5
PREMIER CYCLE

Objectifs spécifiques de l'enseignement des mathématiques dans le Premier Cycle

2e partie, et fin

par un groupe de la Commission A.P.M.E.P. "Premier Cycle"

Le présent article complète et termine celui déjà paru sous ce titre dans le numéro 337 (pages 83 à 114).

Des références pour les paragraphes 1 ou 2 ou 3 renvoient à ce Bulletin.

On y trouvait, page 84, une brève présentation du texte ci-après, vu comme "une étude des objectifs... concernant le comportement personnel et relationnel des élèves vis-à-vis de la connaissance, des méthodes, des modes d'organisation et d'expression,... concernant aussi le développement de l'esprit logique et de l'esprit critique".

Voici le SOMMAIRE de ce texte :

- **Conclusion**
- **Annexe** : Les niveaux d'approfondissement.

4. MÉTHODOLOGIE

Pour chaque élève l'acquis essentiel passe par le goût des mathématiques et celui de l'effort, mais il s'agit aussi de savoir s'organiser et travailler, de le faire avec logique et beaucoup d'esprit critique. Quand l'élève étudie comment poser et comment résoudre des problèmes, son esprit critique est, par là-même, constamment en éveil. Aussi ne préciserons-nous, en cette Quatrième Partie, que quelques points. Soulignons d'abord que l'esprit critique ne peut s'exercer sur un objet (énoncé, figure, etc.) que si cet objet peut être mis à distance : le comportement associé doit alors prendre, selon nous, une forme constructive et non nihiliste.

4.1. ORGANISATION, EXPRESSION

a) A propos de la maîtrise de l'information

Au cours du Premier Cycle l'élève devrait :

— continuer l'apprentissage d'une lecture critique d'un texte, d'une figure, d'un matériel : décryptage du sens des mots, des codages, des perceptions ; connexions entre les divers éléments ; mise en évidence de données ou d'une partie de la figure ou du matériel ; ...

— accroître ses *capacités logiques d'interprétation d'un texte* (distinction entre les causes et les conséquences, entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes).

Tout cela est monnaie courante dans le quotidien des mathématiques du Premier Cycle, notamment en géométrie.

— apprendre à *s'interroger sur la fidélité de la perception ou de la traduction d'un texte.* N'y a-t-il pas d'hypothèses oubliées, d'autres subrepticement introduites, des progressions ou des questions implicitement modifiées ?

Précisons-le à propos de *"figures quelconques"* et *"cas particuliers de figures"* : lorsque les données n'imposent pas une figure "unique", toute figure réalisée est "particulière". C'est dangereux lorsque cette particularité peut avoir un impact mathématique.

Exemple : Soit deux droites sécantes Δ et Δ' et soit à étudier le quadrilatère formé par les points qui sont à une distance x donnée de Δ et de Δ'. Ce quadrilatère se révèlera être un losange. Mais si l'on dessine Δ et Δ' perpendiculaires, on sera conduit à conjecturer qu'il s'agit d'un carré.

— *se sensibiliser au problème des "pluri-antécédents" :*

• Une figure, un matériel, qui traduisent ou expriment un texte pourraient-ils en *exprimer d'autres*, différents ?

Cela montrera notamment que des points remarquables d'une figure peuvent répondre à plusieurs interprétations, conduisant à des problèmes différents, et qu'un texte doit préciser celle qui a été retenue.

• Un texte donné qui décrit une figure, ou un matériel, peut-il *en décrire d'autres* qui soient différents ?

Cela est bien mis en évidence par les "figures téléphonées" : une figure est décrite, sans qu'on la montre, et doit être reconstituée...

• Peut-on parvenir, et comment, à un texte caractéristique d'une figure, ou d'un matériel, et réciproquement ? Cela obligera à faire un tri et à ne retenir que des éléments pertinents eu égard à un objectif donné.

Par exemple, une figure-parallélogramme ne "caractérisera" le parallélogramme que si je fais abstraction des valeurs numériques de ses côtés et de ses angles et si la figure facilite cette abstraction en n'étant pas "particulière" (cf. supra).

— *apprendre à réaliser des instruments de travail :*

Il s'agira, par exemple, de fiches. Mais il faut aussi revoir la question des cahiers ou classeurs. Les élèves arrivent de l'élémentaire avec, généralement, de bonnes habitudes de tenues de cahier. Il reste à veiller à ce que les cahiers, classeurs, ou fiches, ne témoignent pas seulement du travail effectué ou institutionnalisé mais qu'ils fournissent, aussi et surtout, des documents de travail (pour des révisions, une aide à la recherche, ...).

— Encore faut-il apprendre à *consulter des sources d'information* (cf. § 3.4.*d*).

b) Comment triompher d'une difficulté ?

Il appartient au Premier Cycle d'insister particulièrement sur :

— *la nécessité d'un minimum bien organisé de connaissances précises.*

Exemple 1 : On étudie à fond telle leçon ou telle activité avant de passer à des exercices d'application.

Exemple 2 : "Demi-science prise pour un savoir complet serait plus dangereuse qu'ignorance". Il peut y avoir des étapes d'accès à une connaissance, à condition que l'apprentissage sache mettre en évidence d'éventuelles négligences ou erreurs initiales et contribue à y remédier. C'est ainsi que, face à la "grosse" nouveauté de "$\sqrt{\ldots}$", l'élève peut d'abord oublier une partie de la définition en identifiant $\sqrt{a^2}$ et a quel que soit le réel a . Il faudra clarifier cela, au besoin à travers quelques graves mécomptes dus à l'identification...

— *une recherche méthodique du franchissement d'un obstacle :* cf. § 3.4.*e sur une recherche d'informations graduelles.*

Il faut aussi savoir revenir en arrière, que ce soit un arrière immédiat (a-t-on utilisé toutes les hypothèses, les résultats des questions précédentes ?) ou plus lointain (ce qui peut entraîner des recherches sur documents, des révisions,...).

c) Auto-contrôle

L'enseignement des mathématiques dans le Premier Cycle doit apprendre aux élèves à s'auto-contrôler, le plus possible, par :

— *une référence à des problèmes généraux*, avec consultation d'une information sûre.

Exemple : Pour résoudre un problème de construction, s'assurer d'abord d'une bonne méthode (par analyse-synthèse) et s'en assurer en la maîtrisant sur quelques exemples.

— *un contrôle de résultats* : Sont-ils plausibles (cf. ordres de grandeur, ou l'adéquation d'un résultat à ce à quoi il se rapporte) ? A-t-on atteint l'objectif fixé au départ ? Les résultats de calculs associés à une figure correspondent-ils à ce qu'on peut lire sur celle-ci ?

Exemple 1 : Si l'on cherche la mesure d'un segment, on ne peut accepter qu'une valeur positive.

Exemple 2 : Si je calcule les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, et si je sais placer (A,B) ou un autre représentant du vecteur, je vérifie sur le dessin...

Exemple 3 : Si je dis que 1,51 est le quotient de 6,8856 par 4,56, ai-je bien $4{,}56 \times 1{,}51 = 6{,}8856$?

— *une claire conscience de la portée de ces contrôles.*

Exemples 1 : Si x possède n chiffres après la virgule (autres que des zéros à la fin), x^2 doit en posséder 2n. Mais cela est-il suffisant comme contrôle ?

Même remarque pour d'autres contrôles opératoires tels que les preuves par 9, le contrôle du dernier chiffre,...

Exemple 2 : Si je mets m en facteur commun dans $ma + mb + mc$, quel sera le nombre de termes de l'autre facteur ? Ce sera 3 si et seulement si les sommes sont irréductibles. D'autre part, comme pour les exemples ci-dessus, ce contrôle n'est pas suffisant...

Exemple 3 : Supposons qu'on ait trouvé 3 et 5 comme seules solutions d'une équation $f(x)=0$. On veut contrôler en calculant $f(3)$ et $f(5)$. Contrôler quoi ? Si $f(3)=0$, oui, 3 est une solution. Si $f(5)\neq 0$, on sait que 5 n'est pas solution (une erreur a été commise lors de la résolution). Mais ces deux calculs ne montrent pas que 3 est alors la seule solution.

Par exemple, en résolvant $(x-1)(x-8)=4(x-1)$, si nous commettons l'erreur de "barrer" $(x-1)$, nous trouverons une solution unique : 12. Nous pourrons contrôler que 12 est bien une solution mais ce contrôle ne dévoilera pas l'oubli de la solution 1.

d) Auto-questionnement

Cela va *au-delà de l'auto-contrôle.* Relevons notamment :

— *l'analyse personnelle d'un mauvais fonctionnement* : D'où vient que je ne parviens pas à cerner une difficulté ? à en triompher ? D'où provient telle erreur ? Où est l'erreur provoquant tels résultats manifestement incorrects ?

— *l'élaboration d'une démarche correcte en rectifiant* erreurs ou omissions successives,

— *la capacité de se questionner* à propos d'un texte, d'une situation, des problèmes possibles, des méthodes à mettre en jeu, ...

— *l'essai de diverses méthodes* pour un problème, avec, le cas échéant, une *comparaison* de ces méthodes,

— la capacité à s'interroger sur les *conséquences de tel ou tel résultat partiel* (nouvelles questions, nouveaux résultats,...),

— le souci *d'échapper à la parcellisation du savoir* en s'interrogeant sur l'insertion de problèmes, notions ou méthodes dans des ensembles plus vastes et en cherchant à mieux cerner ceux-ci.

Exemple 1 : L'étude des deux symétries, de la translation, de la rotation prendra une toute autre dimension si on étudie les relations de ces quatre applications entre elles.

Exemple 2 : L'intérêt des factorisations apparaît si on les réfère aux équations, inéquations, simplifications de fractions,...

— le souci d'*utiliser des notions mathématiques hors des "heures de mathématiques"*.

Exemple : Utilisation de l'énoncé de Thalès pour évaluer la hauteur d'un arbre...

Cela renvoie aux *objectifs interdisciplinaires*, notamment aux liens avec les sciences physiques, la technologie, la biologie, les sciences économiques et sociales, *et à la vie pratique* (estimations, comparaisons de prix, recherche ou application de pourcentages,...).

e) Contrôle et questionnement mutuels

Tout ce que nous venons de dire quant aux attitudes individuelles s'inscrit aussi, et plus fortement encore sans doute, dans le cadre d'activités de groupe.

f) Une pluralité de modes d'expression

Tout travail de réflexion va généralement se traduire par une expression : figure, objet, rédaction d'un texte,... permettant de fixer pour soi-même et de communiquer aux autres les éléments de cette réflexion.

• *L'expression par figures ou objets* est jusqu'à présent trop négligée, en mathématiques, dans le Premier Cycle. La revalorisation des activités géométriques, et la valorisation de celles "de l'espace" devraient entraîner quelque amélioration.

> Citons, notamment, le "fil à couper le beurre" de Charles Pérol : réalisation de solides (dont les surfaces sont des surfaces réglées) par découpage de polystyrène*.

• *Par ailleurs, que rédiger ?*

Le suivi des élèves serait mieux assuré, et leur propre capacité d'auto-questionnement mieux développée, s'ils étaient habitués à rédiger aussi autre chose que des calculs ou des démonstrations dûment élaborés : en donnant, par exemple, un aperçu de leurs essais, de leurs tâtonnements, des réflexions alors développées, et des "tilts" qui ont pu s'ensuivre.

• Quant aux calculs et aux démonstrations eux-mêmes, *plusieurs langages sont possibles : organigrammes de calcul, "déductogrammes" de démonstration, langage courant*. Il est intéressant d'apprendre à les pratiquer tous les trois, chacun ayant ses mérites propres.

La rédaction en langage courant peut, par son flou ou ses omissions, par l'utilisation aussi d'un formalisme mathématique mal assimilé, se prêter facilement au camouflage d'une pensée incorrecte ou insuffisante. Mais si l'on s'oblige à une rédaction soignée, l'emploi du langage courant sera aussi, comme les organigrammes et les déductogrammes, une école de rigueur et de bien-dire qui oblige à affiner la pensée. La rédaction en langage courant facilite alors une expression plus complète et plus nuancée du travail effectué.

> "... Il est vrai que rédiger coûte un effort : on n'écrit pas comme on parle, c'est un autre "niveau de langue", comme

* Cf. brochure A.P.M.E.P. n° 22 *Géométrie au Premier Cycle*, tome 2, page 45.

disent les philologues actuels. Tout professeur qui s'astreint à rédiger clairement, complètement, une suite de démonstrations, sait que bien souvent on se heurte à des difficultés imprévues qui obligent à remettre en question des notations, des prémisses trop imprécises, des déductions trop hâtives, un style confus. Mais quel exercice pour l'affinement de la pensée et du langage...

... [Il faudrait] bannir à tout jamais de notre enseignement des démonstrations géométriques (ou autres) qui ne sont que des successions de formules... Si nous ne parlons [aux élèves] qu'un langage de machine, nous risquons de n'en faire que de bien pauvres techniciens". (Claudine FESTRAETS, Présidente de la Société Belge des Professeurs de mathématiques d'expression française).

Mais apprendre à rédiger est un objectif interdisciplinaire, à poursuivre notamment avec les collègues de Français si l'on veut obtenir une progression cohérente. Et le degré de précision souhaité ne peut être acquis que par des progrès concertés tout au long du Premier Cycle.

4.2. ESPRIT LOGIQUE, ESPRIT CRITIQUE

a) A propos des connaissances et des méthodes

•• *Renvoyons d'abord à nouveau à tout ce que nous avons dit sur les façons de reconnaître des problèmes, de les poser, de les résoudre.* Cela met en jeu et développe l'esprit logique et l'esprit critique.

•• Mais insistons sur *l'esprit critique :*

• *Une de ses vertus premières est le doute.* Il faut cultiver l'apprentissage d'un doute apte à mieux fonder la connaissance :

— apprendre à douter des "évidences" (cf. § **2.1.***b*)
— apprendre à distinguer conventions et propriétés.

Par exemple, la "priorité de la multiplication sur l'addition" n'est qu'une convention d'écriture ; la notation polonaise en est une autre qui fait écrire le signe d'opération après les deux nombres sur lesquels il opère.

— apprendre à remettre en question un raisonnement : d'abord par une critique serrée des connaissances qu'il met en jeu, de son domaine de validité et de ses liaisons logiques.

Signalons aussi un type d'investigation assez spécifique : reconstituer une situation de départ à partir d'un raisonnement et de ses conclusions. Cela peut se faire aussi bien à partir d'un déductogramme que d'une rédaction classique. On peut ainsi mieux éclairer l'usage qui a été fait d'une situation (hypothèses négligées, ou modifiées,...). Le puzzle mathématique est également un exercice très riche.

• *Un autre aspect de l'esprit critique est son effort de comparaison, de choix délibéré et d'optimisation.*

— choix et comparaison des méthodes possibles :

Exemple 1 : De nombreux problèmes de géométrie élémentaire peuvent se traiter avec ou sans l'appui des transformations géométriques.

Exemple 2 : La composition des translations peut (avant l'addition des vecteurs) s'étudier à l'aide des propriétés du parallélogramme, ou par l'analytique, ou en se référant aux symétries centrales,...

— délimitation du domaine de validité des résultats et de leur signification :

Exemple 1: Trouver le développement de $(a+b)^2$ à l'aide des aires de rectangles ne permet pas de conclure directement quand a et b sont négatifs.

Exemple 2 : Trouver que tel point variable M est nécessairement sur telle ligne L ne permet pas de conclure que M décrit L tout entière.

Autres exemples : Cf. supra, dans les paragraphes **4.1.** *c* sur l'auto-contrôle, à propos du contrôle des résultats et de la portée de ces contrôles.

• *L'esprit logique et l'esprit critique doivent aussi s'exercer pour l'articulation, le regroupement et la structuration des connaissances :*

— cela exige d'abord le primat des explications (quand elles sont possibles) sur l'utilisation mécanique de formules et d'algorithmes.

Exemple : En Cinquième, il importe de réexpliquer longtemps, sur chaque exemple, le pourquoi de $ax^m \times bx^n = abx^{m+n}$

— cela exige ensuite que l'on reconnaissance des similitudes profondes.

Exemple : Définition géométrique d'une transformation et sa formulation analytique.

— plus généralement, il s'agira de faciliter connexions et réinvestissements entre les divers domaines des mathématiques et les diverses méthodes.

Exemple : En géométrie, analytique et vectoriel permettront l'outil algébrique.

• Nous retrouvons ces connexions de façon encore plus générale : des objectifs fondamentaux ayant été définis, *quelles sont les diverses activités qui peuvent concourir à leur réalisation de façon variée ?*

Exemple : Considérons l'objectif qui se propose, pour permettre de prévoir ou de contrôler, d'insister sur l'intérêt des estimations. Diverses activités peuvent alors être mobilisées : activités de calcul numérique, de résolutions graphiques d'équations, de tracés géométriques, de réalisation d'objets, d'utilisation de modèles mathématiques (cf. utilisation de la proportionnalité pour des situations de la vie courante où elle n'intervient qu'approximativement), de conjectures à partir de tableaux de données,...

b) A propos des moyens matériels (manuels, machines,...)

•• *Premier problème : Les sources d'information sont-elles fiables ?*

Les textes écrits le sont généralement, en mathématiques élémentaires, surtout à propos de sujets classiques. Mais, par exemple, les rubriques de "Jeux mathématiques" non scolaires montrent assez souvent des omissions, tâtonnements ou erreurs.

Elles n'en sont pas disqualifiées pour autant, au contraire : il est excellent d'avoir des "états" d'une question auxquels on ne trouve provisoirement rien à redire et qui se révèleront ensuite imparfaits.

•• *Deuxième problème : Quelle est la fiabilité des moyens matériels employés ?*

Il s'agit surtout de la fiabilité des plus sophistiqués : machines à calculer, ordinateurs,...

Exemple 1 : Telle calculatrice de poche (scientifique) à qui l'on demande le calcul de $(-4)^3$ répond : "impossible". Or $(-4)^3 = -64$.

Exemple 2 : Les utilisateurs des calculatrices de poche connaissent les surprises dues aux arrondis successifs.

Pour déjouer ces surprises, il faut connaître les modes de calcul de la machine. Pour l'exemple 1, si elle refuse le calcul de $(-4)^3$ avec la touche "puissance", c'est qu'elle travaille à l'aide des logarithmes et que celui de -4 n'existe pas. A défaut de savoir déjouer les surprises, tout au moins doit-on être sur le qui-vive, en sachant que les calculs demandés peuvent emprunter d'autres méthodes que les nôtres.

Par contre, la machine peut soulever des *"lièvres d'extensions de définition" :*

Exemple 1 : Un élève de Cinquième qui demande le calcul de $(5)^{-2}$ est surpris d'une réponse (0,04). De même, pour $(4)^{0,25}$ il y aura une réponse (la même que pour $\sqrt{2}$). De quoi intriguer et permettre d'aller un peu plus loin que ne le prévoit le programme... si cela répond à une impatiente curiosité des élèves.

Exemple 2 : Sur certaines machines les élèves verront des noms de touches inconnus d'eux. De même, jusqu'à la Troisième, pour le "mode radian".

•• *Troisième problème : celui de la dépendance vis-à-vis des moyens matériels.*

Elle est particulièrement grave vis-à-vis de l'informatique, compte tenu de sa prégnance : nos élèves seront-ils de simples utilisateurs, des "presse-bouton" de programmes conçus par d'autres ? Ou au contraire sauront-ils en réaliser et en modifier selon leurs propres critères ?

Diverses expériences (notamment "Calculateurs programmables et algèbre de Quatrième"*, expérience nationale poursuivie de 1973 à 1978) ont montré que la seconde attitude est parfaitement possible dans le Premier Cycle. Des expériences LOGO ont d'ailleurs montré la même possibilité dès l'école élémentaire...

c) Attitude face aux problèmes

Les efforts d'organisation, de réflexion, de développement de l'esprit logique et de l'esprit critique, devraient avoir un premier objectif : permettre à l'élève d'aborder sans appréhension majeure les problèmes et les situations nouvelles.

d) Analyse et synthèse

• Il est bien évident que les comportements d'analyse et de synthèse, traditionnellement attendus et développés en mathématiques, sont mis en œuvre à partir des objectifs précédents. Rappelons qu'en effet en mathématiques :

— l'esprit d'analyse se manifeste par une capacité à identifier certains objets (énoncés, êtres géométriques, numériques,...), leurs rôles respectifs, les relations entre eux, ainsi que les étapes successives d'un processus ;

— l'esprit de synthèse se manifeste par une capacité à recomposer un morcellement en un tout cohérent, par un critère classifiant ou par un processus globalisant.

Par exemple, dans une situation-problème :

— l'élève l'analysera en distinguant l'objectif terminal, les objectifs et étapes intermédiaires y conduisant, les données (hypothèses, propriétés connues dans la théorie,...) pouvant les articuler ;

— l'élève synthétisera les étapes en un processus unifié et logiquement cohérent.

* Cf. Brochure A.P.M.E.P. n° 24.

• Soulignons que tout cela ne peut réellement s'exercer que par une pratique méthodique d'activités de recherche...

5. UN ET SINGULIER — tel est chaque élève —

Le développement des capacités d'évolution d'un élève suppose qu'il soit *pris en compte dans son unité et sa singularité* et qu'il ne soit pas l'objet, sous un prétexte ou sous un autre, d'un enseignement où :

— *le professeur parle et agit, l'élève apprenant et répétant,*

— *les mêmes attitudes et le même rythme sont imposés à des élèves très différents,*

— *ne se cultivent qu'une ou deux démarches, par exemple, l'art de rédiger une démonstration en oubliant toute la démarche scientifique de recherche avec essais, prise d'exemples, conjecture,... (cf. § 3.5.b).*

Un tel enseignement, qui procède d'une réflexion insuffisante sur les méthodes en jeu, leur apprentissage, leur critique, est en contradiction avec les objectifs et la méthodologie présentés précédemment.

• *Prendre le contre-pied de cela suppose une "pédagogie différenciée".*

Mais une vraie pédagogie différenciée ne saurait créer des ségrégations de fait, "spécialisant" chaque élève dans des tâches dites à sa portée : aux "faibles" les dessins et les tâches d'exécution, aux "forts" les tâches de conception, d'organisation, de démonstration. Il est donc nécessaire que chaque élève, quelles que soient ses capacités initiales, soit affronté à l'ensemble des démarches et des méthodes considérées comme éducatives. Or ces démarches et méthodes ne jouent pleinement qu'à l'occasion de problèmes, s'agissant de les poser, s'agissant de les résoudre.

Il s'agit donc d'offrir à chaque élève l'occasion de chercher et de réussir, l'occasion d'approfondir, celle de développer son autonomie et ses possibilités.

Au professeur, à partir d'un cadre général, d'aider chaque élève à choisir ce qui, à un moment donné, peut contribuer le plus efficacement possible à cette formation.

"Directeur de recherche", le professeur doit, pour chaque élève, savoir doser son aide : trop aider étouffe l'effort propre de l'élève, aider trop peu risque de le confiner dans un piétinement sclérosant et déprimant. Même si ceci peut paraître utopique, il faut donc essayer de préciser pour chaque élève, à tel moment, un "niveau d'aide".

• *Saisir chaque élève en sa singularité est alors une tâche énorme*, impossible à mener à bien actuellement avec la minceur des moyens, eu égard au trop grand nombre d'élèves à prendre en charge par chaque enseignant de mathématiques.

Il faudrait, de plus, saisir l'élève en son unité :

— cela exige d'abord une *vision éducative globale, toutes disciplines confondues*, et toutes activités scolaires prises en compte,

— cela exige aussi que les *problèmes d'ordre social et affectif* ne soient pas considérés comme inexistants.

★ ★ ★

"Il y a partout des essaims — dit un professeur belge, Françoise HECQ —. A nous, professeurs, de les échanger, de les faire éclore, de les assumer et de créer quelque chose ensemble". Oui. Mais en mettant, le plus possible, les élèves en mesure "d'échanger, de faire éclore, d'assumer et de créer" *eux-mêmes*, en les rendant *acteurs de leur propre formation*.

Nos "OBJECTIFS SPÉCIFIQUES" ne se conçoivent, à nos yeux, que dans cette optique éducative générale. Ils revêtent alors une importance et un intérêt fondamentaux qui prendront leur plein effet si, selon nos vœux, l'enseignement des mathématiques est réorienté, par une plus large prise en compte des activités de recherche et de comportement, et s'il est corrélativement pourvu de moyens d'intervention accrus.

Annexe

LES "NIVEAUX D'APPROFONDISSEMENT"

Pour chaque notion, chaque problème général, il existe plusieurs niveaux d'approfondissement (cf. Bulletin A.P.M.E.P. n° 323, page 283) :

1 Une *première approche*, qui peut permettre de capter l'intérêt des élèves.

2 Un *débroussaillage*, sur *exemples* (avec affinement de la compréhension des *problèmes en jeu* et la recherche d'*idées* propres à les résoudre).

3 Une *étude déjà solide d'exemples significatifs* (dans certains cas, elle servira à étayer telle ou telle conjecture, dans d'autres à mettre clairement en œuvre des méthodes de résolution des problèmes).

4 Une *étude synthétique générale*, démontrant le plus possible ou, partout ailleurs, délimitant avec précision le champ de validité des conjectures.

Prenons l'exemple de la résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

Niveau 1 : Un petit problème concret fera déboucher sur un tel système, sur sa traduction graphique, sur l'intérêt et les limites de celle-ci pour le dénombrement et la détermination des solutions.

Niveau 2 : Une méthode de résolution par calcul commencera à s'élaborer, probablement à partir de cas particuliers, et sur des exemples à coefficients numériques.

Niveau 3 : Toujours sur des exemples à coefficients numériques, cette méthode de résolution sera maîtrisée et une conjecture précisée quant au nombre de solutions.

Niveau 4 : Etude générale du problème avec des coefficients littéraux (Classes du Second Cycle) dans les trois domaines :
— de la représentation graphique,
— de la traduction vectorielle du système,
— du calcul algébrique.

Remarque : Chaque niveau relève d'un objectif déterminé. Mais, dans la mise en œuvre, il y a recouvrement entre deux niveaux consécutifs ; il n'y a pas de frontière précise !