ai pas la prétention, à la fin de cet exposé, de dresser le bilan d'une telle comptabilité.

Il me paraît plus important d'être persuadé dès l'abord que des liens étroits existent entre les deux disciplines et d'inventorier, d'explorer quelques exemples. Il reste pourtant une question de principe à discuter tout de suite : l'opposition qui peut paraître radicale entre les méthodes, la méthode déductive d'une part, l'observation et l'induction de l'autre. N'y a-t-il pas incompatibilité de comportement entre le fervent de la méthode axiomatique et l'infatigable mesureur à la poursuite d'une décimale révélatrice ? Tous les praticiens, astronomes ou mathématiciens, balaieront sans doute ces interrogations d'un sourire poli ou d'une manifestation plus vigoureuse de leur refus de telles caricatures. Réduire le mathématicien à un déducteur perpétuel est aussi faux que soupçonner l'astronome de ne rien voir en dehors de son télescope. Il est vrai que la méthode axiomatique donne aux mathématiques leur solidité et leur fécondité, mais la modélisation qui nourrit la recherche astronomique depuis **Anaximandre**, et sans doute bien avant, n'a pas fini de fournir aux astrophysiciens modernes sujets d'étude et programmes de recherche. Je risquerai cet aphorisme : "la modélisation est à l'astronomie ce que l'axiomatisation est aux mathématiques".

Et pour ne pas en rester aux généralités, j'en viendrai à quelques exemples, me laissant guider par des mots.

La géométrie

"Ce mot de géométrie signifie, à la lettre, l'art de mesurer la terre", écrit Rollin dans son *Histoire ancienne*. Il semble en effet que dans ses débuts elle se soit beaucoup intéressée à de telles mesures. Les inondations du Nil obligeaient les Egyptiens à perfectionner l'arpentage. Aucun savant, alors, n'aurait émis des propos désobligeants à l'égard d'une activité aussi importante pour l'économie du pays (ce qui n'était plus le cas, en 1964, dans la préface d'un ouvrage au demeurant fort estimable).

Mesure de la terre, oui, mais aussi mesure de la Terre, de cette boule sur laquelle nous avons choisi, nous l'humanité, de proliférer pour explorer, à partir de là, l'Univers environnant. La mesure du rayon de la Terre par **Eratosthène** est trop célèbre pour que nous nous étendions ici sur ce sujet. Disons seulement qu'une belle présentation de l'opération s'imposera au Musée. Signalons aussi le succès des opérations de mesure menées par la même méthode par des groupes scolaires ; un groupe de Monistrol-sur-Loire (Haute-Loire) s'est associé avec un groupe de Rozoy-sur-Serre (Aisne) : distance entre les deux groupes 489 km, valeur trouvée pour le rayon de la terre 6 185 km. Que des écoliers, en 1982, remettent leurs pas dans les pas d'Eratosthène, c'est de bonne pédagogie scientifique.

Les parallaxes

"Parallaxe est un mot grec qui signifie changement et on entend spécialement par ce mot le changement qui s'opère dans la position apparente d'un astre quand on l'observe d'un point qui n'est pas le centre de son mouvement." (**Delambre**, *Abrégé d'astronomie*). Aujourd'hui, on dirait plutôt que la parallaxe d'un astre mesure l'angle entre la direction selon laquelle il est vu d'un lieu donné et la direction selon laquelle il serait vu d'un certain point de référence.

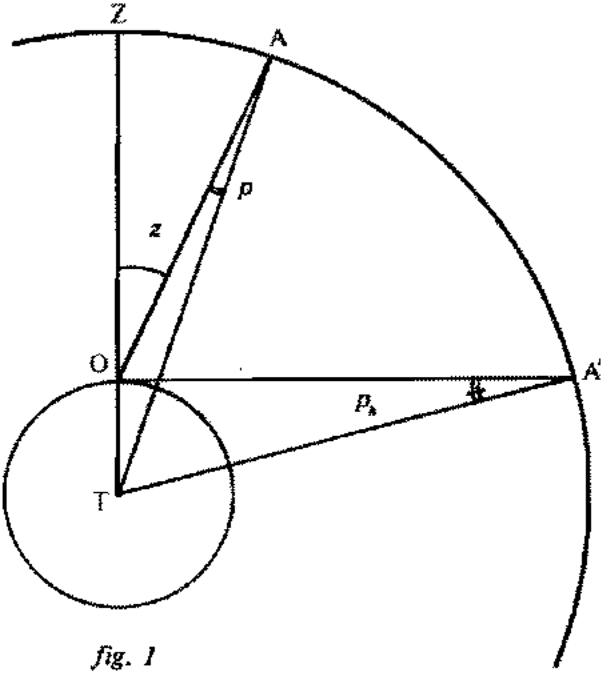

fig. 1

L'astre A observé de O est à distance zénithale z. De T, centre de la Terre, l'angle $\widehat{ZTA} = z - p$, p parallaxe de A.
Lorsque A est à l'horizon de O, soit A', la parallaxe horizontale de A est p_h, angle sous lequel de A' on voit le rayon de la Terre.

Les coordonnées des étoiles étant rapportées à un système de référence ayant pour origine le centre de la Terre, les observations faites à partir de chaque observatoire doivent en principe être corrigées d'un effet de parallaxe (*fig. 1*).

Ainsi la parallaxe du Soleil (ou de la Lune ou d'une planète) désigne-t-elle en abrégé la parallaxe horizontale de cet astre, c'est-à-dire, pratiquement, l'angle sous lequel on verrait le rayon équatorial de la Terre à partir du centre de cet astre. On comprend pourquoi les mesures de distances en astronomie résultent de soigneuses mesures d'angles, ce qui n'a été possible qu'après l'invention des lunettes : encore une des acquisitions essentielles du XVIIème siècle !

Dans le sens précédent, la parallaxe d'une étoile autre que le Soleil n'a pratiquement pas d'existence. D'ailleurs, qu'une constellation soit haute ou basse sur l'horizon, elle a toujours la même forme à nos yeux. On a alors défini la parallaxe d'une étoile comme l'angle sous lequel, de l'étoile, on verrait le rayon de l'orbite terrestre (encore baptisé unité astronomique). Mesurer cet angle n'était pas facile puisqu'il fallut attendre **Bessel** en 1840 pour mesurer la première parallaxe stellaire, celle de l'étoile 61 du Cygne, un angle de de 0'',348 (on donne plutôt, aujourd'hui, 0'',294, ce qui place l'étoile à plus de onze années de lumière de nous). On comprend que nombre d'astronomes aient passé de nombreuses nuits blanches avant de réussir à mesurer un tel angle, quitte, comme **Bradley** en 1826, à découvrir l'aberration de la lumière et donner, par conséquent, une preuve indubitable du mouvement de translation de la Terre autour du Soleil.

La sphère

Les traités classiques d'astronomie commencent tous par l'étude de la sphère. C'est le cadre obligé de toutes les observations, de toutes les

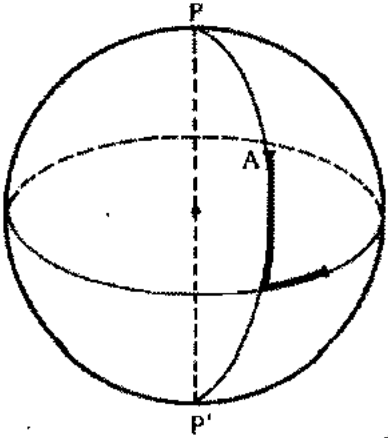

fig. 2

mesures, de tous les calculs. Longue et juste tradition qui remonte au moins à **Autolycos de Pitane** dont l'ouvrage, *La sphère en mouvement*, date de plus de trois siècles avant notre ère [voir la belle traduction par G. Aujac avec la collaboration de J.-P. Brunet et R. Nadal, édition Les Belles Lettres].

Les graphiques de relations ou de fonctions ont vite fait de rendre familières les coordonnées cartésiennes. La géographie comme l'astronomie exigent la compréhension des coordonnées sphériques. Le principe est aussi simple que celui des coordonnées planes : un grand cercle de la sphère et ses pôles, sur ce grand cercle une origine arbitrairement choisie, sur un demi grand cercle ayant pour diamètre les pôles, un arc allant du grand cercle au point repéré (*fig. 2*). Pour parler comme un géographe, la longitude mesurée sur l'équateur, la latitude sur le demi-cercle méridien.

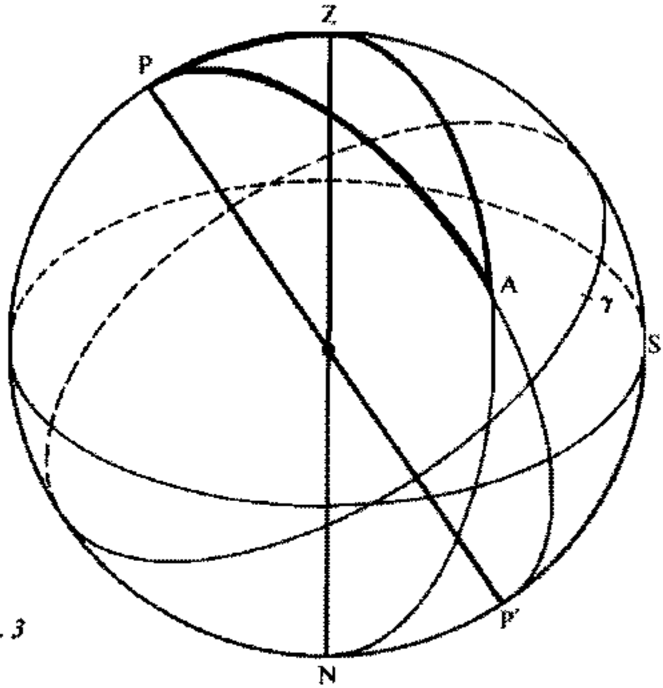

fig. 3

En astronomie sphérique, le passage des coordonnées horizontales aux équatoriales propose un joli problème élémentaire de trigonométrie sphérique : le triangle ZPA (Z, *zénith du lieu d'observation*, P, *pôle céleste boréal*, A, *étoile visée*) a pour côtés PZ, *colatitude du lieu d'observation*, PA, *codéclinaison de l'astre*, ZA, *distance zénithale de l'astre*, pour angles en P, *l'ascension droite de l'astre*, en Z, *le supplément de son azimut*. Les formules du triangle sphérique permettent le calcul des coordonnées horizontales connaissant les coordonnées équatoriales. Application immédiate : les Ephémérides donnant les coordonnées équatoriales du Soleil, en déduire la discussion de la durée d'insolation locale selon les saisons. Que signifie le soleil de minuit ? Pourquoi ne parle-t-on pas de la pleine lune de midi ? Pourquoi Dostoïevsky a-t-il intitulé un de ses romans *Les nuits blanches de Saint-Pétersbourg* ?

L'astronomie fournit ici maints thèmes d'exercices de géométrie sphérique, une mine à exploiter.

Le calendrier

L'alternance du jour (au sens de la non-nuit) et de la nuit entraîne *le comptage des jours* (au sens de la durée entre deux passages du Soleil au méridien du lieu). Le retour des saisons motive le groupement de ces jours en *années*. Les données de base sont l'année tropique (365,2422 jours) et la lunaison (29,5 jours) qui doit avoir donné l'idée du sous-groupement en mois et en semaines.

Chez les Hébreux, l'année de douze mois de 29 ou 30 jours alternativement n'avait donc que 354 jours ; en trois ans, ils compensaient le déficit en inventant *le treizième mois*.

Chez les Egyptiens de l'Antiquité, l'année vague de douze mois de 30 jours prend une dérive de un mois en 120 ans, de une année en 1461 années, durée appelée période sothiaque. (Du nom de Sothis, l'étoile du Grand Chien (Sirius), dont le lever héliaque au début de la période annonçait les inondations du Nil).

L'ingéniosité des Grecs de l'Antiquité est assez remarquable dans l'invention de la période octaétéride : l'année de douze mois de 29 ou 30 jours alternativement, soit 354 jours, était la même que celle des Hébreux, mais en ajoutant trois mois de 30 jours à huit années de 354 jours on trouve un total de 2922 jours dont le huitième est 365,25 et le 99ème est 29,5 jours.

L'histoire des calendriers julien et grégorien est trop connue pour qu'on y revienne ici. Je propose seulement le petit calcul suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 24 & \text{novembre} & 1982 & \longrightarrow & 80 & \longrightarrow & 20 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 3 & +\ 4 & +\ 5 & & + & & 6 & \equiv & 4 \pmod 7 \end{array}$$

Sachant que le 1er janvier 1901, premier jour du siècle, était un mardi, on en déduit que ce 24 novembre est un mercredi. Je laisse aux curieux le plaisir de décrypter le calcul et de vérifier ensuite que nos glorieux ancêtres ont bien pris la Bastille un mardi.

A comme Aristarque et Archimède

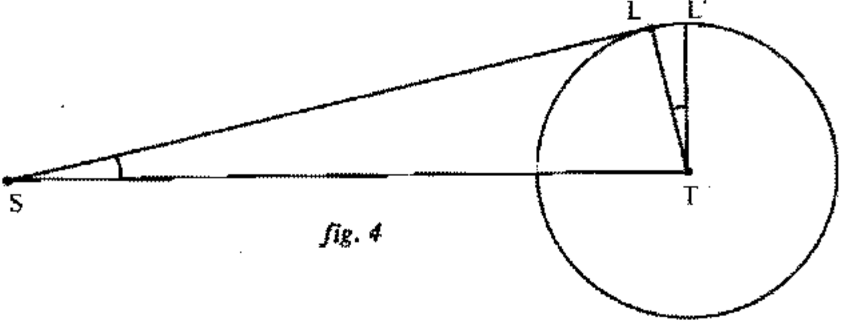

fig. 4

Ce sont des considérations géométriques bien connues qui permirent à Aristarque de Samos d'évaluer correctement la distance Terre-Lune, soit soixante rayons terrestres. Je voudrais m'attarder sur son estimation plus hasardeuse de la distance Terre-Soleil car elle est révélatrice de la puissance des méthodes géométriques.

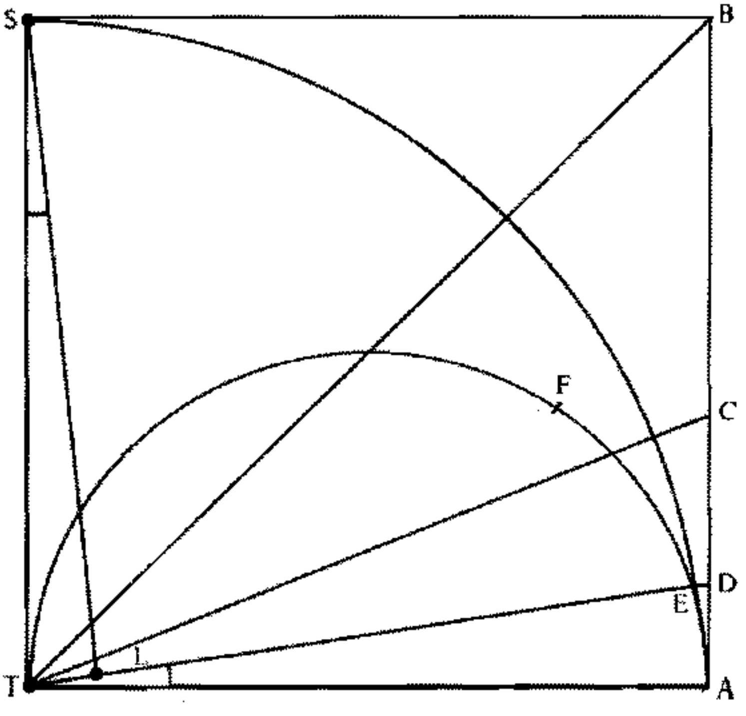

fig. 5 : Soleil S, *Terre* T, *Lune* L ; carré STAB, cercle de centre T et de rayon TS, cercle de diamètre TA, diagonale TB, TC bissectrice de l'angle $\widehat{ATB}$.

La donnée dont part Aristarque est l'angle qu'il évalue à 3° entre la position de la Lune en quadrature ($\widehat{STL'} = 90°$) et sa position en quartier ($\widehat{SLT} = 90°$) (*fig. 4*). L'évaluation est grossièrement fausse, il fallait dire 9' et non 3°, mais Aristarque ne dispose pas de lunette et je ne sais même pas s'il connaissait l'alidade. De plus, il ne dispose pas de trigonométrie pour exploiter sa donnée. C'est un géomètre ingénieux ; suivons sa démarche telle que nous la restitue **A. Pannekoek** dans son *History of Astronomy* (*fig. 5*).

L'idée d'Aristarque est d'évaluer le rapport TS/TL en l'encadrant.

1°) $TS/TL = TD/AD > AB/AD$

AC et AD sont des segments de la tangente au cercle en A ; leur rapport est supérieur à celui des arcs de cercle correspondants

$$\frac{AC}{AD} > \frac{1/4}{1/30} = \frac{15}{2} \quad ;$$

TC étant la bissectrice de l'angle $\widehat{T}$ du triangle ATB ,

$$CB/CA = TB/TA = \sqrt{2} > 7/5 \qquad \text{donc} \qquad AB/AC > 12/5$$

Conclusion : $AB/AD = (AB/AC)(AC/AD) > (15/2)(12/5) = 18$. Soit finalement

$$\boxed{TS/TL > 18}$$

2°) Dans le cercle de diamètre TA, l'arc AE mesure 6° ; soit alors un arc AF de 60°

$$\text{corde AF/corde AE} < \text{arc AF/arc AE} = 10$$

Conclusion : TA/corde AE < 20 soit finalement

$$\boxed{TS/TL < 20}$$

Le rapprochement des deux conclusions encadrées conduit à l'affirmation : *le Soleil est 19 fois plus loin que la Lune.*

Archimède en tirera la conclusion que le rayon du Soleil est au moins cinq fois celui de la Terre ; il est donc vraisemblable que c'est la Terre qui se déplace autour du Soleil plutôt que l'inverse, malgré les apparences.

Les polyèdres réguliers

Pour les Coperniciens de la Renaissance, il y a six planètes. Rheticus, disciple enthousiaste, va jusqu'à trouver une preuve du système de Copernic dans le fait que six est le premier naturel parfait !

L'idée du jeune **Kepler** est plus ingénieuse, plus étrange, et pourtant plus riche. Dans son *Mystère Cosmographique* qu'il publie en 1595 (il a 24 ans), il maintient comme Copernic que les planètes décrivent des orbites circulaires tracées sur six sphères concentriques, les orbes. Et pour soutenir les six orbes les unes dans les autres, il intercale les cinq polyèdres réguliers : "La Terre est la mesure de tous les autres orbes. Circonscris-lui un dodécaèdre : la sphère qui l'entoure est celle de Mars ; circonscris à l'orbe de Mars, un tétraèdre : la sphère qui l'entoure est celle de Jupiter. A l'orbe de Jupiter, circonscris un cube : la sphère qui l'entoure est Saturne. Place maintenant dans l'orbe de la Terre un icosaèdre : la sphère qui lui est inscrite est Vénus ; place dans l'orbe de Vénus un octaèdre, la sphère qui lui est inscrite est Mercure. Tu as là la raison du nombre des planètes".

Bien sûr, Kepler abandonnera par la suite cette séduisante construction : en bon mathématicien, il n'aurait pas prétendu tracer des orbites elliptiques sur des sphères. Mais il conservera l'essentiel, une échelle des distances des planètes au Soleil en relation avec leurs périodes, sa troisième loi. Plus tard, ressurgira l'idée d'une loi des distances au Soleil avec la formule de Titius-Bode.

La prosthaphaeresis

Les astronomes ont souvent de longs calculs à effectuer, ils ont donc été les premiers à chercher des simplifications, par exemple chercher un moyen de remplacer les multiplications par des additions ou la prosthaphaeresis pour donner son joli nom à cette méthode.

Elle vient de loin. **Ibn Yunus**, compagnon de Alhazen, popularise vers l'an mil la formule

$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

qui a fait la joie de ma jeunesse studieuse.

Mais l'événement, c'est la belle histoire d'amour qui a conduit aux logarithmes. En 1580, John Craig, médecin du roi James VI d'Ecosse, accompagne son souverain qui va chercher sa fiancée Anne de Danemark. La tempête fait échouer le bateau sur l'île où **Tycho Brahé** a construit Uraniborg, son célèbre observatoire. Craig apprend de Tycho ce que prosthaphaeresis veut dire. Au retour, il le raconte à son ami **Neper** qui en fait ses choux gras : *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* paraît en 1614.

Newton and Company

Alors que pour les Anciens — on l'a vu avec Aristarque — il n'y avait aucun obstacle à utiliser la géométrie, conçue à partir de l'expérience terrestre, dans des situations célestes, longtemps on distingua deux physiques, la terrestre et la céleste. Mais vint **Newton** : "il fallait être Newton pour apercevoir que la Lune tombe, quand tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas" (Paul Valéry, *Carnets*, XIV, 280).

En une seconde, la Lune passe de L à L' sur son orbite. Si la Terre ne l'attirait pas, elle serait en L" ; elle est donc tombée de L"L' :

$$L''L' = 2\,TL\;\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos\theta} \quad \text{soit} \quad L''L' = TL\;\frac{\theta^2}{2}$$

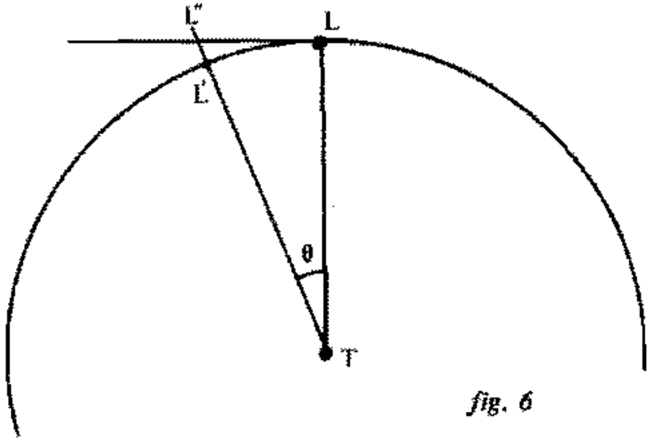

fig. 6

En une seconde, θ est facile à calculer : $\theta = \dfrac{2\pi}{27{,}322 \times 86400}$, soit

$$L''L' = 1{,}36 \text{ mm}.$$

Or, en une seconde, la pomme, pour reprendre l'image voltairienne, tombe de 4,9 m. Vous vérifiez

$$4{,}9/0{,}00136 = 3603 \approx 60^2.$$

Avec Newton, vous venez de mettre en évidence la loi de gravitation avec sa proportionnalité à l'inverse des carrés des distances puisque TL est approximativement soixante rayons terrestres.

A partir de là, je veux dire à partir de Newton, les relations entre mathématiques et astronomie ne sont plus seulement géométriques mais aussi mécaniques, c'est-à-dire physiques. L'analyse mathématique en porte la marque, y compris dans le vocabulaire : l'attraction universelle explique les marées et Newton appelle "fluxion" la variation des "fluentes", c'est-à-dire des variables.

Les liens entre mathématiques et astronomie apparaissent chez presque tous les mathématiciens du XVIIIe siècle. Les astronomes leur proposent de calculer les perturbations des planètes les unes sur les autres. Le mouvement de la Lune soumise à l'attraction principale de la Terre et du Soleil pose immédiatement le problème des trois corps. Clairaut, après avoir étudié la forme de la Terre, calcule avec une bonne approximation de combien Saturne et Jupiter retarderont le retour de la comète de Halley en 1759. Il échange avec **Euler** une correspondance sur le problème des *n* corps. En 1846, **Arago** fera un triomphe à la découverte de Neptune par **Le Verrier** "à la pointe de sa plume", autrement dit grâce au calcul des perturbations d'un astre hypothétique sur le mouvement d'Uranus.

Modèle

"Une représentation schématique, suffisamment proche du réel, et assez complète pour permettre l'extrapolation raisonnable et les confrontations fructueuses du lendemain" (J.-C. Pecker, *L'atmosphère solaire*, p.8). C'est un astrophysicien qui parle ainsi. Représentation schématique : elle s'exprime par des lois, des formules mathématiques grâce auxquelles des résultats nouveaux peuvent être prévus : "l'extrapolation raisonnable".

Le modèle newtonien n'a pas suffi lorsque l'extrapolation a envisagé des vitesses qui n'étaient plus négligeables vis-à-vis de celle de la lumière. L'existence de cette vitesse limite donne un poids nouveau à la critique de notions qui paraissaient triviales comme celle de la simultanéité. L'histoire de la relativité est étroitement liée à celle de l'astronomie. Contentons-nous ici de rappeler l'importance des mesures effectuées par **Arthur Eddington** lors de l'éclipse totale de Soleil de 1919 : oui, les rayons lumineux en provenance d'étoiles lointaines étaient bien légèrement déviés quand ils frôlaient la masse solaire.

Modèle newtonien, modèle relativiste, la science perfectionne les modèles qu'elle utilise sans renier ceux qui furent, un temps, à la pointe de la découverte et qui restent performants dans leur domaine.

Matastro

Alors, pour conclure, faut-il dire : "C'est l'astronomie qui nous a appris qu'il y a des lois" (H. Poincaré, *La valeur de la science*). Ou bien : "Que serait la pensée humaine si nous ne pouvions pas percevoir les étoiles ?" (Jean Perrin, préface à *l'Architecture de l'Univers* par Paul Couderc). Faut-il dire que sans l'astronomie il n'y aurait pas de mathématiques ?

Ce serait aussi peu justifié que d'imaginer une astronomie privée des ressources mathématiques, une science limitée à l'observation des apparences, qui serait bien débile en comparaison des méthodes de l'astronomie moderne. Faux débat que vouloir décider qui a mieux servi l'autre.

Pour nous autres qui enseignons des mathématiques, l'astronomie est à la fois une mine d'exercices, l'aspect astronomique ajoutant à l'intérêt mathématique de leur étude, et la source de considérations épistémologiques fort instructives. Une occasion merveilleuse de faire comprendre qu'aucun domaine scientifique n'est isolé des autres. Chaque science particulière vit de sa spécificité et de ses liens avec les autres spécialités.

Dans *L'Avenir de la Science*, Renan écrivait : "La condition essentielle d'un spectacle de marionnettes, c'est de ne pas apercevoir le fil". Si nous voulons, dans notre enseignement aussi bien que dans un grand musée des sciences, ne pas donner de la science l'idée d'une agitation de pantins étrangers les uns aux autres, nous devons montrer les fils.

Bibliographie

A. PANNEKOEK, *A history of Astronomy*, 1961, éd. Allen and Unwin, London.

H. POINCARE, *La Valeur de la Science*, éd. Flammarion.
Science et Méthode, éd. Flammarion.