5

COURRIER DES LECTEURS

A propos de "Mathématiques et Prestidigitation"

par M. DE COINTET, Lycée Koeberlé, Sélestat

André ANTIBI a publié, dans le Bulletin n° 339 de juin 1983, un article qui m'a vivement intéressé parce que le sujet traité est au cœur de mes préoccupations de professeur ; au point que je ne résiste pas à l'envie d'entamer un débat sur les idées qui y sont développées. Je pense avec l'auteur que toute tentative d'inventaire, de classification et d'explicitation des raisonnements et démonstrations mathématiques auprès des élèves ne peut que leur être profitable — probablement plus, à mon sens, que la classification des isométries — ; encore faut-il le faire à bon escient, ce qui est un problème pédagogique en soi. Le paragraphe 4 de l'article nous donne des pistes fort intéressantes à parcourir. Mais — sans quoi il n'y aurait pas de débat — je voudrais mentionner ici quelques points de forme et de fond avec lesquels je suis en profond désaccord avec l'auteur.

① André Antibi pose, dans son introduction, deux questions auxquelles il répond d'emblée : "Apprend-on à un élève à résoudre un problème ? Eh bien, "non" !" (p. 331) et "Est-il possible d'apprendre à un élève à résoudre un problème ? Eh bien, "oui"." (p. 332). A mon tour de poser une question : L'auteur fait-il partie du "on" deux fois cité ? Si oui, pourquoi ne fait-il pas ce qui est possible ? Si non, alors il est celui qui, enfin, sait ce qu'il faut faire et va en faire profiter ceux qui ne savent pas : c'est, à mon sens, une erreur pédagogique de prendre un tel "statut" dans son enseignement : ce n'est pas ainsi que nous apprendrons à résoudre des problèmes ... pédagogiques !

En réalité, l'auteur y va un peu fort en répondant "non" à la première de ses questions ; pour ma part, je peux citer, car j'en ai la preuve*, deux collègues qui apprennent à leurs élèves à résoudre des problèmes (je ne dis pas que ceux-ci savent alors le faire, mais ils l'apprennent). Je pense ne pas être le seul à pouvoir apporter un tel témoignage. Les généralisa-

* ils ont été professeurs de mes enfants.

tions — "la plupart du temps", "le plus souvent", etc. — pourraient nous faire croire que l'auteur est Inspecteur Général, ce qui n'est pas le cas. Et puis, il y a page 354, pour justifier définitivement ce "non", ce paragraphe surprenant :

"Ces erreurs de raisonnement sont si souvent commises par les élèves à tous les niveaux (y compris à l'université et dans les grandes écoles scientifiques) qu'on est obligé d'en tirer la conclusion suivante :
"ON NE LEUR A JAMAIS VRAIMENT APPRIS, AU COURS DE LEURS ÉTUDES, A FAIRE DES DÉMONSTRATIONS"."

Comment l'auteur peut-il se permettre une telle erreur de raisonnement... dans un article sur les démonstrations ? Confondre "apprendre" et "savoir", voilà un joli tour de passe-passe dans un article intitulé "Mathématiques et Prestidigitation". A trop vouloir prouver...

② L'auteur privilégie, pour un problème dont on connaît les hypothèses et la conclusion, une démonstration qui consiste à "partir de la conclusion" (p. 334).

A. Soulignons avec l'auteur que cette méthode ne vaut que lorsqu'on connaît la conclusion, ce qui en limite tant soit peu la portée. En outre, même dans ce cas, mon expérience me conduit à penser ceci : la démonstration consiste à relier hypothèses et conclusion par une suite d'implications et la démarche consiste, plus d'une fois, à la fois à "avancer" à partir des hypothèses et à "reculer" à partir de la conclusion jusqu'à ce qu'on ait "fait le joint" : il y a dans "Mathématiques pour l'élève professeur" de Georges Glaeser, paru il y a plusieurs années, un dessin fort évocateur à ce sujet. Je ne vois pas pourquoi privilégier la "marche à reculons" sur "la marche en avant" et pourquoi on serait, a priori, plus bloqué dans la seconde que dans la première : au contraire, il me semble plus difficile de trouver des conditions suffisantes que des conditions nécessaires. Suis-je le seul ?

B. Précisément, voilà bien une difficulté pour mes élèves : distinguer condition nécessaire, condition suffisante, condition nécessaire et suffisante. Et je vois trop à quelles catastrophes conduit la méthode préconisée dans le cas où l'une des implications de la démonstration n'est pas une équivalence, si l'on n'y est pas particulièrement attentif. Il me faut donc mettre en garde mes élèves sur les risques qu'il y a "à partir de la conclusion" — ce qui ne veut pas dire qu'il ne faille pas les courir, parfois —. Et puis, je pense, avec beaucoup d'étudiants à l'université, cités par l'auteur, qu'il est incorrect de "partir" de la conclusion : ce qui est correct, c'est d'"arriver" à la conclusion. Ne pas confondre ces deux mots me semble indispensable pour distinguer condition nécessaire de condition suffisante !

C. Mais il faut aller plus loin, car même dans le cas où on connaît la conclusion, les choses sont beaucoup plus complexes. Pour résoudre un problème, il faut trouver une stratégie, ce qui implique des *choix*. Voilà une grosse difficulté pour mes élèves. Je m'explique : il faut d'abord faire

le choix de ce que j'appellerai maladroitement une stratégie globale. Je pense par là à l'utilisation du calcul vectoriel, ou des transformations géométriques, ou de l'analytique, au départ d'un problème de géométrie par exemple.
Ensuite, non seulement la recherche d'une démonstration n'est pas linéaire, mais une part importante de celle-ci va consister à faire un choix parmi tous les "chemins partant de l'hypothèse" et tous ceux qui "arrivent à la conclusion" pour trouver celui ou ceux qui "se rejoignent". La réussite appartient à celui qui sait avancer (ou reculer), ni trop ni trop peu, sur des "chemins" pour ne retenir que ceux parmi lesquels il va tout-à-coup (Eurêka !), dans une vision souvent instantanée et globale, trouver celui d'une démonstration. Beaucoup de mes élèves veulent bien "avancer sur un chemin" s'ils savent d'une façon ou d'une autre que c'est le bon, mais plus d'une fois l'impossibilité d'avancer (ou reculer) résulte de la peur à s'engager "inutilement". (Je mets volontairement "inutilement" entre guillemets car, à mon avis, rien ne se perd).
Et je pense que si l'inventaire de types de démonstrations et le choix d'une stratégie globale sont susceptibles d'un apprentissage, la résolution d'un problème demeure le fruit de la pratique, du métier que l'on acquiert en utilisant ces apprentissages : ceci n'enlève rien, bien au contraire, à la valeur de ceux-ci, mais les situe mieux.

D. Enfin, l'auteur pense que "la marche à reculons" est souvent "bien plus simple et plus naturelle" que "la marche en avant". Là aussi, mon expérience m'a appris que la notion de naturel et de simplicité d'une démonstration était tout à fait relative, voire subjective et personnelle. Il m'est arrivé de faire résoudre à des élèves de Seconde AB des inéquations numériques de type $(ax+b)(cx+d)>0$ par deux méthodes : la première en recherchant directement l'ensemble des solutions par utilisation des équivalences des "et" et des "ou" ; la seconde en déterminant suivant les valeurs de x le signe du premier membre (tableau de signes) avant de conclure. Quelle ne fut pas ma surprise de constater que la classe se partageait à peu près par moitié dans sa préférence pour l'une des deux méthodes. Il en est de même de la notion d'"usuel". Je voudrais dire à ce propos que jamais je n'aurais pensé à la démonstration "usuelle" citée par l'auteur dans l'exemple 6 de la page 341.

En conclusion, je remercie l'auteur de s'être engagé sur un sujet aussi vital pour notre enseignement. Apprendre à résoudre des problèmes est l'un des objectifs, sinon l'objectif, de notre enseignement. Et je suis bien content de lire, à travers les lignes de son article, l'enthousiasme d'un membre de l'enseignement supérieur pour ces questions pédagogiques. Apporter sa pierre à l'édifice de l'enseignement mathématique, bravo ; faire valoir la qualité de sa pierre, c'est bien ; penser que seule cette pierre est de qualité, qu'elle est universelle et que les autres ne valent rien, c'est trop et c'est faux ! Péché de jeunesse ? Je le souhaite très amicalement à André Antibi, et je souhaite que, malgré cela, son article reste un encouragement à repenser sans cesse notre enseignement.