

ETUDES

Pseudo-proportions

par G. Audibert, IREM de Montpellier

Au cours d'expériences portant sur la similitude des triangles (cf. AUDIBERT G., 1982), nous avons constaté que nos élèves du premier cycle transforment les triangles de deux manières différentes : d'une part, ils utilisent les proportions, d'autre part, à un triangle donné T_1 dont les côtés mesurent respectivement P , M et G et à un nombre réel h , ils associent, lorsque cela est possible, un triangle T_2 dont les côtés mesurent $P + h$, $M + h$, $G + h$. Examinons quelques aspects mathématiques de cette transformation. A chaque triangle du plan affine euclidien nous associons la classe des triangles qui lui sont isométriques. Appelons Θ l'ensemble de ces classes. Par abus de langage, nous confondons un triangle et sa classe et nous parlons constamment de triangles et non de classes.

Nous appelons \mathfrak{s}_r une similitude directe de rapport $r > 0$, et \mathfrak{S} le groupe des similitudes directes de rapport strictement positif. Etant donné un nombre réel h , nous appelons a_h une application, qui à chaque triangle T_1 pour lequel cela est possible et dont les côtés mesurent P , M et G , fait correspondre le triangle T_2 dont les côtés mesurent $P + h$, $M + h$, et $G + h$. Pour un h donné, a_h est une application définie sur une partie de Θ . Nous appelons \mathcal{A} l'ensemble des applications a_h .

Nous disons que deux triangles T_1 et T_2 appartenant à Θ sont pseudo-proportionnels si, par définition, il existe un nombre réel $h \neq 0$ et un nombre réel $\rho > 0$ tels que

d'une part $a_h(T_1)$ existe,

et d'autre part $T_2 = \mathfrak{s}_\rho \circ a_h(T_1) = a_{h,\rho} \circ \mathfrak{s}_\rho(T_1)$.

Une telle application $\mathfrak{s}_\rho \circ a_h$ sera appelée *pseudo-proportion*.

SUA est un ensemble d'opérateurs sur Θ , selon la définition d'opérateur donnée par N. BOURBAKI (1958). Les parties stables de Θ pour la loi définie par SUA forment une partition de Θ .

Chaque partie stable, autre que celle constituée par tous les triangles équilatéraux, est engendrée par un triangle aplati $T_{\lambda,0}$ dont les trois côtés ont pour longueur respectivement

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{1}{1+\lambda}, 1 \text{ avec } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

On considère plus particulièrement dans la partie stable associée à λ la famille \mathcal{F}_λ des triangles qui ont tous 1 comme mesure du grand côté, soit la famille des triangles $T_{\lambda,h}$ dont les trois côtés mesurent respectivement

$$\frac{\frac{\lambda}{1+\lambda} + h}{1+h}, \frac{\frac{1}{1+\lambda} + h}{1+h}, 1; \text{ avec } h \geq 0.$$

Etant donné un nombre $0 \leq \lambda < 1$, appelons U, V et $W_{\lambda,h}$ les sommets d'un triangle $T_{\lambda,h}$ de la famille \mathcal{F}_λ ; UV est le grand côté, $VW_{\lambda,h}$ est le côté

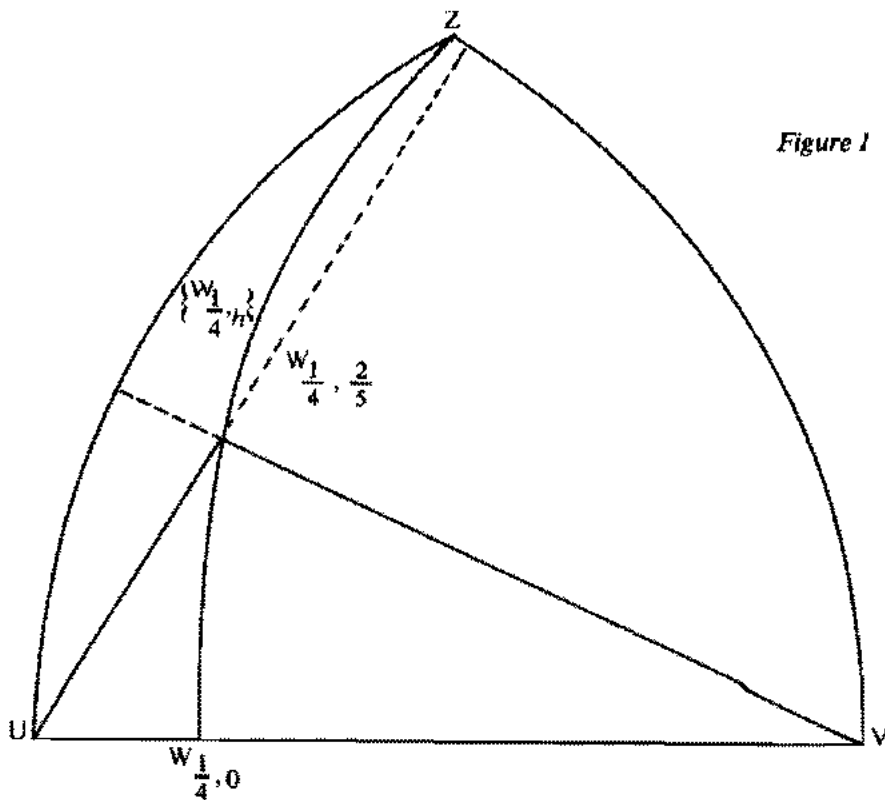


Figure 1

moyen et $UW_{\lambda,h}$ est le petit côté d'un triangle $T_{\lambda,h}$. Si nous fixons λ , le lieu de $W_{\lambda,h}$, quand h varie de 0 à $+\infty$, est une partie du lieu des points dont le rapport des distances à deux cercles fixes est constant ; ces cercles ont des rayons égaux à 1 et sont centrés en U et V. Nous représentons sur la *figure 1* les deux arcs de cercles centrés en U et V et de rayons unités permettant de définir le lieu. Nous y représentons aussi le triangle $T_{1/4,2/5}$ de la famille $\mathcal{F}_{1/4}$, obtenu pour $h = \frac{2}{5}$, c'est-à-dire le triangle $UVW_{1/4,2/5}$.

Nous représentons enfin le lieu de $W_{1/4,h}$ quand h varie de 0 à $+\infty$, en remarquant que $W_{1/4,h}$ parcourt ce lieu de $W_{1/4,0}$ jusqu'à Z, où Z est le sommet du triangle équilatéral UVZ vers lequel tend $W_{1/4,h}$ quand h tend vers $+\infty$.

Nous représentons sur la *figure 2* seize points du lieu correspondant à $\lambda = \frac{1}{4}$, ainsi que les seize triangles correspondants de la famille $\mathcal{F}_{1/4}$, dont un triangle aplati.

Le triangle équilatéral ne fait, bien entendu, pas partie de cette famille $\mathcal{F}_{1/4}$.

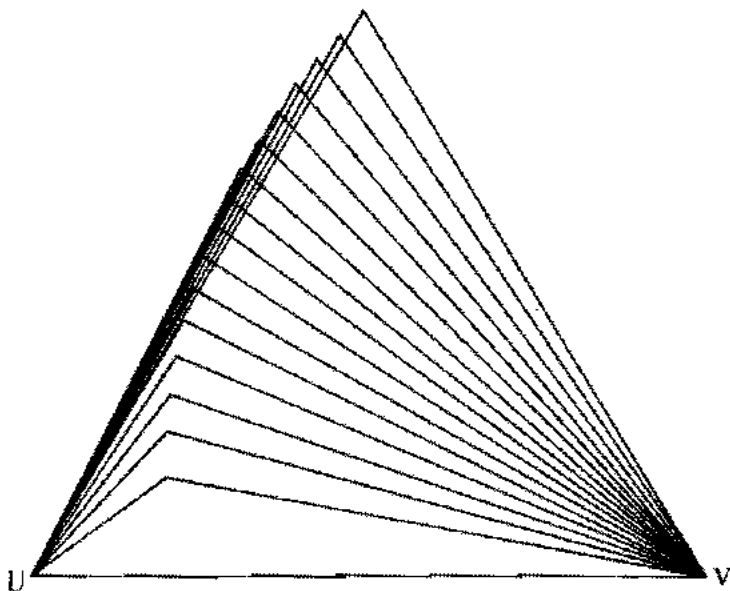


Figure 2

Pour obtenir n'importe quel lieu $\{W_{\lambda,h}\}_h$ on peut utiliser le quadrillage curviligne constitué par des arcs de cercles centrés respectivement en U et V ; ce quadrillage permet d'obtenir très rapidement le rapport

$$\frac{1 - VW_{\lambda,h}}{1 - UW_{\lambda,h}}$$

Il constitue notre *figure 3*. Il nous a permis de tracer les différents lieux de la *figure 4*.

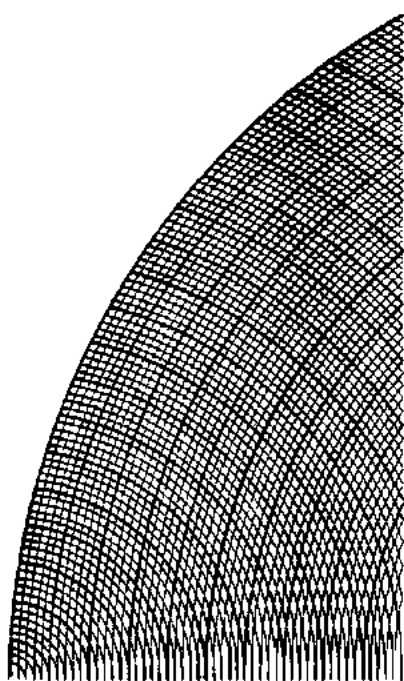


Figure 3

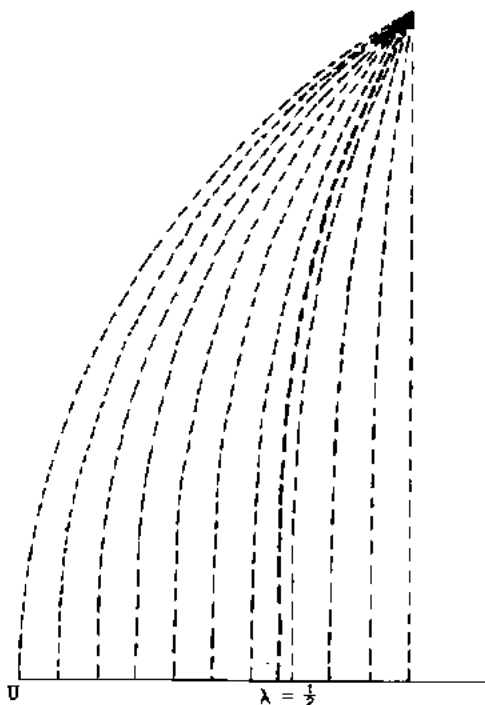


Figure 4

Remarquons que les lieux $\{W_{\lambda,h}\}$ sont des courbes algébriques du quatrième degré (cf. LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J.M. (1975), page 303).

A un triangle dont les sommets sont U, V et $W_{\lambda,h}$, nous associons les trois mesures d'angles :

$$\widehat{P_{\lambda,h}} = \widehat{UVW_{\lambda,h}} ; \widehat{M_{\lambda,h}} = \widehat{VUW_{\lambda,h}} ; \widehat{G_{\lambda,h}} = \widehat{UW_{\lambda,h}V} .$$

Ces trois angles sont opposés respectivement au petit, au moyen et au grand côté de notre triangle.

Pour chaque nombre $0 < \lambda < 1$, la fonction

$h \in \mathbb{R}_+ \mapsto \widehat{P}_{\lambda, h}$ est une fonction strictement croissante,

la fonction

$h \in \mathbb{R}_+ \mapsto \widehat{G}_{\lambda, h}$ est une fonction strictement décroissante,

la fonction

$h \in \mathbb{R}_+ \mapsto \widehat{M}_{\lambda, h}$ est ou bien une fonction croissante puis décroissante, ou bien une fonction strictement croissante. Ce résultat peut être obtenu par un simple calcul de dérivées.

Considérons maintenant, dans la partie stable associée à λ donné, l'ensemble des triangles $T'_{\lambda, h}$ dont les côtés mesurent respectivement

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} + h, \frac{1}{1+\lambda} + h, 1 + h; \text{ avec } h \geq 0.$$

La hauteur $H_{\lambda, h}$ relative au grand côté de $T'_{\lambda, h}$ est égale à

$$H_{\lambda, h} = \frac{\sqrt{2 \left(\frac{3}{2}h + 1\right) \left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{1+\lambda}\right) \left(\frac{1}{2}h + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \frac{1}{2}h}}{1 + h}$$

Ceci d'après la formule classique faisant intervenir le demi-périmètre p d'un triangle ainsi que les longueurs a, b, c de ses trois côtés et la hauteur h_a relative au côté de longueur a :

$$\frac{1}{2} a h_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

On trouvera cette formule dans le livre de BERGER M. (1977) à la page 158.

Les fonctions $h \in \mathbb{R}_+ \mapsto H_{\lambda, h}$ sont encadrées par les deux fonctions suivantes :

$$h \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{2} \sqrt{(3h + 2)h \left(1 - \frac{1}{(1+h)^2}\right)}$$

$$\text{et } h \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{2} \sqrt{(3h + 2)h}$$

que nous représentons graphiquement sur la *figure 5*.

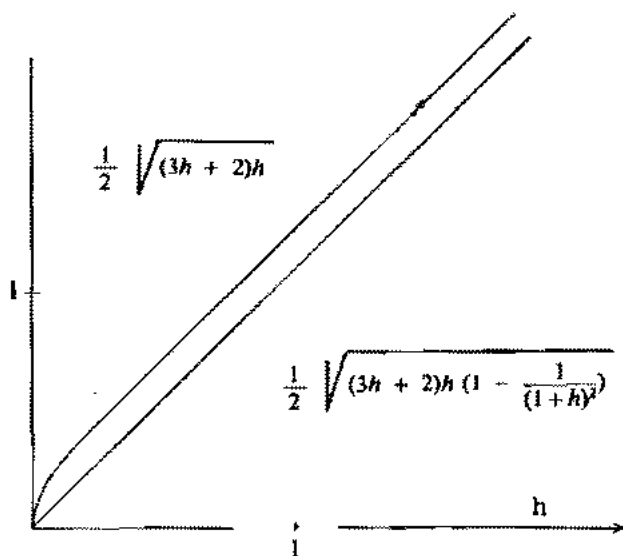


Figure 5

L'étude générale des fonctions $h \in \mathbb{R} \rightarrow H_{\lambda,h}$ permet de comparer l'accroissement correspondant à la hauteur $H_{\lambda,h}$, et de voir que pour les triangles dont les formes sont les plus utilisées, la différence entre l'accroissement de h et celui de $H_{\lambda,h}$ est très faible.

Nous donnons, dans le *tableau 6*, trois exemples d'accroissement. Sur la *figure 7*, nous avons tracé les trois couples de triangles correspondant à ces exemples, en prenant comme unité 5 cm.

λ	1	1	1	1	1	1
h	0,3	1,5	0,02	0,05	0,1	0,7
petit côté	0,8	2	0,52	0,55	0,6	1,2
côté moyen	0,8	2	0,52	0,55	0,6	1,2
grand côté	1,3	2,5	1,02	1,05	1,1	1,7
H : hauteur corres. au grand côté	0,46	1,56	0,10	0,163	0,239	0,847
accroissement de h	1,2		0,03		0,600	
accroissement de H	1,10		0,062		0,608	

Tableau 6

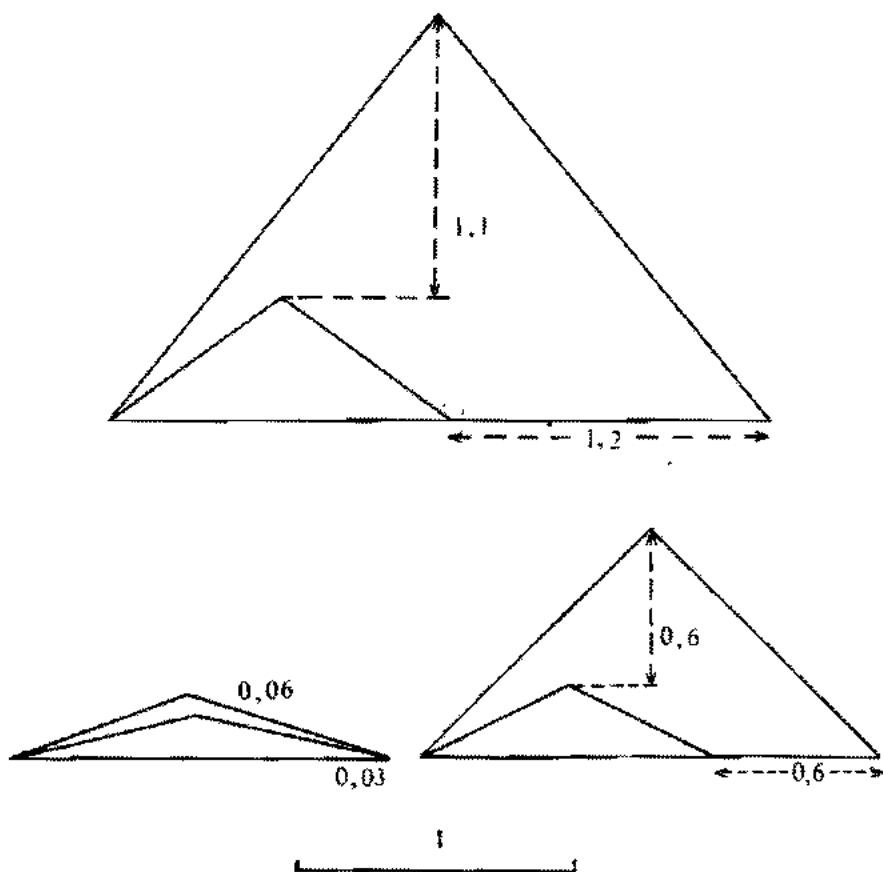


Figure 7

La place importante prise par les pseudo-proportions dans les procédures d'élèves a été mise en évidence par différentes recherches en didactique, notamment celles de BROUSSEAU G. (1981), DUPUIS C. et PLUVINAGE F. (1981), HART K. (1981), MAURY S. (1983), NOELTING G. (1980 a,b), RICCO G. (1978), sans oublier le précurseur en la matière : PIAGET J. (1947).

Il nous a donc semblé intéressant de dégager *quelques aspects mathématiques* du concept de pseudo-proportion qui émergent des procédures suivies par les élèves et que nous avons observés lors de nos propres recherches en didactique.

C'était le but de cet article.

Bibliographie

- AUDIBERT G., 1982, *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en Géométrie Euclidienne Plane*. Volume I, Volume II ; Publication IREM - Université des Sciences et Techniques du Languedoc - Place Eugène Bataillon, 34060 Montpellier.
- BERGER M., 1977, *Géométrie 2/ Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères*. Paris - CEDIC/Fernand NATHAN.
- BOURBAKI N., 1958, *Algèbre, chapitre I, structures algébriques*, Paris, HERMANN.
- BROUSSEAU G., 1981, Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 2.1, pages 37 à 128.
- DUPUIS C., PLUVINAGE F., 1981, La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en didactique des mathématiques* 2.2, pages 165 à 212.
- HART K., 1981, Strategies and errors in secondary mathematics. The addition strategy in ratio. *Actes du 5^e colloque du groupe international P.M.E.*, vol. 1 Laboratoire IMAG, BP 53 X, 38041 Grenoble Cedex, France, pages 173 à 201.
- LELONG-FERRAND J. et ARNAUDIES J.M., 1975, *Cours de mathématiques, tome 3 : Géométrie et cinématique*. Paris/Bruxelles/Montréal, DUNOD.
- MAURY S., 1983, *La quantification des probabilités chez les élèves de classe de seconde. Influence du contenu et du vocabulaire utilisés dans la présentation des épreuves*. Publication IREM - Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Place Eugène Bataillon, 34060 Montpellier Cedex.
- NOETLING G., 1980, a - The development of proportional reasoning and the ratio concept (the orange juice experiment). Part I : the determination of stages, *Educational studies in mathematics* II, 217-253.
- NOETLING G. 1980, b - The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II ; Problem solving structure at successive stages ; Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring - *Educational studies in mathematics* II, 331-363.
- PIAGET J., INHELDER B., 1947, *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris, PUF, 3^e édition 1977.
- RICCO G., 1978, *Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans*. Thèse de 3^e cycle. Laboratoire de Psychologie. Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales - Paris.