1

ETUDES

Un objet 4-dimensionnel, le pentaèdre régulier, et son groupe d'isométries

par Lucien BENETEAU, IREM de Toulouse

Le triangle équilatéral admet $3! = 6$ isométries planes : les symétries par rapport aux 3 médiatrices et les produits de deux symétries, i.e. les 3 rotations (identité comprise). De même dans l'espace à 3 dimensions, le tétraèdre régulier admet $4! = 24$ isométries : 6 symétries orthogonales par rapport aux plans médiateurs des arêtes, 12 rotations (dont 3 ont pour axes les droites des milieux de deux arêtes opposées) et 6 permutations circulaires des sommets (produit de 3 symétries distinctes). D'où la question : quand peut-on dire qu'une figure de n points admet $n!$ isométries ?...

En fait, presque jamais dans "notre espace" à trois dimensions. Prenons un exemple : le cube. L'ensemble $\mathcal{C}$ de ses 8 sommets est réunion disjointe de 2 tétraèdres $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_\square$-classes d'équivalence pour la relation $d(M,N) = \sqrt{2}$ ou 0, l'arête du cube étant supposée de longueur 1. Il y a 24 isométries de $\mathcal{C}$ qui conservent $\mathcal{T}_0$ (ce sont *toutes* les isométries du tétraèdre $\mathcal{T}_0$), et 24 isométries de $\mathcal{C}$ qui échangent $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_\square$ (fig. 1).

Ces dernières s'obtiennent sous forme $\sigma o f$, où σ est l'une d'elles — une isométrie échangeant $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_\square$ que l'on a choisie — et où f varie dans le sous-groupe des isométries fixant $\mathcal{T}_0$. Cela fait 48 isométries au total. On est bien bien loin de $8!$. Du reste, il est clair qu'aucune isométrie du cube n'applique $\{A,B\}$ sur $\{A',C'\}$ puisque $d(A',C') = \sqrt{2} \neq 1 = d(A,B)$.

Prenons, *par exemple,* pour σ la symétrie par rapport à P, plan médiateur de (A,B) ; alors $g(\mathcal{T}_0) = \mathcal{T}_\square$ si et seulement si $g = \sigma o f$ avec :

$$f(\mathcal{T}_0) = \mathcal{T}_0 .$$

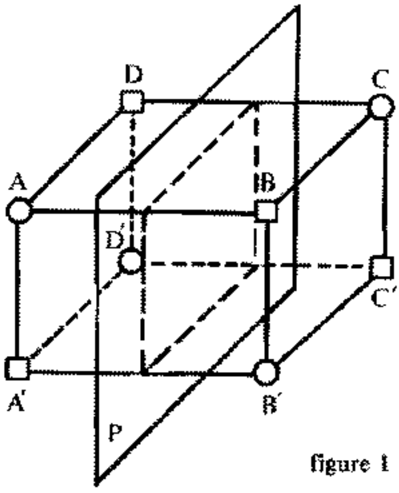

figure 1

Plus généralement *dans toute figure F de notre espace comportant $n > 4$ points, au moins deux couples de points ont des distances différentes*, et donc ne peuvent se correspondre par isométrie : *les $n!$ permutations des sommets ne sont donc pas toutes réalisables par isométrie.* Dans le plan on peut énoncer une propriété semblable pour $|F| > 3$. Comme le triangle équilatéral dans le plan, le tétraèdre régulier est le plus grande figure de l'espace $\mathbf{R}^3$ où la distance de deux points est constante, ce qui lui permet de "faire le plein" d'isométries.

Une précision : si une figure F plane comporte n points *non alignés*, alors toute isométrie conservant F est déterminée par la permutation qu'elle réalise sur les sommets de F. Ainsi, le groupe I(F) des isométries de F est isomorphe à un sous-groupe de S_n, groupe de toutes les permutations de n éléments. Il en résulte que si $n > 3$, alors $|I(F)|$ *est un diviseur strict de* $|S_n| = n!$ (en vertu du théorème de Lagrange). Même conclusion pour une figure de l'espace $\mathbf{R}^3$ comportant n points *non coplanaires* avec $n > 4$.

Nous allons maintenant construire un nouvel objet, le PENTAEDRE REGULIER, figure de cinq points de l'espace euclidien à quatre dimensions $\mathbf{R}^4$ possédant $5!$ isométries.

Pour cela, souvenons-nous. Comment construit-on un tétraèdre à partir d'un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$?
Supposons $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_1 = 1$ et cherchons un point A_4 de l'espace $\mathbf{R}^3$ qui vérifie $A_1A_4 = A_2A_4 = A_3A_4 = 1$. L'équibarycentre $G = (A_1 + A_2 + A_3)/3$ est aux deux-tiers de la hauteur :

$$GA_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{(fig. 2)}$$

Tout point M de la perpendiculaire D au plan $A_1A_2A_3$ passant par G vérifie $MA_1 = MA_2 = MA_3$ et $MA_1^2 = MG^2 + \frac{1}{3}$. On aura $A_1A_4 = 1$ si A_4 est l'un des deux points M définis par $MG^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

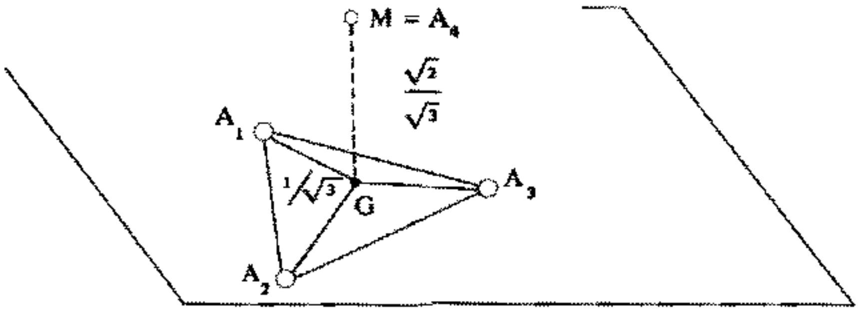

figure 2

Faisons de même à présent pour compléter le tétraèdre

$$\mathcal{T} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \qquad \text{(fig. 3)}$$

par un cinquième point A_5 à distance 1 de chacun des sommets. Cette fois-ci l'équibarycentre Γ de $\mathcal{T}$ est aux 3/4 de la hauteur :

$$\Gamma A_i = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,\sqrt{2}/4 < 1 \qquad \text{pour } i = 1,2,3,4\ .$$

Plaçons-nous dans $\mathbf{R}^4$. Les 4 points de $\mathcal{T}$ engendrent un hyperplan H de $\mathbf{R}^4$, i.e. une variété de dimension 3. Donc, l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{\Gamma N}$ est orthogonal à H est une droite passant par Γ. Tout point N de cette droite vérifie :

$$NA_1^2 = N\Gamma^2 + \Gamma A_1^2 = N\Gamma^2 + \frac{6}{16} = NA_2^2 = NA_3^2 = NA_4^2\ .$$

On aura donc $A_5A_i = 1$ pour $i = 1,2,3,4$ si A_5 est l'un des deux points N déterminés par $\Gamma N^2 = 1 - \frac{3}{8}$, soit $\Gamma N = \sqrt{5}\,\sqrt{2}/4 = \sqrt{10}/4$.

Plus généralement, dans tout **R**-espace euclidien de dimension n, on peut construire *un repère de* $n+1$ *points* A_i *avec* $A_iA_j = 1$ *pour tout* $i \neq j$. On procède par récurrence en partant d'une figure de n points possédant cette propriété, soit $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Soit $h_n = A_nG$ où G est l'équibarycentre de $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence, nous supposons $h_n < 1$. L'équibarycentre Γ de $\mathcal{F}$ vérifie $A_1\Gamma = \frac{n-1}{n}\, h_n < 1$ de sorte que l'on pourra prendre pour A_{n+1} l'un

quelconque des deux points N déterminés par $\Gamma N^2 = 1 - \frac{(n-1)^2}{n^2} h_n^2$.
En outre, la "hauteur" de la nouvelle figure obtenue vérifie $h_{n+1}^2 = \Gamma N^2 < 1$, ce qui permet de poursuivre la récurrence.

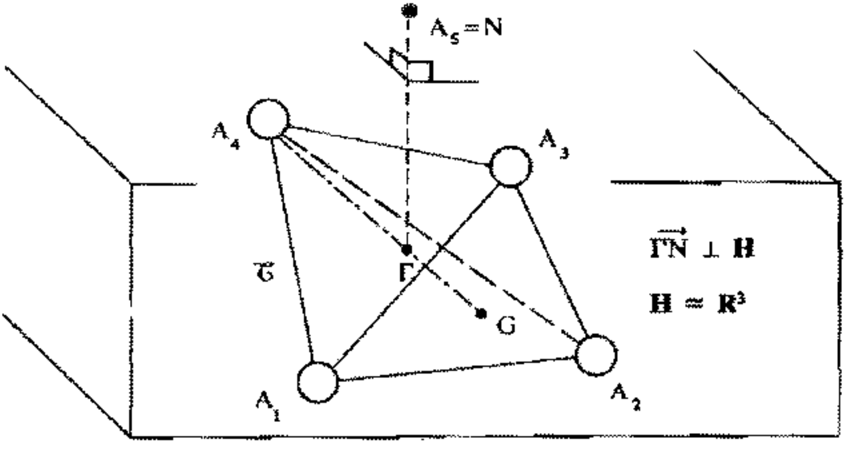

figure 3 $\qquad G = \dfrac{A_1 + A_2 + A_3}{3}$; $\Gamma = \dfrac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}$

Pourquoi le pentaèdre régulier $\mathcal{T}$ admet-il $120 = 5!$ isométries ? Etant donnés deux points A_i et A_j de $\mathcal{T}$, l'hyperplan médiateur $\mathbf{H} = \text{méd}(A_i, A_j)$ (i.e. le sous-espace affine formé des points équidistants de A_i et A_j) contient les 3 autres points de $\mathcal{T}$, de sorte que la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbf{H}$ laisse invariant ces trois points et échange A_i et A_j. Ainsi le groupe des permutations des sommets réalisées par isométries contient les transpositions (A_i, A_j), et donc aussi toute permutation des sommets (toute permutation est un produit de transpositions). Par conséquent, $\mathbf{I}(\mathcal{T}) \simeq \mathbf{S}_5$ et les isométries positives de $\mathcal{T}$ forment un sous-groupe $\mathbf{I}^+(\mathcal{T}) \simeq \mathbf{A}_5$ (groupe des permutations paires sur 5 éléments, le plus petit des groupes simples non abéliens). On montre de même que le groupe d'isométries d'un ensemble "équidistant" de $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ est isomorphe à $\mathbf{S}_{n+1}$.

A partir de l'équibarycentre G d'un ensemble équidistant, on "voit" deux points quelconques de l'ensemble sous un angle constant, (le produit scalaire $\overrightarrow{GA_i} \cdot \overrightarrow{GA_j}$ est indépendant du choix de i et j pour $i \neq j$, par transitivité).

La construction donnée ici du pentaèdre régulier n'est qu'une mise en forme détaillée d'une idée de Roger DESQ. Pour mémoire, rappelons que $\mathbf{A}_5$ se décrit aussi comme le groupe des isométries positives de l'icosaèdre (qui admet pour groupe d'isométries total $\mathbf{A}_5 \times \mathbf{Z}_2$).