2
ÉCHANGES

Mathématiques et Prestidigitation

par André ANTIBI, IREM de Toulouse

PREAMBULE

Dans l'étude qui suit, on ne s'intéresse qu'à un aspect, très important certes, de l'enseignement des mathématiques : "Comment apprendre aux élèves à faire des démonstrations". L'enchaînement des diverses étapes d'une démonstration nécessite des justifications mathématiques ; les enseignants, bien sûr, les fournissent. Mais on ne met pas suffisamment l'accent (souvent pas du tout) sur un autre type de justifications, tout aussi importantes pour l'élève, qu'on pourrait appeler "justifications démonstratives" : pourquoi passe-t-on d'une étape à la suivante ?

L'auteur du présent article tient à préciser que, dans son enseignement, il n'accorde pas toujours suffisamment d'importance à ce second type de justifications et qu'il a lui-même, très longtemps, proposé aux élèves certaines démonstrations considérées dans l'étude qui suit comme non naturelles.

SOMMAIRE

4. Problèmes d'existence et problèmes de détermination de points vérifiant une propriété donnée.

   4.1. Inventaire des types de problèmes. Exemples.

   4.2. Méthodes de résolution
   - Problèmes de détermination de points vérifiant une propriété donnée.
   - Problèmes d'explicitation d'un élément vérifiant une propriété donnée.
   - Problèmes d'existence
   - Problèmes d'existence et d'unicité

Conclusion.

INTRODUCTION

Les mathématiques sont considérées par beaucoup de personnes comme une discipline difficile, et il est généralement admis, de façon plus ou moins explicite, que, pour réussir dans cette matière, il faut être "doué", avoir "la bosse des Maths". Il n'est donc pas surprenant que les mathématiques constituent souvent un moyen privilégié de sélection. Au cours des nombreux débats d'enseignants relatifs à ces problèmes, il est question fréquemment de programmes trop chargés, d'effectifs trop lourds, de notions trop abstraites, de manque de liaison entre deux classes successives. Certes, les travaux effectués sur ces divers points ont contribué à améliorer l'enseignement des mathématiques.

Mais les enseignants eux-mêmes restent toujours persuadés, pour la plupart, qu'il est très difficile de faire progresser de manière sensible un élève "peu doué". Dans le meilleur des cas, un tel élève saura utiliser quelques "recettes" très "classiques" pour résoudre certains problèmes, mais progressera vraiment très peu sur le plan de la "rigueur" ou de la "vivacité de raisonnement".

A quoi sert, dans ces conditions, notre enseignement ? Il permet, bien sûr, aux élèves, de connaître de nouvelles notions et d'utiliser certaines techniques qu'ils pourront appliquer dans d'autres disciplines, par exemple en Sciences Physiques. Mais, tel qu'on le conçoit actuellement, il ne permet pas vraiment d'améliorer la manière de raisonner de l'élève. En effet, en quoi consiste l'enseignement des mathématiques ? Il comprend essentiellement du cours fait par le professeur (introduction et définition de nouvelles notions et démonstration de théorèmes) et des problèmes où on demande à l'élève de démontrer certaines propriétés, celui-ci pouvant utiliser tous les théorèmes établis en cours. Et c'est l'aptitude de chaque élève à *résoudre des problèmes* en temps limité qui détermine sa "valeur mathématique". On peut se poser alors une question bien naturelle :

1. Apprend-on à un élève à résoudre un problème ?

Eh bien : "NON" !

Cette réponse un peu brutale, surprenante peut-être, correspond malheureusement à la réalité.

En effet, voyons d'abord comment se déroule, la plupart du temps, le cours fait par le professeur. Il est clair que la définition de nouvelles notions et l'énoncé de théorèmes font peu appel au raisonnement de l'élève. Reste la démonstration des théorèmes. A partir de certaines hypothèses, le professeur arrive à la conclusion en passant par plusieurs étapes intermédiaires. Mais si cette démonstration est faite de manière très rigoureuse, très claire, par un "très bon professeur", et si celui-ci ne dit pas *pourquoi* on passe d'une étape à la suivante, l'élève assiste à tout cela, peut-être avec un certain plaisir d'ailleurs, comme à un très bon numéro de prestidigitation. Après tout, pourrait-on se dire, quel mal y a-t-il à cela ? Les élèves bénéficient d'un bon spectacle, effectivement. Mais il faut avoir conscience qu'en procédant ainsi on n'apprend pas à l'élève à faire une démonstration, à résoudre un problème : le prestidigitateur qui fait apparaître miraculeusement des pigeons se fait applaudir, mais, après avoir assisté à ce numéro, le spectateur n'est pas capable d'en faire autant ; s'il veut y arriver, il lui faudra prendre des leçons de prestidigitation. Or, qu'attend-on d'un élève ? Sur quoi le juge-t-on ? On le juge sur son aptitude à faire sortir des pigeons, à faire lui-même des démonstrations. Il a donc besoin de leçons de prestidigitation. Il est clair alors que, de même qu'un mauvais prestidigitateur laisse entrevoir plus facilement ses méthodes, le professeur qui hésite en cours de démonstration et qui laisse entrevoir comment il arrive à la conclusion est souvent, contrairement aux apparences, bien plus utile aux élèves.

En ce qui concerne les exercices et les problèmes, l'élève, le plus souvent, essaie, avec plus ou moins de succès, de trouver lui-même une solution. Ensuite, la correction se fait, la plupart du temps, de la même manière que la démonstration d'un théorème du cours : on expose ce qu'il faut faire sans analyser pourquoi on le fait. Ainsi, l'élève qui n'avait pas su faire l'exercice est tranquilisé d'une certaine manière, car il prend connaissance d'une solution possible, souvent mystérieuse à ses yeux, mais n'apprend toujours pas à faire une démonstration. Evidemment, après avoir assisté à la correction d'un très grand nombre d'exercices du même type portant sur les mêmes notions, certains élèves, les "meilleurs", peuvent ensuite trouver seuls la solution d'un exercice semblable : il est faux d'en conclure que de tels élèves ont appris à faire une démonstration ; ils ont simplement assimilé une "recette". Et en définitive c'est l'aptitude d'un élève à assimiler et à utiliser plus ou moins vite des recettes qui détermine sa valeur mathématique. Il n'est alors pas surprenant du tout de voir que la très grande majorité des élèves sont incapables de résoudre un problème d'un type nouveau : ils ne sont pas préparés à cela.

On peut se demander pourquoi l'enseignement des mathématiques se fait ainsi. Est-ce tout simplement par habitude, par tradition ? Est-ce à cause du manque de temps compte tenu de programmes trop chargés ? Certains enseignants aiment-ils, au fond d'eux-mêmes, le côté magique des mathématiques qui, envoûtant les élèves, leur permet d'enseigner dans un silence absolu ?

2. Est-il possible d'apprendre à un élève à résoudre un problème ?

Eh bien : "OUI",

Comment faire ? D'abord, évidemment, il faut vouloir le faire. Avant toute chose, l'enseignant devrait faire réfléchir l'élève sur le genre de problème qu'il a à résoudre.

2.1. On peut, pour cela, commencer par analyser les hypothèses et la conclusion. Signalons, à ce sujet, quelques points fondamentaux que tout élève devrait connaître dès le collège.

Les hypothèses

Les hypothèses sont des propriétés supposées connues et que l'élève peut utiliser dans sa démonstration. Elles sont de deux types :

— *les hypothèses spécifiques* au problème considéré.

— *les hypothèses non spécifiques* au problème considéré : ce sont toutes les propriétés mathématiques que l'élève est supposé connaître, au moment où il cherche à résoudre le problème. Il y a donc, dans ces hypothèses non spécifiques, d'une part tous les théorèmes mathématiques démontrés en cours à l'élève depuis le début de sa scolarité, et d'autre part, dans un devoir comportant plusieurs questions, les résultats établis aux questions précédentes. Ces hypothèses non spécifiques sont très nombreuses ; d'autant plus nombreuses d'ailleurs que le niveau mathématique de l'élève est plus élevé. Mais la plupart du temps, la nature du problème posé laisse facilement entrevoir (éventuellement en cours de démonstration) lesquelles vont être utilisées.

La conclusion : C'est la propriété à démontrer.

Deux cas sont envisageables : *elle est connue ou elle ne l'est pas.*

— *La conclusion est connue* lorsqu'on demande de démontrer qu'une certaine propriété donnée est vraie. Donnons-en des exemples :

• Démontrer qu'un certain quadrilatère est un parallélogramme

• Démontrer que la fonction f : $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0

• Démontrer qu'une équation admet au moins une solution dans un ensemble donné. Ce genre de question peut aussi se formuler, en notant S l'ensemble des solutions de l'équation : Démontrer que S est non vide. Sous cette forme, on voit bien que la conclusion est connue.

— Donnons quelques exemples où *la conclusion n'est pas connue* :

• La fonction f : $x \longmapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Plus généralement on peut transformer ainsi n'importe quel problème où la conclusion est connue en un problème où elle ne l'est pas : il suffit de remplacer "démontrer que..." par "est-ce que...".

• Résoudre une équation ou une inéquation (ou un système d'équations ou d'inéquations).

• Développer une expression algébrique.

• Ecrire sous forme d'un produit de facteurs du premier degré une expression algébrique (factorisation en classe de Troisième)

• "Que peut-on en déduire ?" ou bien "Que peut-on dire..." Notons que ce cas est distinct des précédents car non seulement on ne connaît pas la conclusion, mais on ne sait même pas ce qu'il faut démontrer.

• Déterminer le nombre de paquets de cinq cartes, prises dans un jeu de 32 cartes, contenant 3 cœurs.

Plus généralement, dans l'énoncé des problèmes de dénombrement, on indique très rarement la réponse (c'est, en quelque sorte, une tradition).

Il est clair que le fait de connaître la conclusion ne peut que simplifier un problème, parfois même au point de le rendre trop facile. C'est le cas si, dans une factorisation en Troisième, on indique la réponse (il suffit alors de développer) ou si, dans une équation du second degré admettant 2 racines, on indique les 2 racines (il suffit de remplacer la variable par chacune des racines).

Dans le cas où la conclusion est connue, on dispose de deux méthodes de démonstration qu'on ne peut pas utiliser lorsque la conclusion n'est pas connue : on peut raisonner par l'absurde, on peut aussi partir de la conclusion.

Le raisonnement par l'absurde : on suppose que toutes les hypothèses (spécifiques au problème ou non) sont vraies et que la conclusion est fausse. Si, en raisonnant par implication on arrive à une propriété contredisant l'une des propriétés supposées vraies au départ, ou établies en cours de démonstration, cela signifie que le fait de supposer la conclusion fausse est absurde, donc la conclusion est vraie.

Ce raisonnement est surtout commode lorsque le fait de supposer la conclusion fausse fournit une hypothèse qui, jointe aux autres, laisse entrevoir un départ possible de la démonstration.

Signalons que lorsqu'on fait une démonstration par l'absurde (pour résoudre un problème où la conclusion est connue), on se trouve en présence d'un problème où la conclusion n'est pas connue, donc d'un problème, a priori, plus difficile. Cette méthode de démonstration ne doit donc être utilisée que dans les cas où on ne voit pas comment démarrer à partir des hypothèses et où on ne peut pas partir de la conclusion.

• Qu'entend-on par *"partir de la conclusion"* ?

Notons (H) l'ensemble des hypothèses et (C) la conclusion. Pour démontrer que (H) implique (C), la démonstration nécessite souvent plusieurs implications successives. Il arrive fréquemment que lorsqu'on essaie d'arriver jusqu'à (C) en partant de (H) on soit "bloqué" (parfois même au début). Ceci peut se produire lorsque "la distance" entre (H) et (C) est "trop grande", c'est-à-dire nécessite plusieurs implications. On n'arrive pas alors à les prévoir toutes. Dans ce cas on peut essayer de réduire la "distance" entre (H) et (C) en rapprochant (C) de (H). De manière plus précise, on remplace (C) par une propriété (C_1) qui implique (C) et qui semble plus proche de (H). Il suffit alors d'arriver à (C_1). On peut, suivant les cas, soit aller jusqu'à (C_1), soit remplacer (C_1) par une propriété (C_2) qui implique (C_1), et ainsi de suite.

Parfois d'ailleurs, en remplaçant simplement (C) par des propriétés équivalentes (C_1), (C_2), ..., on arrive jusqu'à (H). En procédant ainsi, la démonstration est souvent bien plus simple et plus naturelle (et tout aussi rigoureuse) que si on s'épuise, en partant de (H), à vouloir arriver directement jusqu'à (C). Beaucoup d'étudiants à l'Université, spécialisés en mathématiques, sont persuadés qu'il est incorrect de "partir" de la conclusion (C) pour faire une démonstration !. D'autres pensent qu'on peut éventuellement procéder ainsi sur son brouillon, mais que lors de la rédaction définitive de la solution, il faut ordonner les diverses étapes de la démonstration en partant des hypothèses ; ainsi les propriétés naturelles (C_1), (C_2), ... apparaissent souvent, de manière mystérieuse, comme des étapes astucieuses de la démonstration. En d'autres termes, pour reprendre l'analogie avec le prestidigitateur, le numéro se prépare d'une certaine manière au brouillon, et se présente dans ce cas d'une tout autre manière. Les enseignants et les auteurs de manuels scolaires procèdent souvent ainsi (malheureusement pour les élèves !).

2.2. *Comment apprendre à un élève à résoudre un problème ?*

Certainement pas en se contentant de donner une solution au problème, ce qui, malheureusement, est très souvent le cas. Les élèves qui, avec un tel enseignement, arrivent néanmoins à s'en sortir, sont ceux qui ont réussi tout seuls à assimiler des mécanismes de résolution de certains types de problèmes et à les utiliser pour résoudre des problèmes analogues. Pour permettre à ces élèves de mieux comprendre ce qu'ils font, et aux autres (les moins "bons") de faire des progrès, *il faut insister beaucoup plus sur la démarche d'une démonstration que sur la démonstration elle-même.* Ceci pourrait être fait dès la classe de sixième. Dans certains cas, il ne faudrait pas hésiter à consacrer, pour une démonstration pouvant être exposée en cinq minutes, une heure pour analyser la démarche de la démonstration ; cette analyse peut se faire avant la démonstration (étude des hypothèses et de la conclusion), pendant la démonstration, et après. Une fois la démonstration terminée, on pourrait alors faire un récapitulatif des différentes étapes en se posant pour chacune d'elles la question : "Pourquoi a-t-on procédé ainsi ?"

Les étapes pour lesquelles on ne trouve pas de réponse satisfaisante à cette question peuvent être considérées comme "difficiles". Ces passages difficiles sont d'ailleurs beaucoup plus rares qu'on ne croit. Lorsqu'il y en a, on peut voir s'il n'y avait pas une autre démonstration plus facile.

Il est clair que si on a le choix entre une démonstration sans étapes difficiles et une démonstration comportant une étape difficile (une "astuce"), il faut donner aux élèves la première, même si la seconde est plus courte ! Parfois, il peut être utile d'indiquer les deux : c'est le cas par exemple si la seconde démonstration est nettement plus courte que la première, ou si "l'astuce" peut être utilisée dans d'autres problèmes, ou tout simplement pour comparer une démonstration normale (sans astuce) et une démonstration astucieuse. *En tout cas, il ne faut surtout pas se contenter de donner la démonstration astucieuse sans dire un mot de l'autre,* car alors les élèves, convaincus de la nécessité de l'astuce, garderont une fausse idée de cette démonstration. Un tel enseignement ne forme pas les élèves à la résolution de problèmes : il les déforme. Certains enseignants, malheureusement pour les élèves, ne partagent pas ce point de vue et aiment un peu trop les "jolies démonstrations astucieuses".

L'analyse de la démarche d'une démonstration demande, bien sûr, du temps. Mais si elle est faite de manière approfondie pour un problème donné, on pourra par la suite, pour des problèmes analogues, faire une analyse plus sommaire. *En tout cas, il est nettement plus formateur de traiter en profondeur la démonstration d'un seul problème que d'en traiter plusieurs superficiellement, c'est-à-dire en se contentant de donner les solutions.*

3. Exemples

Exemple 1 *(niveau Troisième)*

Démontrer que pour tous réels a,b tels que : $a \leqslant b$, on a :

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$$

Solution usuelle :

Supposons que : $a \leqslant b$. En ajoutant a aux deux membres de cette inégalité on obtient : $2a \leqslant a+b$, d'où en divisant les deux membres par 2 : $a \leqslant \frac{a+b}{2}$.

De même, en ajoutant b aux deux membres de l'inégalité $a \leqslant b$, on obtient : $a+b \leqslant 2b$, d'où, en divisant par 2, $\frac{a+b}{2} \leqslant b$.

Commentaire :

Dans cette solution, on ne dit rien pour justifier l'enchaînement des différentes étapes de la démonstration. Les élèves qui n'avaient pas su faire, seuls, un tel exercice, comprendront vraisemblablement cette solution mais penseront, peut-être, que ce n'était pas facile et qu'il fallait savoir comment démarrer.

On va voir comment procéder pour que la correction d'un tel exercice permette d'apprendre aux élèves à faire des démonstrations.

Analyse des hypothèses et de la conclusion

Il y a deux hypothèses spécifiques : "a et b sont réels" et "$a \leqslant b$". Quant aux hypothèses non spécifiques, ce sont toutes les propriétés mathématiques supposées connues en Troisième : elles sont nombreuses. Mais il est normal de penser, compte tenu de la nature du problème (inégalités dans $\mathbb{R}$), à deux propriétés fondamentales : l'une, H_1, concernant la relation d'ordre et l'addition (tout se passe comme pour une égalité), l'autre, H_2, la relation d'ordre et la multiplication (attention à la multiplication par un nombre strictement négatif : on change le sens de l'inégalité).

La conclusion, ici, est connue : ce sont les deux propriétés $a \leqslant \frac{a+b}{2}$ et $\frac{a+b}{2} \leqslant b$. On peut donc, si cela est plus commode, raisonner par l'absurde ou partir de la conclusion. Ici on voit bien que le raisonnement par l'absurde ne simplifie pas le problème. Par contre, essayons de partir de la conclusion.

Notons (C) la propriété $a \leqslant \frac{a+b}{2}$. On a, pour tous réels a et b :

$$\underbrace{a \leqslant \frac{a+b}{2}}_{(C)} \xleftrightarrow{\text{d'après } H_2} \underbrace{2a \leqslant a+b}_{(C_1)} \xleftrightarrow{\text{d'après } H_1} \underbrace{a \leqslant b}_{(C_2)}$$

(C_2) n'est autre que l'hypothèse spécifique. Donc (C) est démontrée. On démontre de même la propriété : $\frac{a+b}{2} \leqslant b$.

Si on essaie de faire cette démonstration en partant de l'hypothèse $a \leqslant b$, *il faut surtout bien faire remarquer que dans la conclusion figure la somme* $a+b$. Pour la faire apparaître, on peut ajouter aux deux membres de l'inégalité $a \leqslant b$, soit a, soit b.

Présentée ainsi, cette étape de la démonstration est naturelle. Quant à la deuxième et dernière étape, elle est encore plus simple : on voit bien qu'il suffit de diviser par 2.

Ici, en partant de la conclusion, la démonstration est plus simple, les propriétés C_1 et C_2 s'obtenant immédiatement.

Exemple 2 *(niveau Troisième)*

Soit $a,b,c,d,$ **des réels tels que** $0 \leqslant a \leqslant b$ **et** $0 \leqslant c \leqslant d$.

Démontrer que : $ac \leqslant bd$.

Commentaire :

Il convient, comme dans l'exemple 1, de justifier les étapes de la démonstration. L'analyse des hypothèses et de la conclusion est tout à fait analogue à l'analyse faite pour l'exemple 1. Ici aussi, la conclusion est connue et le raisonnement par l'absurde ne simplifie pas le problème. On peut partir de la conclusion, mais dans ce cas on ne voit pas apparaître immédiatement des propriétés impliquant la conclusion et semblant plus proches des hypothèses.

Partons donc des hypothèses. Il s'agit alors de bien justifier les étapes de la démonstration. Dans la conclusion figurent les produits ac et bd. Comment les faire apparaître ? On peut faire remarquer d'abord que l'hypothèse implique que a,b,c et d sont positifs ou nuls. Pour faire apparaître ac, on peut multiplier les deux membres de l'inégalité $a \leqslant b$ par c (ou encore les deux membres de l'inégalité $c \leqslant d$ par a). On obtient 1 : $ac \leqslant bc$ (ou 1' : $ac \leqslant ad$). Pour obtenir bd on peut multiplier par d les deux membres de l'inégalité $a \leqslant b$ (ou par b les deux membres de l'inégalité $c \leqslant d$). On obtient 2 : $ad \leqslant bd$ (ou 2' : $bc \leqslant bd$). 1 et 2' permettent de conclure. 1' et 2 aussi.

Avec cette présentation, la démonstration est naturelle. On peut faire remarquer enfin que ac et bd peuvent apparaître en multipliant les deux membres de l'inégalité $a \leqslant b$ par c, puis par d. On obtient successivement : $ac \leqslant bc$ et $ad \leqslant bd$. Mais là on ne peut pas conclure : c'est normal car on n'a pas utilisé *toutes* les hypothèses spécifiques : seules ont été utilisées les hypothèses : $a \leqslant b$, $c \geqslant 0$ et $d \geqslant 0$.

Exemple 3 *(Niveau Troisième)*

Soit un parallélogramme ABCD et soit M un point du plan.

Démontrer que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Dans ce problème, comme dans les deux précédents, la conclusion est connue ; l'hypothèse spécifique "ABCD est un parallélogramme" peut s'expliciter de plusieurs manières équivalentes. D'après la forme de la conclusion, il est normal d'écrire cette hypothèse sous forme vectorielle, et sans faire intervenir le point d'intersection des diagonales.

ABCD parallélogramme $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Ici aussi, la nature du problème laisse entrevoir les hypothèses non spécifiques susceptibles d'être utilisées : ce seront essentiellement les propriétés de calculs dans l'ensemble des vecteurs du plan.

Partons de l'hypothèse. Comment, à partir de l'hypothèse $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, faire intervenir le point M qui figure dans la conclusion, et plus précisément les vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MD}$? Il est tout à fait normal de penser à la relation de Chasles, car c'est la seule propriété permettant, en remplaçant un vecteur par la somme de deux autres vecteurs, d'introduire un nouveau point.

On obtient :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{DM}$
$\Longrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$. D'où la conclusion demandée.

On peut aussi, puisque la conclusion © est connue, partir de la conclusion en la remplaçant par une égalité équivalente dans laquelle les points A et B seront, comme dans l'hypothèse, dans un même membre. On a :

$$© \Longleftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$$

Or $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$ (Chasles). D'où la démonstration.

Exemple 4 *(Niveau Bac + 1) (extrait du problème ENSI DEUG du concours 1981)*

Soit $x \in]0,1[$ et soit n un entier > 1. Démontrer que :

$$n^{x-1} \int_1^n e^{-t}\, t^n\, dt \leqslant \int_1^n e^{-t}\, t^{n+x-1}\, dt \qquad (C)$$

Solution usuelle

$\forall t \in [1,n]$, $n^{x-1} \leqslant t^{x-1}$ $\qquad (E_1)$

D'où : $\forall t \in [1,n]$, $(n^{x-1})(e^{-t}\, t^n) \leqslant (t^{x-1})(e^{-t}\, t^n)$ $\qquad (E_2)$

D'où : $\forall t \in [1,n]$, $(n^{x-1})(e^{-t}\, t^n) \leqslant t^{n+x-1}\, e^{-t}$ $\qquad (E_3)$

D'où : $\displaystyle\int_1^n (n^{x-1})(e^{-t}\, t^n)dt \leqslant \int_1^n t^{n+x-1}\, e^{-t}\, dt$ $\qquad (E_4)$

D'où la conclusion $\qquad$ (C)

Seconde solution

On est dans le cas où la conclusion est connue. Il y a deux hypothèses spécifiques : $x \in]0,1[$, et n entier >0 . La conclusion fait intervenir l'intégrale, la relation d'ordre dans **R**, la fonction exponentielle, et des fonctions du type $y \longmapsto y^a$ où a est réel et $y>0$. Il est normal alors de penser aux hypothèses non spécifiques suivantes, ayant un rapport avec la conclusion, et susceptibles d'être utilisées : croissance de l'intégrale, croissance ou décroissance des fonctions $y \longmapsto y^a$.

Comme la conclusion est connue, on peut partir d'elle. Guidés par la propriété de croissance de l'intégrale qui fournit une condition suffisante pour obtenir une inégalité entre deux intégrales, il est assez naturel de faire entrer n^{x-1} sous le signe $\int$. On a donc (C) $\Longleftrightarrow$ (E_4).

D'après la croissance de l'intégrale, pour avoir (E_4), il suffit d'avoir (E_3). On voit apparaître, dans les deux membres de (E_3), le facteur $e^{-t}.t^n$. On écrit donc (E_3) sous la forme (E_2) puis sous la forme équivalente (E_1) car, pour tout $t \in [1,n]$, $e^{-t}t^n$ est >0 . Pour avoir (C), il suffit donc d'avoir (E_1). (E_1) est vraie car la fonction $t \longmapsto t^{x-1}$ est décroissante sur $[1,n]$ (car $x-1<0$).

On a donc le schéma suivant :

$$(C) \Longleftrightarrow (E_4) \Longleftarrow (E_3) \Longleftrightarrow (E_2) \Longleftrightarrow (E_1) \Longleftarrow (x-1)<0 \Longleftarrow x \in]0,1[$$

Commentaires

La première solution semble plus mystérieuse que la seconde. Or comment fait-on pour trouver une telle solution ? Eh bien, tout simplement, en faisant d'abord mentalement la seconde démonstration, puis en rédigeant la solution définitive en partant, cette fois, des hypothèses. Il est clair qu'un élève qui n'avait pas su faire un tel exercice, et à qui on n'expose que la première solution sans dire d'où elle sort, sera toujours aussi désarmé pour résoudre d'autres problèmes analogues.

Signalons que, dans cet exemple, les hypothèses spécifiques n'ont pas été utilisées complètement. On a simplement utilisé les hypothèses : $x<1$ (pas nécessairement >0) et $n>1$ (pas nécessairement entier), cette dernière hypothèse ayant été utilisée pour la croissance de l'intégrale. En réalité on demandait de démontrer, dans la même question de ce problème, une autre inégalité pour laquelle on utilisait l'hypothèse $x>0$. Quant à l'hypothèse "n entier", non utilisée, elle était donnée car c'est seulement dans ce cas que la propriété qu'on demandait de démontrer dans cette question allait servir par la suite. En général, dans un exercice isolé, toutes les hypothèses spécifiques sont utilisées. Ce n'est pas toujours le cas pour une question d'un problème, comme on vient de le voir. *C'est une raison supplémentaire pour partir de la conclusion (lorsque c'est possible), et pour ne pas s'acharner à partir des hypothèses en essayant désespérément de les utiliser toutes.*

Exemple 5 *(Niveau Troisième - Seconde)*

On va voir maintenant un exemple, analogue au précédent, mais encore plus significatif : dans l'exemple précédent, il était possible de faire la démonstration, en partant des hypothèses, sans même se rendre compte qu'en réalité on l'avait trouvée, mentalement, en partant de la conclusion. Dans cet exemple, ce ne sera pas le cas : on sera obligé de partir de la conclusion en la transformant *par écrit*.

L'énoncé qui suit est le début d'un problème, posé en Seconde, concernant une manière possible de trouver un encadrement du nombre $\sqrt{3}$.

1°) Montrer que si x_1 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{3}$, alors $y_1 = \dfrac{3}{x_1}$ est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{3}$.

2°) Soit $x_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 + y_1)$. Montrer que $x_2 \leqslant x_1$.

3°) Montrer que x_2 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{3}$.

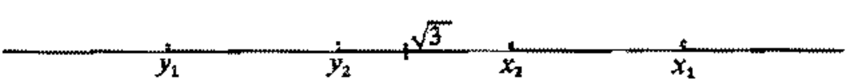
Comment trouver la 3ème question ? Il s'agit de démontrer que : $x_2 \geqslant \sqrt{3}$. On peut essayer d'utiliser les deux premières questions, c'est-à-dire : $x_1 \geqslant \sqrt{3}$, $y_1 \leqslant \sqrt{3}$, $x_2 \leqslant x_1$. Si on essaie de démontrer la conclusion en partant des hypothèses, on n'obtient rien d'intéressant. Par contre, si on part de la conclusion, on a successivement :

$$x_2 \geqslant \sqrt{3} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(x_1 + y_1) \geqslant \sqrt{3} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) \geqslant \sqrt{3} \overset{\text{car } x_1 > 0}{\Longleftrightarrow} x_1^2 + 3 \geqslant 2\sqrt{3}x_1$$

Or $x_1^2 + 3 \geqslant 2\sqrt{3}\,x_1 \Longleftrightarrow x_1^2 - 2\sqrt{3}\,x_1 + 3 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x_1 - \sqrt{3})^2 \geqslant 0$.

La propriété "$(x_1 - \sqrt{3})^2 \geqslant 0$" étant vraie, la conclusion est démontrée. Bien sûr, une fois cette démonstration trouvée, on pourrait la présenter en commençant par la fin, c'est-à-dire : $(x_1 - \sqrt{3})^2 \geqslant 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_2 \geqslant \sqrt{3}$ Mais cela n'est pas très sérieux ! A moins qu'on veuille vraiment faire croire aux élèves que, pour faire des mathématiques, il faut être très fort.

Signalons au passage que, dans cet exemple, aucune des propriétés établies dans les questions précédentes n'a été utilisée. La conclusion du 3°) est vraie pour tout $x_1 > 0$ (pas nécessairement $\geqslant \sqrt{3}$). Cela signifie-t-il que le problème est mal posé ? Ce n'est pas du tout évident. En effet dans la suite du problème, on définissait y_2 à partir de x_2 (comme y_1 avait été défini à partir de x_1) en posant : $y_2 = \dfrac{3}{x_2}$; puis on faisait établir que : $x_2 - y_2 \leqslant \dfrac{1}{2}(x_1 - y_1)$.



On voyait apparaître alors une manière possible d'encadrer $\sqrt{3}$ en continuant le procédé : $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + y_2)$ etc...

Bien sûr, on aurait pu demander de démontrer, dans la première question du problème que, en partant d'un nombre $x_1 > 0$ quelconque (pas nécessairement $\geqslant \sqrt{3}$) le nombre x_2 égal à $\frac{1}{2}(x_1 + \frac{3}{x_1})$, est $\geqslant \sqrt{3}$; la construction de la suite de points fournissant l'encadrement de $\sqrt{3}$ aurait alors commencé à partir de x_2. Mais il est clair que l'introduction, en début de problème, d'un point $x_1 > 0$ et $< \sqrt{3}$ aurait rendu plus difficile, surtout dans une classe de Seconde, la compréhension du procédé de construction de l'encadrement, en faisant jouer un rôle particulier aux deux premiers points de la suite, x_1 et $y_1 = \frac{3}{x_1}$.

On voit donc, dans cet exemple comme dans le précédent, qu'on peut résoudre une question d'un problème en n'utilisant que partiellement les hypothèses spécifiques et les résultats établis aux questions précédentes. D'où, répétons-le, une raison supplémentaire pour essayer de partir de la conclusion (lorsque celle-ci est connue) : on utilise alors les hypothèses dont on dispose au fur et à mesure des besoins.

Exemple 6 *(Niveau Université ou ... niveau Troisième)*

Soit d une distance sur un ensemble E. Démontrer que $d' = \frac{d}{1+d}$ est une distance sur E.

Nous ne nous intéresserons ici qu'à la démonstration de l'inégalité triangulaire. Il s'agit donc de démontrer que, si x, y et z sont trois éléments quelconques de E, on a :

$$d'(x,z) \leqslant d'(x,y) + d'(y,z) \qquad \text{©}$$

Démonstration usuelle : Soient $x, y, z \in E$.

d étant une distance, on a :

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

La fonction $f : u \longmapsto \frac{u}{1+u}$ est croissante sur $\mathbf{R} - \{-1\}$. D'où :

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leqslant \frac{d(x,y) + d(y,z)}{1+d(x,y) + d(y,z)}$$

Or :

$$\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$\leqslant d'(x,y) + d'(y,z)$$

D'où la conclusion.

Commentaire

C'est cette démonstration qui est traditionnellement donnée à l'Université. Elle repose essentiellement sur la croissance de la fonction f .

On peut se rendre compte que lorsqu'on demande à des étudiants d'université ou de classes préparatoires de faire seuls cette démonstration, ils y arrivent rarement. Il partent, en général, de l'inégalité triangulaire pour d , et sont vite bloqués. Quant à tous ceux qui ont vu, en cours, la démonstration précédente, ils restent persuadés qu'il y a une "astuce" : il faut penser à la croissance de f . On va voir qu'il n'en est rien.

En effet, comme on est dans le cas où la conclusion © est connue, on peut partir de ©. Parmi les hypothèses spécifiques susceptibles d'être utilisées, on pense évidemment à l'inégalité triangulaire pour d .

Posons, pour simplifier l'écriture, $a = \mathrm{d}(x,z)$, $b = \mathrm{d}(x,y)$, $c = \mathrm{d}(y,z)$. L'inégalité triangulaire pour d s'écrit : $a \leqslant b + c$ (H_1)

Il s'agit de démontrer que : $\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$ ©

En multipliant les deux membres de cette inégalité par le nombre positif $(1+a)(1+b)(1+c)$ on obtient :

© $\Longleftrightarrow$ $(1+b)(1+c)a \leqslant b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b)$

Et, après simplifications :

© $\Longleftrightarrow$ $a \leqslant bc + c + b + abc$.

Cette inégalité est vraie, car a,b,c sont positifs, et d'après (H_1).

En définitive, cet exercice que la plupart des étudiants d'université ne savent pas résoudre, est du niveau de la classe de Troisième, à la seule condition d'avoir donné au préalable la définition d'une distance. De plus, contrairement à ce qu'on pourrait penser, il ne nécessite aucune astuce ! En partant de la conclusion, c'est un exercice facile au niveau de la Troisième ! Encore faut-il avoir fait réfléchir les élèves sur la manière de faire une démonstration.

Evidemment il n'est pas inutile d'indiquer, en remarque, la première démonstration (Niveau Première), qui, bien que n'étant pas plus courte que la seconde, peut donner des idées pour généraliser ce procédé de construction de nouvelles distances à partir d'une distance donnée d (en prenant d'autres fonctions f vérifiant certaines propriétés). Mais il est très maladroit de ne faire aux étudiants que la première démonstration, sans dire un mot de la seconde, et sans parler des généralisations possibles.

Exemple 7 : *Raisonnement par l'absurde (Niveau Licence de Mathématiques)*

Démontrer que toute suite de points dans un espace topologique compact admet au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration :

Soit **X** un espace topologique compact, et soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de points de **X**. Il s'agit de démontrer que :

(C) (x_n) admet au moins une valeur d'adhérence.

Notons **A** l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) ; il s'agit de démontrer que **A** est non vide. Cette propriété peut s'écrire sous la forme équivalente suivante :

(C_1) $\exists \lambda \in \mathbf{X} : \forall \Omega$ ouvert $\supset \{\lambda\}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists p \geqslant n : x_p \in \Omega$

Si on note $\mathbf{X}_n = \{x_p : p \geqslant n\}$ on sait que $\mathbf{A} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\mathbf{X}}_n$

(il est même souhaitable de définir ainsi la notion de valeur d'adhérence d'une suite). (C) peut alors s'écrire sous la forme équivalente suivante :

(C_2) $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\mathbf{X}}_n \neq \phi$

L'hypothèse spécifique "**X** compact" peut s'écrire avec des ouverts ou avec des fermés. Si on essaie de partir de l'hypothèse, on est bloqué. La conclusion étant connue, on peut essayer de la transformer : cela ne donne rien d'intéressant non plus. On peut alors essayer de raisonner par l'absurde. Supposons que la propriété (C_1) n'est pas vraie, c'est à dire que l'on a :

(non C_1) $\forall \lambda \in \mathbf{X}$ $\exists \Omega$ ouvert $\supset \{\lambda\}$, $\exists n \in \mathbf{N} : \forall p \geqslant n$, $x_p \notin \Omega$

L'ouvert Ω et l'entier n ci-dessus dépendent de λ. Notons-les Ω_λ et n_λ.

La propriété (non C_1) fait apparaître une famille d'ouverts $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{X}}$ recouvrant **X** et laisse entrevoir un départ possible dans la démonstration : en effet, il est alors normal d'utiliser la compacité de **X** (avec les ouverts) pour ce recouvrement particulier $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{X}}$ de **X**. Il existe donc un nombre fini n_0 de points de **X**, $\lambda_1, \ldots \lambda_{n_0}$, tels que : $\bigcup_{i=1}^{n_0} \Omega_{\lambda_i} = \mathbf{X}$. On voit alors apparaître une contradiction : en effet les points x_n de la suite d'indice $n \geqslant \text{Max}\,\{n_{\lambda_i} : i = 1, \ldots, n_0\}$ n'appartiennent à aucun Ω_{λ_i}, donc n'appartiennent pas à **X**.

On peut aussi raisonner par l'absurde en partant de (C_2). Ici aussi la propriété (non C_2), c'est-à-dire "$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\mathbf{X}}_n = \phi$", laisse immédiatement entrevoir un départ possible de la démonstration, en utilisant cette fois la compacité de **X** avec les fermés. On arrive facilement, comme précédemment, à une contradiction.

4. Problèmes d'existence et problèmes de détermination de points vérifiant une propriété donnée.

4.1. Inventaire des types de problèmes. Exemples

E désignant un ensemble, considérons des énoncés de l'un des quatre types suivants :

(1) Déterminer tous les x de E tels que...

(2) Expliciter un élément x de E tel que...

(3) Démontrer qu'il existe au moins un x de E tel que...

(4) Démontrer qu'il existe un et un seul x de E tel que...

Donnons tout de suite des exemples de tels énoncés ;

Type (1)

a) Résolutions d'équations, d'inéquations ou de systèmes d'équations ou d'inéquations dans un ensemble donné.

b) Détermination d'un ensemble de points du plan ou de l'espace vérifiant une propriété donnée (''lieux géométriques'')

c) Soit E un ensemble non vide. Pour tout $A \subset E$, on considère l'application f_A de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$f_A(X) = X \cap A$$

Déterminer tous les $A \in \mathcal{P}(E)$ tels que f_A soit injective.

Type (2)

a) Trouver une solution particulière d'une équation donnée.

b) Ecrire un polynôme du second degré P sous forme d'un produit de deux polynômes P_1, P_2 du premier degré.

Il s'agit d'expliciter un couple de polynômes du premier degré (P_1, P_2) tel que : $P_1P_2 = P$ (L'ensemble E est ici l'ensemble des couples de polynomes du premier degré).

c) Trouver une suite (f_n) de fonctions numériques continues sur $[0,1]$, telle que, pour tout x de $[0,1]$ $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, et telle que f ne soit pas continue sur $[0,1]$.

Plus généralement, cette situation se rencontre quand on veut expliciter un contre-exemple.

Type (3)

a) Démontrer que toute suite dans un compact admet au moins une valeur d'adhérence (exemple 7).

b) Démontrer que deux ensembles E et F, munis d'une structure donnée, sont isomorphes.

c) Démontrer que tout sous-groupe additif **A** de **Z** est de la forme $n\mathbf{Z}$. Il s'agit ici de démontrer qu'il existe au moins un $n \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathbf{A} = n\mathbf{Z}$.

d) Tous les énoncés du type : "$\forall y \in \mathbf{F} \quad \exists x \in \mathbf{E}$ tel que..."

En effet, une fois fixé un élément quelconque y de **F**, il s'agit de démontrer qu'il existe au moins un $x \in \mathbf{E}$ tel que... Cette situation se rencontre très fréquemment, par exemple dans les problèmes de limite et de continuité, pour la surjectivité d'une application, pour la compacité d'un ensemble (avec les ouverts ou les fermés, ou avec les sous-suites si l'espace est métrique), etc.

Type (4)

a) Démontrer qu'une application f de **E** dans **F** est bijective. En effet une fois fixé un élément quelconque y de **F**, il s'agit de démontrer qu'il existe un et un seul x de **E** tel que y = f(x).

b) Démontrer qu'une application f définie sur un sous-ensemble **A** de **E** admet un prolongement unique $\widehat{f}$ défini sur **E** et vérifiant certaines propriétés.

Comme on le voit, les problèmes de type (1), (2), (3) ou (4) se rencontrent très fréquemment. La classification précédente n'a évidemment pas qu'un intérêt esthétique. On verra en effet qu'il y a des méthodes de résolution, peu nombreuses d'ailleurs, spécifiques à chaque type de problèmes (sauf pour le type (2)) ; *d'où l'intérêt d'enseigner ces méthodes aux élèves et de les habituer à reconnaître le type de problèmes qu'ils ont à résoudre.*

Autre interprétation de ces types d'énoncés

Soit E un ensemble, et soit p(x) une fonction propositionnelle définie sur E, c'est-à-dire une propriété vraie pour certains x de E et fausse pour tous les autres. *Notons* **V** *l'ensemble des x de* **E** *pour lesquels p(x) est vraie.*

Les énoncés du type (1), (2), (3), (4) peuvent alors s'écrire :

(1) Déterminer V.
(2) Expliciter un élément de V.
(3) Démontrer que V est non vide.
(4) Démontrer que V est non vide et Card V = 1.

Ainsi par exemple :

• Dans **R**, "$x^2 - 1 = 0$" est une fonction propositionnelle, vraie pour $x = 1$ ou -1, et fausse pour toutes les autres valeurs de x. On a ici $\mathbf{V} = \{-1, +1\}$. Résoudre l'équation "$x^2 - 1 = 0$", c'est déterminer **V**.

• "$\sqrt{x} \geqslant 2$" est une fonction propositionnelle définie sur $\mathbf{R}_+$. Ici $\mathbf{V} = [4, +\infty[$. Résoudre l'inéquation "$\sqrt{x} \geqslant 2$", c'est déterminer **V**.

• Soit f une application *donnée* de **E** dans **F**, et soit y un élément quelconque, *fixé*, dans **F**. "f(x) = y" est une fonction propositionnelle sur **E**. **V** est l'ensemble des x de **E** tels que f(x) = y. Si, quel que soit y, **V** est non vide, f est surjective. Si de plus, quel que soit y, Card **V** = 1, f est bijective.

• Dans l'exemple c) du type (1), la fonction propositionnelle est "f_A injective" : c'est une fonction propositionnelle dans l'ensemble $\mathcal{P}$ (**E**) des parties de **E**.

Remarques préliminaires

Remarque 1 : Dans les problèmes du type (1) ou (2), la conclusion n'est pas connue. Dans ceux du type (3) ou (4), elle est connue.

Remarque 2 : Qu'entend-on exactement dans le cas (1) par "Déterminer **V**" ou encore par "Déterminer tous les x de **E** vérifiant p(x)" ?

Prenons quatre exemples simples :

a) Résoudre dans **R** l'équation $x^2 - 1 = 0$

b) Résoudre dans **R** l'inéquation $3x + 5 \leqslant 0$

c) Résoudre dans **R** × **R** le système $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$

d) Soit k un réel > 0, différent de 1, et soit P et Q deux points donnés du plan. Déterminer tous les points M du plan tels que $\dfrac{MP}{MQ} = k$.

Dans l'exemple a) on a : $\mathbf{V} = \{-1, +1\}$

Dans l'exemple b) on a : $\mathbf{V} = \left]-\infty\ ,\ -\dfrac{5}{3}\right]$

Dans l'exemple c) on a : $\mathbf{V} = \{(3 - 2y, y) : y \in \mathbf{R}\}$

ou encore : $\mathbf{V} = \{(x, \dfrac{3-x}{2}) : x \in \mathbf{R}\}$

Dans l'ensemble d), **V** est un cercle dont on peut préciser le centre et le rayon (en fonction de k et des points P et Q).

On peut constater, d'après ces quatre exemples, que le type de réponse n'est pas toujours le même. Ainsi, dans l'exemple a), **V** ne contenant que deux éléments, il s'agit d'expliciter effectivement ces deux éléments. Dans les trois autres cas **V** est infini. Il s'agit alors d'écrire **V** sous la forme "la plus explicite et la plus précise possible". L'expression de **V** dépend donc du niveau mathématique de l'élève. Ainsi par exemple, dans le b), si la définition des intervalles $]-\infty, a]$ n'a pas été vue, on ne peut écrire $\mathbf{V} = \left]-\infty\ ,\ -\dfrac{5}{3}\right]$; on dira que **V** est l'ensemble des x de **R** inférieurs ou égaux à $-\dfrac{5}{3}$. Dans le d), la définition d'un cercle de centre et de rayon donnés étant connue, il est normal de ne pas se contenter de dire que **V** est un cercle mais d'en préciser, en plus, le centre et le rayon. Dans le c), on constate qu'il peut y avoir plusieurs réponses possibles : dans ce cas **V** peut en effet s'écrire de deux manières différentes, aussi explicites l'une que l'autre.

On peut dire que lorsqu'on demande à un élève de déterminer l'ensemble **V** *des éléments x d'un ensemble* **E** *vérifiant un certaine fonction propositionnelle p(x), on lui demande d'écrire* **V** *sous la forme "la plus explicite et la plus précise possible" (compte tenu bien sûr des connaissances mathématiques qu'il est supposé avoir).*

Remarque 3 : Pour une fonction propositionnelle donnée sur **E**, si on a déterminé **V** et si **V** est non vide, on peut expliciter un élément de **V**. D'autre part, l'explicitation d'un élément de **V** implique que **V** est non vide. On peut écrire, de manière symbolique :

$$\boxed{(1) \xRightarrow{\text{Si } \mathbf{V} \neq \phi} (2) \Longrightarrow (3)}$$

Il est clair que les implications "symboliques" réciproques ne sont pas vraies en général : on peut expliciter un élément de **V** sans déterminer tout **V** ($(2) \not\Longrightarrow (1)$) ; de même, on peut démontrer que **V** est non vide sans expliciter un élément de **V** ($(3) \not\Longrightarrow (2)$).
Néanmoins :

$$\boxed{\text{Si Card } \mathbf{V} = 1 \text{, alors } (1) \Longleftrightarrow (2)}$$

4.2. Méthodes de résolution

Problèmes de détermination de points vérifiant une propriété donnée (type (1))

On dispose parfois de théorèmes qui permettent de conclure directement : c'est le cas par exemple de certaines équations d'un type classique (équations du premier ou du second degré, systèmes linéaires, certaines équations différentielles...)

Dans d'autres cas, on peut remplacer sans difficulté la fonction propositionnelle p(x) par une fonction propositionnelle équivalente q(x), plus simple que p(x) et "non simplifiable". Ainsi par exemple, en classe de 3[e], pour résoudre dans **R** l'équation $x^2 - 1 = 0$, on peut écrire que, pour tout x de **R** on a :

$$x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

La fonction propositionnelle $p(x)$: "$x^2 - 1 = 0$" a été remplacée par $q(x)$; "$x = 1$ ou $x = -1$".

Dans tous les autres cas, on peut procéder de la manière suivante : on démontre, par plusieurs implications successives, que :

$$(P) \qquad \text{pour tout } x \text{ de } E,\ p(x) \Longrightarrow r(x)$$

où r(x) est une fonction propositionnelle sur **E** plus "simple" que p(x) et non "simplifiable". Si **W** désigne l'ensemble des x de **E** tels que r(x) est vraie, (P) signifie que :

$$(P') \qquad V \subset W$$

On essaie alors de voir si l'autre inclusion (**W** $\subset$ **V**) est vraie, c'est-à-dire si, pour tout x de **E**, r(x) $\Longrightarrow$ p(x). Parfois c'est vrai ; on a donc **W** = **V**. Parfois certains éléments de **W** n'appartiennent pas à **V** ; **V** n'est alors pas égal à tout **W** mais à un sous-ensemble de **W** que l'on détermine.

Exemples : ils sont très nombreux. On a choisi trois exemples dont la solution est courte afin de mettre l'accent sur la méthode de résolution, sans alourdir inutilement cet article.

Exemple 1

Résoudre dans R l'équation : $|x-3| = x+5$
(*classe de Troisième*)

On a, pour tout x de **R** :

$$|x-3| = x+5 \Rightarrow (|x-3|)^2 = (x+5)^2 \Rightarrow -6x+9 = 10x+25 \Rightarrow x = -1$$

Ici **W** = $\{-1\}$. A-t-on **W** $\subset$ **V** ? En remplaçant x par -1 dans l'équation initiale on a 4 = 4. Donc **W** $\subset$ **V**. D'où **V** = **W** = $\{-1\}$.

Exemple 2

Résoudre dans R l'équation : $|x-3| = -x-5$
(*classe de Troisième*)

Comme ci-dessus on obtient **V** $\subset$ **W** = $\{-1\}$. Mais cette fois on n'a pas **W** $\subset$ **V** (car $4 \neq -4$) ; donc **V** est l'ensemble vide, c'est-à-dire que l'équation n'admet aucune solution.

Exemple 3 (exemple c) du type (1))

Déterminer tous les A de $\mathcal{P}$(E) tels que l'application $f_A : X \mapsto X \cap A$ de $\mathcal{P}$(E) dans $\mathcal{P}$(E) soit injective.

Si f_A est injective, alors, pour toutes parties X, Y de **E** telles que $f_A(X) = f_A(Y)$, on a X = Y. En particulier, l'égalité $f_A(X) = f_A(Y)$ est vraie pour X = A et Y = **E** (car $f_A(A) = A \cap A = A$ et $f_A(E) = E \cap A = A$). D'où A = **E**. On a donc **V** $\subset$ **W** = $\{E\}$. A-t-on **W** $\subset$ **V** ? Oui car f_E est l'application identité de $\mathcal{P}$(**E**) ; cette application est évidemment injective.

Le sous-ensemble **V** des parties A de **E** telles que f_A soit injective est réduit à un seul élément : **E**.

Remarquons que dans le premier exemple on aurait pu procéder directement par équivalence en ajoutant simplement dans le second membre de la première implication (quand on élève au carré) la condition "$x+5 \geqslant 0$". Il en est de même dans le second exemple (la condition supplémentaire étant cette fois "$-x-5 \geqslant 0$").

Dans le troisième exemple, par contre, on ne peut pas arriver à la conclusion, de manière naturelle, en n'utilisant que des équivalences. Il convenait dans ce cas de procéder comme on l'a fait. On constate que, en Mathématiques Supérieures ou en DEUG, les élèves arrivent rarement à résoudre ce dernier exercice ; il y a certes une difficulté d'abstraction (l'ensemble $\mathcal{P}$ **(E)** considéré est un ensemble dont les éléments sont des parties), mais, ce qui est plus inquiétant, c'est que les élèves ne savent pas comment démarrer et ne disposent d'aucune méthode pour traiter ce genre de problème.

Signalons enfin que, lors de la résolution de problèmes du type (1), les élèves commettent souvent l'erreur suivante : ils procèdent par implications successives, sans se rendre vraiment compte que ce ne sont que des implications (et non des équivalences) ; ils démontrent donc que : $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}$ et croient avoir démontré l'égalité $\mathbf{V} = \mathbf{W}$. Ils pensent parfois, lors de la résolution de certaines équations, que l'étude de l'inclusion réciproque $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ ne sert que pour voir s'ils n'ont pas fait d'erreur de calcul.

On verra, dans la première question d'un exercice sur la résolution des problèmes du type (4), un autre exemple de problème de type (1), à savoir la détermination d'un lieu géométrique dans le plan.

Problèmes d'explicitation d'un élément vérifiant une propriété donnée (type (2))

Il n'y a pas de méthode précise de résolution pour les problèmes de ce type. Il arrive donc fréquemment que ces problèmes soient plus difficiles à résoudre que les problèmes du type (1). Cependant, dans cette situation où on demande d'expliciter un élément de **V**, on peut parfois en réalité, non seulement expliciter un élément de **V**, mais déterminer tout **V** (c'est le cas par exemple si card $\mathbf{V} = 1$). On peut alors utiliser les méthodes de résolution des problèmes du type (1) et rendre naturelle l'explicitation d'un élément de **V** ; il ne faut pas se contenter, dans ce cas, d'expliciter aux élèves un élément de **V** sans dire comment on l'a trouvé.

Problèmes d'existence (type (3))

Rappelons d'abord la troisième remarque préliminaire :

$$(1) \xRightarrow{\text{Si } \mathbf{V} \neq \emptyset} (2) \Longrightarrow (3)$$

Pour résoudre un problème du type (3), on peut envisager deux cas :

1er cas : On démontre que V est non vide sans être obligé, pour cela, d'expliciter un élément de V.

2e cas : Pour démontrer que **V** *est non vide, on explicite un élément de* **V**.

On peut dire, de manière schématique, que, dans le premier cas on démontre seulement (3), et que, dans le deuxième cas, pour démontrer (3), on démontre (2).

Dans le premier cas on est en présence d'un problème où la conclusion est connue (on peut donc par exemple raisonner par l'absurde). Dans le second cas elle ne l'est pas ; de plus, comme on l'a déjà signalé, il n'y a pas de méthode précise de résolution. Donc, a priori, dans le second cas la résolution est plus difficile que dans le premier. Néanmoins, si dans le second cas on est en mesure d'expliciter tout **V**, alors la résolution est plus simple car, comme on l'a déjà signalé, on dispose des méthodes de résolution des problèmes du type (1).

Exemple 1

Démontrer que toute suite de points dans un espace topologique compact admet au moins une valeur d'adhérence.

Ce problème a été résolu dans l'exemple 7. On a raisonné par l'absurde. On a donc démontré (3) sans démontrer (2) (1er cas).

Exemple 2

Démontrer que si f et g sont deux applications de R dans R continues en x_0, alors fg est continue en x_0.

Supposons que, au moment de traiter ce problème, l'élève dispose des trois théorèmes suivants : la composée de deux applications continues est continue ; l'application p : $(x,y) \longmapsto xy$ est continue sur $\mathbf{R}^2$; si f et g sont continues en x_0, alors l'application (f,g) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $(f,g)(x) = (f(x),g(x))$ est continue en x_0. Pour démontrer que fg est continue en x_0, il suffit alors de remarquer que $fg = p \circ (f,g)$ et d'utiliser les trois théorèmes précédents. On démontre ainsi que, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'ensemble **V** des $y > 0$ tels que

$p(\eta) : \forall x \in [x_0 - \eta \, , \, x_0 + \eta] \, , \, (fg)(x) \in [(fg)(x_0) - \varepsilon \, , \, (fg)(x_0) + \varepsilon]$ est non vide,

sans expliciter un élément de **V** (1er cas). Si l'élève ne dispose que de la définition de la continuité pour résoudre ce problème, il est alors amené à faire une "démonstration directe", c'est-à-dire à "expliciter" un η de **V** en fonction d'un $\varepsilon > 0$ quelconque donné et des autres données du problème. On est alors en présence d'un problème du type (2).

Cette situation se retrouve dans les problèmes de limites (ou de continuité) quand on fait une démonstration directe. Dans ce cas, la difficulté de ces problèmes provient du fait qu'on est rarement en mesure de déterminer tout **V**. On est donc en présence du cas le plus difficile de résolution d'un problème du type (2). Les théorèmes établis en cours permettent souvent d'éviter de telles démonstrations directes.

Exemple 3 :

Démontrer que tout sous-groupe additif A de Z est de la forme nZ.

Soit **A** un sous-groupe additif de **Z**. Il s'agit de démontrer que l'ensemble **V** des n de **Z** tels que **A** $= n$**Z** est non vide.

Solution usuelle

Si **A** $= \{0\}$, c'est vrai ($n = 0$)

Si **A** $\neq \{0\}$, **A** contient au moins un élément non nul, donc aussi l'opposé d'un tel élément (car **A** est un sous-groupe) ; donc l'ensemble des éléments >0, de **A** est non vide.

Soit α le plus petit élément >0 de **A**. Démontrons que $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{Z}$.

• $\alpha\mathbf{Z} \subset \mathbf{A}$. En effet : $\alpha \in \mathbf{A}$; **A** étant un sous-groupe de **Z**, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $\alpha p \in \mathbf{A}$.

• $\mathbf{A} \subset \alpha\mathbf{Z}$. En effet : soit $x \in \mathbf{A}$. Démontrons que $x \in \alpha\mathbf{Z}$. On sait que (division de x par α) il existe deux entiers relatifs p et q tels que :

$$x = p\alpha + q \quad (\text{avec } 0 \leqslant q < \alpha)$$

q, égal à $x - p\alpha$, appartient à **A** (car **A** est un sous-groupe). D'où, puisque α est le plus petit élément >0 de **A**, on a nécessairement $q = 0$. Donc $x = p\alpha$; d'où : $x \in \alpha\mathbf{Z}$.

On va voir pourquoi cette solution, rigoureuse certes, n'est pas satisfaisante. On est en présence d'un problème de type (3), et, pour le résoudre, on a explicité, *sans aucune justification*, un n (à savoir $n = \alpha$) tel que $\mathbf{A} = n\mathbf{Z}$. On s'est donc ramené à un problème du type (2). Or, dans ce problème, on est en mesure de déterminer tout **V** et de rendre ainsi naturelle l'explicitation de n. En effet le cas $\mathbf{A} = \{0\}$ se traite facilement ($n=0$).

Cas $\mathbf{A} \neq \{0\}$. Soit $n \in \mathbf{V}$. n est tel que $\mathbf{A} = n\mathbf{Z}$; alors **A**, ensemble des multiples de n, peut s'écrire :

$$\mathbf{A} = \{\ldots, -3|n|, -2|n|, -|n|, 0, |n|, 2|n|, 3|n|, \ldots\}$$

d'où $|n|$ est le plus petit élément positif de **A**. Soit α cet élément.

On a donc : $n = \alpha$ ou $n = -\alpha$. D'où $\mathrm{V} \subset \mathrm{W} = \{-\alpha, +\alpha\}$.

A-t-on $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$? C'est-à-dire : $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{Z}$ et $\mathbf{A} = -\alpha\mathbf{Z}$? Comme $\alpha\mathbf{Z} = -\alpha\mathbf{Z}$, il suffit de vérifier que $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{Z}$. Reprenons aussi la démonstration de l'inclusion $\mathbf{A} \subset \alpha\mathbf{Z}$. Là non plus la solution donnée précédemment n'est pas satisfaisante, car il convient de dire aux élèves pourquoi on introduit la division de x par α. On pourrait procéder ainsi :

• Soit $x \in \mathbf{A}$. Il s'agit de démontrer que :

(C) $$\exists p \in \mathbf{Z} : x = p\alpha$$

On est à nouveau en présence d'un problème du type (3). Comme dans tous les problèmes de ce type la conclusion est connue. On peut donc partir de la conclusion. On a :

$$(C) \iff \underbrace{x \text{ est multiple de } \alpha}_{(C_1)} \iff \underbrace{\text{le reste } q \text{ de la division de } x \text{ par } \alpha \text{ est nul}}_{(C_2)}$$

Il suffit alors de démontrer C_2 comme précédemment.

Problèmes d'existence et d'unicité (type (4))

Il s'agit de démontrer, rappelons-le, que ($p(x)$ désignant une fonction propositionnelle sur un ensemble **E**), "il existe un et un seul x de **E** tel que $p(x)$ soit vrai" ou encore, en notant **V** l'ensemble des x de **E** vérifiant $p(x)$: "**V** est non vide et card **V** = 1".

Dans ce type de problèmes on demande donc de démontrer davantage que dans les problèmes du type (3) : il y a la propriété supplémentaire "Card **V** = 1". *On va voir pourquoi, contrairement à ce que l'on pourrait peut-être penser, les problèmes de ce type sont souvent plus faciles à résoudre que ceux du type (3).*

Pour résoudre un problème de ce type, on peut envisager, comme pour les problèmes du type (3), deux cas :

1er cas : On démontre que V est non vide sans expliciter un élément de V.

Exemple 1 : Démontrer que l'équation $2x^3 + 3x^2 - 12x + 8 = 0$ admet une solution et une seule dans R.

Posons $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$. On a : f continue sur **R**, $\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans **R**. Une étude classique des variations de cette fonction montre alors que l'équation considérée n'admet qu'une solution dans **R**.

Exemple 2 :

Démontrer que le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

admet une solution unique dans R × R.

Il suffit de dire que le déterminant de ce système (égal à -5) est non nul et d'utiliser un théorème classique.

Dans cet exemple, un seul théorème a permis de démontrer les deux propriétés de la conclusion.

Exemple 3

Démontrer que dans l'espace vectoriel E (sur R) des applications affines de R dans R, les deux applications f_1, f_2 définies par

$$f_1(x) = -2x + 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) = 3x - 2$$

constituent une base.

Démonstration

Soit $f : x \longmapsto ax + b \in \mathbf{E}$

Il s'agit de démontrer qu'il existe un couple unique (λ,μ) de réels tel que $f = \lambda f_1 + \mu f_2$. Soit $\mathbf{V}$ l'ensemble des couples (λ,μ) tels que $f = \lambda f_1 + \mu f_2$.

On a pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} (\lambda,\mu) \in \mathbf{V} &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ (a + 2\lambda - 3\mu)x + b - \lambda + 2\mu = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} -2\lambda + 3\mu = a \\ \lambda - 2\mu = b \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce système ayant un déterminant non nul, il admet un unique couple solution (λ_0,μ_0) (qu'on pourrait d'ailleurs expliciter en fonction de a et b).

D'où $\mathbf{V} = \{(\lambda_0,\mu_0)\}$.

Commentaires

Il serait maladroit, dans cet exemple, de démontrer d'abord que $\{f_1,f_2\}$ est libre puis que c'est une famille génératrice ; d'autant plus maladroit que pour démontrer que c'est une famille génératrice, on fait la démonstration précédente qui permet de tout démontrer d'un coup. *Ces maladresses, dans ce genre de problèmes, conduisent d'ailleurs très souvent à de graves fautes de raisonnement.* En effet, supposons que l'on démontre d'abord que c'est une famille libre. Si ensuite, pour démontrer que c'est une famille génératrice, on fait la démonstration précédente *sans s'assurer qu'on a des équivalences* mais simplement des implications, alors la démonstration est évidemment fausse : on démontre ainsi que $\mathbf{V} \subset \{(\lambda_0,\mu_0)\}$, c'est-à-dire que $\mathbf{V}$ contient *au plus* un élément, ce que l'on savait déjà d'ailleurs puisque $\{f_1,f_2\}$ est libre. En définitive, on démontre deux fois que $\{f_1,f_2\}$ est libre mais on ne démontre pas que c'est une famille génératrice ! On retrouve ce genre d'erreur pour démontrer qu'une application est bijective : on essaie de démontrer séparément l'injectivité et la surjectivité mais en réalité, quand on veut démontrer la surjectivité on procède par implications et on ne fait ainsi qu'une seconde démonstration de l'injectivité ! Signalons d'ailleurs que, démontrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est une base, revient à démontrer la bijectivité d'une certaine application. Ainsi dans l'exemple précédent, si on note φ l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{E}$ définie par $\varphi[(\lambda,\mu)] = \lambda f_1 + \mu f_2$, démontrer que $\{f_1,f_2\}$ est une base revient à démontrer que φ est bijective, l'injectivité de φ correspondant à l'indépendance linéaire de f_1 et de f_2, et sa surjectivité au fait que $\{f_1,f_2\}$ est une partie génératrice.

Ces erreurs de raisonnement sont si souvent commises par les élèves à tous les niveaux (y compris à l'université et dans les grandes écoles scientifiques) qu'on est obligé d'en tirer la conclusion suivante :

"ON NE LEUR A JAMAIS VRAIMENT APPRIS, AU COURS DE LEURS ETUDES, A FAIRE DES DEMONSTRATIONS"

2e cas : Pour démontrer que V est non vide, on explicite un élément de V

Or on est dans le cas où Card V = 1. Donc, comme on l'a signalé dans les remarques préliminaires, expliciter un élément de V revient à déterminer tout V. *On dispose donc des méthodes de résolution des problèmes du type (1) ; donc, dans ce second cas, il est plus simple de démontrer l'existence et l'unicité que l'existence.* Parfois, on peut déterminer V directement, en remplaçant successivement la fonction propositionnelle p(x) par des fonctions propositionnelles équivalentes, la dernière étant de la forme "$x = x_0$" où x_0 est un élément de E. On démontre ainsi que V est non vide et que Card V = 1. Souvent on peut démontrer, par implications successives, que $V \subset \{x_0\}$; on démontre ainsi que Card $V \leqslant 1$. On vérifie ensuite l'autre inclusion $\{x_0\} \subset V$. On a donc $V = \{x_0\}$.

EXEMPLES

Exemple 1 : (lignes de niveau)

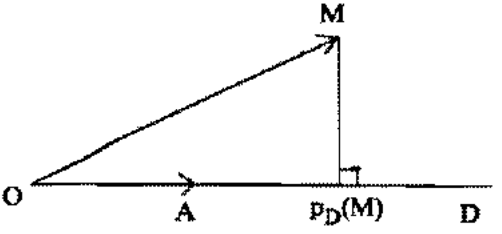
Soit O un point du plan (P) et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On pose, pour tout M$\in$(P), f(M) = $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$.

1°) Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la ligne de niveau k de f, c'est-à-dire l'ensemble C_k des points M du plan (P) tels que f(M) = k.

2°) Démontrer que, par tout point B du plan (P), passe une unique ligne de niveau de f.

Démonstration

1°) Il s'agit d'un problème du type (1). L'ensemble V à déterminer est noté ici C_k. La définition même du produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$ nous conduit naturellement à considérer le point A de (P) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, et la projection orthogonale sur la droite (O,A) que nous noterons D. Désignons, pour tout M$\in$(P), par p_D(M) l'image de M par cette projection orthogonale.



On a, pour tout M de (P) :

$$M \in C_k \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = k \Longleftrightarrow \overline{Op_D(M)} \cdot \overline{OA} = k \Longleftrightarrow \overline{Op_D(M)} = \frac{k}{\overline{OA}}$$

Or : $\overline{Op_D(M)} = \dfrac{k}{\overline{OA}} \Longleftrightarrow$ la projection orthogonale de M sur D a une abscisse toujours égale à $\dfrac{k}{\overline{OA}}$.

$\Longleftrightarrow$ M appartient à la droite $\triangle$ orthogonale à D et passant par le point de D d'abscisse $\dfrac{k}{\overline{OA}}$

D'où $C_k = \triangle$.

Les équivalences précédentes sont simples ; il est inutile de procéder par implication et de démontrer ensuite que $\triangle \subset C_k$.

2°) Soit $B \in (P)$. Il s'agit de démontrer qu'il existe un unique réel k tel que : $B \in C_k$. Soit $\mathbf{V}$ l'ensemble des $k \in \mathbf{R}$ tels que $B \in C_k$. On a, pour tout k de $\mathbf{R}$:

$$k \in \mathbf{V} \Longleftrightarrow \overline{OA}.\overline{Op_D(B)} = k$$

D'où le résultat : k est unique et on a sa valeur. Il est maladroit dans cette question de démontrer d'abord l'existence d'une ligne de niveau passant par B puis l'unicité. Cela peut donner aux élèves une fausse impression de difficulté. Comme on vient de le voir, une seule équivalence a suffi pour démontrer cette question.

Exemple 2 (bases duales)

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base d'un espace vectoriel E sur C et soit E^* l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans C. On pose, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $e_j^*(x) = x_j$ ($j = 1,2,...,n$). Démontrer que $\{e_1^*, e_2^*, ... e_n^*\}$ est une base de E^*.

Démonstration

La linéarité des e_j^* se démontre facilement. Démontrons qu'ils constituent une base.

Soit $f \in E^*$

Notons $\mathbf{V} = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{C}^n : f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*\}$

Il s'agit de démontrer que $\mathbf{V}$ est non vide et que Card $\mathbf{V} = 1$. On a, pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$:

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{V} \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(x)$$

Comme on veut expliciter les λ_i, il est normal d'écrire l'égalité précédente pour $x = e_j$ ($j = 1, ..., n$). On obtient :

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in V \Longrightarrow \forall j = 1, 2, ..., n, \ f(e_j) = \lambda_j.$$

D'où $V \subset \{(f(e_1), ..., f(e_n))\}$

Cette inclusion ne signifie pas que $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ est une famille génératrice ! Elle signifie que c'est une famille libre. Pour démontrer que c'est une famille génératrice, il suffit de démontrer l'autre inclusion, c'est-à-dire que :

$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*$. Ceci se fait facilement.

Commentaires

Comme on l'a déjà signalé, il est très maladroit de démontrer séparément que c'est une famille libre puis une famille génératrice : en effet, pour démontrer que c'est une famille génératrice, ou bien on se contente d'expliciter des λ_i qui conviennent sans dire comment on les a trouvés, et alors ce n'est pas satisfaisant puisque, comme on l'a vu ci-dessus, on peut justifier le choix des λ_i ; ou bien on justifie le choix des λ_i comme ci-dessus, et alors il est inutile de démontrer ensuite (une seconde fois) que la famille est libre.

Il est très rare de trouver des problèmes du type (4) où l'explicitation d'un élément de V ne puisse pas être rendue naturelle. Or dans l'enseignement usuel et dans les livres, on "oublie" très souvent de rendre ces démonstrations naturelles. Il est de tradition de démontrer séparément l'existence et l'unicité ! Pour démontrer la bijectivité d'une application, on démontre séparément l'injectivité et la surjectivité ! Il n'est alors pas surprenant que de telles démonstrations paraissent astucieuses aux élèves, et que, en présence de tels problèmes, les élèves soient très souvent désarmés.

Exemple 3

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps (R ou C), $e_1, e_2, ..., e_n$ une base de E et $v_1, v_2, ..., v_n$ *n* vecteurs donnés de F. Démontrer qu'il existe une application linéaire unique f de E dans F telle que, pour tout $i = 1, 2, ..., n$, $f(e_i) = v_i$.

Démonstration

Désignons par $\mathcal{L}(E;F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et soit V l'ensemble des f de $\mathcal{L}(E;F)$ vérifiant la fonction propositionnelle p(f) : "$\forall i = 1, 2, ..., n, \ f(e_i) = v_i$". Il s'agit de démontrer que V est non vide et que Card V = 1. Déterminons V. On a, pour tout $f \in \mathcal{L}(E;F)$:

$$f \in \mathbf{V} \Longrightarrow \underbrace{\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbf{E},\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i}_{①}.$$

Soit f_0 l'application définie par ①.

On a donc $\mathbf{V} \subset \{f_0\}$.

A-t-on $\{f_0\} \subset \mathbf{V}$? C'est-à-dire, est-ce que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $f_0(e_i) = v_i$? Il est immédiat de voir que ceci est vrai. D'où $\mathbf{V} = \{f_0\}$.

Commentaires

La démonstration précédente est fausse. En effet, telle qu'elle a été faite, on a pris comme ensemble de référence l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$. Or cet ensemble est évidemment inclus dans un ensemble plus grand, à savoir l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ de toutes les applications (pas forcément linéaires) de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$. En réalité, l'inclusion "$\mathbf{V} \subset \{f_0\}$" a été établie dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ et non dans $\mathcal{F}(\mathbf{E};\mathbf{F})$. Cette inclusion permet de dire que, si une application f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ est linéaire et vérifie p(f), alors $f = f_0$. f_0 est donc la seule application possible. Pour démontrer l'inclusion réciproque $\{f_0\} \subset \mathbf{V}$ il faut, certes, démontrer que f_0 vérifie p(f) mais il faut aussi s'assurer que f_0 est linéaire, ce qui, d'ailleurs, se fait sans difficulté. Ceci n'a pas été fait dans la démonstration précédente. *Cette situation se rencontre lorsqu'on veut déterminer un ensemble* **V**, *et que l'ensemble de référence est lui-même contenu dans un ensemble connu on peut "glisser" dans l'ensemble plus grand sans s'en rendre compte.*

CONCLUSION

Tous les points délicats concernant l'enseignement des mathématiques ont-ils été abordés dans cet article ? Non. Il reste, bien sûr, d'autres difficultés, par exemple :

Le langage : certains élèves, surtout au collège, ne comprennent pas de manière précise le sens des mots utilisés dans l'enseignement de cette discipline. Cette difficulté n'est d'ailleurs pas spécifique à cette matière.

L'introduction des nouvelles notions : elle est souvent faite de façon trop artificielle. On devrait toujours faire le lien entre les nouveaux concepts introduits et ceux que les élèves connaissent déjà, et commenter l'évolution historique des nouvelles notions et leur utilité (application à la physique, par exemple).

L'abstraction : certains élèves ont du mal à assimiler certaines notions trop abstraites parce qu'ils ne les perçoivent pas bien.

Les mathématiques sont donc suffisamment difficiles comme cela. *Il ne faut surtout pas les rendre encore plus difficiles*, en faisant les démonstrations sans expliquer en profondeur l'enchaînement des différentes étapes.

Et les mathématiques modernes dans tout ça ? Elles auraient pu permettre d'améliorer sensiblement l'enseignement. En effet, grâce à la théorie élémentaire des ensembles, on peut formuler beaucoup de problèmes de façon bien plus rigoureuse qu'avant ; on peut aussi mieux comprendre certains problèmes, de nature a priori différente, en les étudiant dans un cadre général commun. Ainsi, par exemple, dans l'étude des problèmes d'existence et de détermination d'ensembles, il est apparu que la résolution d'une équation, d'un système d'équations, et la recherche d'un lieu géométrique dans le plan, sont des problèmes de même nature, ils peuvent donc se résoudre par les mêmes méthodes.

Malheureusement, les mathématiques modernes ont été mal utilisées, trop vite, à trop forte dose, et de façon trop abstraite. Paradoxalement, alors qu'elles auraient pu permettre de dégager plus facilement qu'avant des méthodes de résolution de certains problèmes, il semble que l'on s'attache de moins en moins à cet aspect de l'enseignement : on met surtout l'accent sur la rigueur, en se préoccupant encore moins qu'avant de rendre naturelles les démonstrations.

L'analogie avec le prestidigitateur qui fait sortir des pigeons peut faire sourire, mais, en définitive, *qui sont les vrais pigeons ?*

Cet article est extrait du fascicule "Mathématiques et Prestidigitation" publié par l'IREM de Toulouse. Dans ce fascicule sont traités trois exemples supplémentaires : l'un sur les factorisations en classe de Troisième, et deux, du niveau licence de mathématiques, sur les "glissements d'ensemble" (cf. fin de l'article). Henri BAREIL et Henri SENATEUR ont manifesté un vif intérêt pour cet article au début de sa rédaction. Ils m'ont ainsi beaucoup encouragé dans mon travail. Je leur adresse mes remerciements sincères et amicaux.