4

PREMIER CYCLE

Objectifs spécifiques de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle

par un groupe de la Commission A.P.M.E.P. "Premier Cycle" *

Dans un premier article paru dans le Bulletin 334 de juin 1982 (pages 511 à 520), nous avons présenté le résultat de nos "réflexions sur ce que pourrait être un renouvellement de l'enseignement des mathématiques".

Aujourd'hui nous vous livrons une suite de notre travail. C'est un document qui a pour seule ambition de contribuer à faciliter pour chacun un effort personnel d'analyse de sa pratique. Nous serions donc heureux de recevoir des remarques, même explosives, de votre part**.

Il ne sera pas question ici d'interdisciplinarité ; celle-ci sera prise en compte dans un article ultérieur.

Dans notre document les exemples choisis pour illustrer chaque paragraphe ne sont pas nécessairement du "programme" du Premier Cycle ou d'un niveau accessible aux élèves de ce Cycle. Mais tous sont censés nourrir la réflexion du professeur. De plus ceux qui ne sont pas présentables comme tels aux élèves peuvent éventuellement faire l'objet d'une approche voire d'une étude guidée en classe.

* Ce groupe est animé par Jeannine CARTRON (Collège, Niort). Il comprend en outre Claude ANSAS (Collège, Marseille), Henri BAREIL (Collège, Toulouse), Louis DUVERT (Collège et Lycée, Lyon), Régis GRAS (Université, Rennes), André HENNETON (Collège, Issoire), Jean-Pierre ORHAN (Technique, Rouen), Charles PEROL (Irem, Clermont).

** Adressez vos remarques à Jeannine CARTRON, 1 impasse Fauvettes - 79000 Niort.

SOMMAIRE

Cet article sera complété, dans un prochain Bulletin, par une étude des objectifs spécifiques de l'enseignement des mathématiques du Premier Cycle concernant le comportement personnel et relationnel des élèves vis-à-vis de la connaissance, des méthodes, des modes d'organisation et d'expression, ...concernant aussi le développement de l'esprit logique et de l'esprit critique.

INTRODUCTION

• Des objectifs spécifiques en fonction de quoi ?

— de l'âge des élèves (11-15 ans, pour la plupart),
— des autres disciplines,
— de l'enseignement des mathématiques avant et après le premier cycle,
— du comportement général qu'induisent les médias et les façons de penser, d'être et d'agir rencontrées dans toute vie en société.

• Spécifiques en quoi ?

Ce sera parfois un simple changement d'accent, une attention plus grande accordée à tels objectifs.

Parfois, au contraire, il s'agira d'objectifs radicalement différents, originaux. Les mathématiques peuvent alors jouer un rôle irremplaçable, ce qui signifie que les élèves du Premier Cycle doivent y être le plus possible impliqués.

1. UNE RÉFLEXION GÉNÉRALE

1.1. LE VRAI

• Il n'est de vérité, hors celle des faits bruts, qu'à l'intérieur d'une théorie — non contradictoire — et vis-à-vis de celle-ci.

Or cela est très peu mis en valeur, dans notre enseignement et dans les autres domaines de la connaissance ou de la vie : la notion de "vrai" y prend trop volontiers des airs d'absolu. Il y a là une ambiguïté dont il est bon de faire prendre conscience aux élèves, d'autant plus que la notion de vrai est au cœur même de tous les problèmes de la communication.

• L'enseignement des mathématiques dans le Premier Cycle est un terrain privilégié pour une réflexion sur le vrai, son caractère relatif à une théorie institutionnalisée et les difficultés ainsi soulevées. En effet, au grand dam des ambitions des programmes de 1971, il s'est révélé impossible pour les élèves, au moins en l'état actuel des choses, de s'approprier une théorie mathématique dont ils vérifieraient la cohérence, avec un départ axiomatique et des déductions sans faille. Comment dès lors conduire les élèves à apprécier le vrai ?

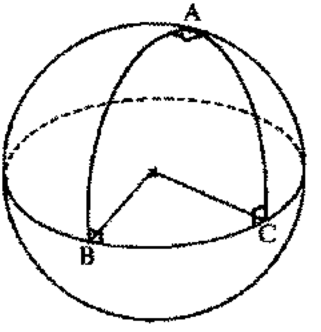
— On peut nimber les activités mathématiques pratiquées d'énormes axiomes extra-mathématiques, par exemple, en géométrie, celui d'une prétendue conformité avec le monde physique observé à notre échelle.

Mais alors on peut rendre évidente la relativité de ce "vrai" :

— A une plus grande échelle, le plan physique horizontal devient un morceau de sphère.

— La géométrie sphérique traduit par les grands cercles les droites de la géométrie du plan.

On trouvera alors, sur la sphère, des triangles ayant trois angles droits : cf. le triangle sphérique ABC de la figure ci-contre. (Pour plus de développements, cf. article de Daniel LEHMANN, Bulletin A.P.M.E.P. n° 333, page 243, ou "Le Géométricon", Ed. Belin).



— On peut aussi demander aux élèves une confiance totale en le savoir mathématique tel qu'il apparaît à travers enseignants ou manuels. Cela peut favoriser une prise de conscience du caractère institutionnel de la connaissance : le professeur est, en sa discipline, une sorte de chef d'orchestre du vrai, donnant au groupe classe les règles mathématiques.

Mais quelle est alors la solidité du savoir auquel on se réfère ? Quel est son champ de validité ?

De telles interrogations devraient conduire les élèves, sur un plan plus général, à beaucoup de modestie et de doute... ainsi qu'au souci de sources aussi sûres que faire se peut.

— Il est aussi possible de relativiser le vrai par quelques coups de projecteur sur d'autres enchaînements mathématiques :

Par exemple, rapportons le plan à un repère cartésien quelconque, puis définissons l'orthogonalité des droites (AB) et (AC) par $BC^2 = AB^2 + AC^2$, et la distance $M_1 M_2$ par $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$. Voilà, dès lors, les axes de coordonnées orthogonaux (au sens mathématique) quel que soit leur angle physique ! La géométrie ainsi induite est-elle farfelue ? Non ! On peut l'obtenir par projection cylindrique, ou parallèle, d'un plan à "orthogonalité classique" sur un plan non parallèle. On la rencontre donc à propos des ombres, de la perspective...

D'autre part l'enseignement des mathématiques dans le Premier Cycle ne devrait pas étroitement conduire à l'examen de seuls faits mathématiques sur lesquels le jugement, en référence à une théorie, conduise uniquement à des réponses en termes certains de "vrai" ou de "faux".

Il existe en effet des phénomènes que les mathématiques prennent maintenant à juste titre dans leur champ — depuis un siècle à peine — et qui ne sont pas déterministes : ce sont les phénomènes aléatoires. Tout en continuant à poursuivre l'apport d'une preuve pour valider l'affirmation d'un énoncé, on laisse alors la place à l'existence de faits mathématisables pour lesquels on cherchera le "degré", la "pondération", la "mesure" de leur vérité : il en ira ainsi, par exemple, pour le fait : "pile apparaît dans le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée".

Enfin, les mathématiques, par leur existence et leur fonctionnement, montrent la possibilité d'enchaînements établissant la vérité relative de tels ou tels faits. Mais elles manifestent alors la rigueur exigée, pour ces déductions, à partir d'une claire mise en évidence des hypothèses et des lois utilisées. Peut-on ailleurs, et notamment dans la vie courante, agir de la même façon, avec la même rigueur ? On sait, de plus, qu'il y a, même en mathématiques, "des degrés dans la rigueur" et que tout est fonction de l'objectif poursuivi...

La relativité et les exigences du "vrai" mathématiques peuvent donc éclairer utilement la notion sociale de "vrai" et le décaper d'habits d'absolu trop facilement empruntés. L'enseignement des mathématiques du Premier Cycle ne saurait négliger le rôle éducatif si important qu'il peut et qu'il doit ainsi assumer.

1.2. LES ÊTRES MATHÉMATIQUES

Les êtres mathématiques existent fondamentalement par les relations qu'ils ont entre eux.

La réflexion induite là-dessus par les mathématiques peut avoir valeur d'exemple : n'en est-il pas ainsi de tous les êtres connus, d'autant plus que leur vie sociale est plus évoluée, ce qui vise, par excellence, les humains ?

L'enseignement des mathématiques peut commencer à montrer aux élèves du Premier Cycle :

— qu'on n'enferme pas un être mathématique dans sa définition, et encore moins dans ses représentations,

— qu'il y a un enrichissement progressif, acquis par le *fonctionnement*, et par *la nécessité de faire face à de nouveaux problèmes.*

Cf. la notion de cercle avec ses propriétés caractéristiques toujours plus nombreuses, ses interventions plus foisonnantes d'année en année, ses équations...

Cf. la notion de nombre aux prises avec les équations. D'où des extensions successives...

— que cette acquisition progressive à travers le fonctionnement suppose donc qu'on n'attende pas, pour faire intervenir des êtres mathématiques, de leur donner un statut explicite.

Cela permet de n'écarter a priori aucune interrogation des élèves, ni aucune investigation (cf. infra § 2.1.a.) et d'ouvrir aux vents du large le domaine du "programme", par exemple une approche de courbes ou de solides variés, les exploitations de tableaux statistiques...

— que le surgissement d'un être mathématique peut naître de mutations faisant passer à un niveau supérieur d'abstraction :

Par exemple, la symétrie orthogonale et la translation résultent de mutations, tous états intermédiaires et toutes incertitudes physiques oubliés, du pliage et du glissement sans rotation.

— qu'il y a eu, tout au long de l'histoire des mathématiques, un affinement progressif des notions, pour mieux les définir ou pour étendre leur champ d'application :

Cf. la notion de fonction, celle de nombre...

Cf. aussi "la relation de Chasles" (voir Brochure A.P.M.E.P. n° 38 : *Activités mathématiques en 4e, 3e*, tome 2)...

Ici aussi notre enseignement peut être une école de vie et de refus du figé..., de confiance aussi, tant les progrès sont souvent venus à travers erreurs et défectuosités.

1.3. TENSIONS ET CONVERGENCE

Le fonctionnement des êtres et des sociétés semble d'autant plus fécond et harmonieux qu'il est vécu dans une unité résultant d'une convergence de tensions antagonistes qui s'acceptent comme complémentaires.

Là aussi l'enseignement des mathématiques du Premier Cycle peut donner l'exemple, pourvu qu'il ne se mutile pas, *en sachant être à la fois expérimental et abstrait*, en alliant les conjectures et les démonstrations, la recherche de la rigueur et le foisonnement des essais, la permanence dans les objectifs et les remises en question, le plaisir de faire des mathématiques et le fait de se distancier par rapport à elles...

Toutes choses qui ne seront possibles que si l'enseignement des mathématiques s'intéresse beaucoup aux méthodes et consent aux élèves, avec le droit à l'erreur, une forte marge de liberté dans la recherche, la découverte, l'exploitation, en même temps qu'il les dotera de solides principes d'action et qu'il saura les mettre à l'aise vis-à-vis des mathématiques tout en en développant le goût.

1.4. UN RÔLE IRREMPLAÇABLE

• Quelle que soit la démarche choisie pour aborder un problème, quel que soit le niveau d'approfondissement auquel on parvient, il s'agit de savoir quelle est la conclusion autorisée.

Exemple 1 : Pour tracer la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ à l'aide de points obtenus à partir de $x = -9$ avec un pas de 0,4 va-t-on joindre de proche en proche tous les points obtenus ?

Exemple 2 : Je pars d'un naturel n quelconque auquel j'applique la procédure *p* suivante : "Si n est pair, je le remplace par $\frac{n}{2}$. Si n est impair, je le remplace par $\frac{1}{2}(3n+1)$." J'applique la même procédure au nouveau naturel obtenu. Et ainsi de suite, indéfiniment.

Un très grand nombre d'essais fait toujours tomber sur la boucle $(1 \to 2 \to 1)$. Vais-je en tirer une loi générale ?

• Insistons sur le dernier exemple : les mathématiques sont probablement *la seule discipline à refuser d'ériger en loi une conjecture issue d'une accumulation d'exemples réussis, et en l'absence de contre-exemple.*

Ce refus n'est pas naturel aux élèves : on n'est pas aussi rigoureux ailleurs. Or il serait fort utile de l'être. En évitant bien des jugements incorrects ou hâtifs, cela conduirait à plus de tolérance et de respect des autres, à plus de souci de leur marge de liberté (en ne les "enfermant" plus dans des a priori conjecturés) !

Il restera à équilibrer une tension entre la confiance fécondante en des conjectures aussi fondées que possible et l'inquiétude qui naît de l'absence de preuve et qui incite à poursuivre la recherche.

Les mathématiques ont donc ici une valeur éducative irremplaçable.

Les élèves en saisiront l'intérêt en voyant d'une part des conjectures apparemment solides prises en défaut, d'autre part le rôle des conjectures dans la découverte (par exemple à propos de points variables).

En remettant à leur vraie place les conjectures, les mathématiques leur donnent en même temps tout leur intérêt. Les mathématiques apparaissent ainsi comme un bon chef d'orchestre de la connaissance. Il importe donc de le montrer.

*
* *

Un objectif majeur de l'enseignement des mathématiques, dans le Premier Cycle comme ailleurs, est de contribuer le plus efficacement possible à *apprendre à poser des problèmes* puis à *essayer de les résoudre.*

Ces essais pourront conduire à la création de nouveaux êtres mathématiques ou de nouveaux outils et à la comparaison de diverses méthodes.

2. POSER DES PROBLÈMES

2.1. QUELQUES PRINCIPES

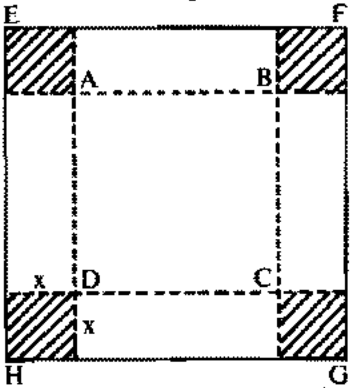
a) Un champ ouvert

Des situations pauvres sont à remplacer ou à prolonger par des situations riches plus excitantes pour l'esprit, plus motivantes, ou moins limitatives.

Exemple 1 : Résoudre graphiquement une équation du premier degré relève de l'art pour l'art. Par contre l'étude graphique d'une équation de degré supérieur à 1 peut éventuellement, dans le Premier Cycle, permettre de traiter de vrais problèmes.

Cf. le problème de la "boîte aux coins coupés".

On dispose d'un carton carré EFGH (de 24 cm de côté par exemple). On l'utilise pour fabriquer une boîte, sans couvercle, en découpant, à chaque coin, des carrés de côté x, en cm. On voudrait choisir x pour que le volume soit maximum.

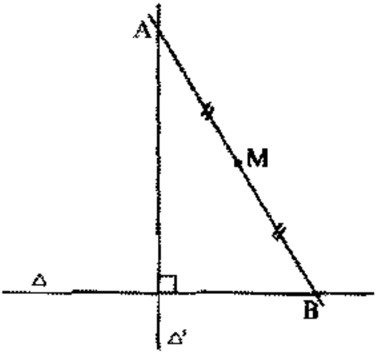


Un tableau de valeurs numériques et la représentation graphique du volume en fonction de x permettent de conjecturer qu'il y a maximum quand $x = 4$ ou pour une valeur très voisine. Sur le plan pratique le problème est donc traité : on prendra $x = 4$. En fin de Premier Cycle,on peut d'ailleurs démontrer (sans dérivée !) : il suffit par exemple de poser $x = 4 - y$, de calculer le volume en fonction de y, puis, trouvant $4[256 - y^2(12 + y)]$ d'en déduire que le maximum a bien lieu pour $y = 0$.

Exemple 2 : La géométrie dans l'espace est, dans les faits, ignorée ou très peu abordée en Quatrième-Troisième. Or la fabrication et l'étude d'objets de l'espace est d'une grande richesse et d'une grande valeur éducative.

Exemple 3 : L'organisation et l'exploitation de tableaux de données ouvrent sur une foule de problèmes motivants, sur la création d'objets mathématiques nouveaux (ceux des statistiques) et sur des démarches où l'induction contrôlée prend toute sa valeur.

Exemple 4 : En Quatrième, les programmes actuels permettent l'intéressant problème suivant : "Soit deux perpendiculaires Δ, Δ', et un segment [AB] de longueur constante, de milieu M, tel que A soit sur Δ et B sur Δ'. Quel est l'ensemble des points M possibles ?"



Pourquoi ne pas s'intéresser aussi à d'autres points du segment [AB] ?... Les élèves trouveront alors, par points, des courbes qui leur "sembleront" être des ellipses... (ce qu'elles sont, mais le Premier Cycle ne permet pas de démonstration).

Exemple 5 : On peut expérimentalement chercher des enveloppes de droites, qui seront des ellipses, des hyperboles, ou des paraboles (cf. Brochure A.P.M.E.P. n° 33 : *Activités mathématiques en 4ème - 3ème,* tome 1).

Exemple 6 : Les pavages ou dallages sont une mine inépuisable d'activités motivantes, à divers degrés d'approfondissement (cf. *Activités mathématiques en 4ème - 3ème,* tome 2). De même la réalisation de maquettes.

Pourvu que les objectifs du programme soient réalisés en fin de cycle, nous ne saurions imposer de limites aux investigations, problèmes et recherches venant des élèves. Il nous appartiendra au contraire, le cas échéant, d'en susciter.

Il y a lieu en effet d'ouvrir le plus possible, de varier les domaines étudiés, les méthodes utilisées et les niveaux d'approfondissement.

Ainsi se constituera peu à peu une capacité accrue à poser, chercher et résoudre des problèmes, et un stock de problèmes "en devenir", riche herbier pour les Lycées et qui motivera l'introduction d'outils mathématiques nouveaux.

b) A propos des "évidences"

• Les élèves ne ressentiront qu'ennui et désaffection à l'encontre d'un "problème" qu'ils ne perçoivent pas comme tel.

> Ainsi la "concourance" des médiatrices du triangle n'est généralement pas perçue comme problème par les élèves. Il faut alors aménager ces "faux-problèmes" en "vrais problèmes"... Par exemple, à propos des médiatrices d'un triangle ABC, en se demandant s'il existe un cercle et un seul passant par A, B, C.

• L'Académie des Sciences rappelle, dans un texte cité par les Commentaires des programmes 1978 de 4ème - 3ème, qu'"il faut éviter qu'une propriété simple, qui est presque évidente aux yeux de l'enfant, soit déduite par le raisonnement d'une autre propriété moins évidente ou plus compliquée".

Cela peut conduire à augmenter le nombre d'axiomes ou de propriétés admises. Mais cela devrait aussi inciter à transformer des "évidences" en "problèmes".

> Par exemple, si l'on se restreint aux isométries, comment douter du fait que la transformée d'une droite est toujours une droite ? Il en ira autrement si l'on introduit le plus tôt possible, non pour elles-mêmes mais pour déconditionner, des transformations, conchoïdales par exemple, qui ne conservent pas l'alignement.

• Toute "évidence" ne semble pas pour autant transformable en problème. Cela dépend de sa génèse.

> *Exemple :* La symétrie orthogonale est naturellement conçue comme la traduction mathématique d'un pliage. Dès lors les élèves du Premier Cycle n'accepteront jamais comme problème la question : "la symétrique d'une droite est-elle une droite ?".

c) Les problèmes qui révèlent ou qui apostrophent

L'un des objectifs du Premier Cycle est l'acquisition de quelques notions de base. Or leur appropriation n'est pas certaine tant qu'on ne se montre pas capable de les faire fonctionner dans des conditions non mécaniques. Aussi est-il bon de proposer des situations "déstabilisantes" susceptibles de décaper les vernis d'un pseudo-apprentissage et de révéler d'éventuelles insuffisances dans l'appropriation, voire des obstacles. A un niveau de classe donné, les problèmes ainsi posés sont sans valeur intrinsèque. Ils ne sont pris que comme révélateurs, pour obliger, s'il le faut, à s'approprier un peu mieux la notion en cause.

> *Exemple 1 :* Un élève de Cinquième "sait", en théorie, ce qu'est une valeur absolue. Mais comment réagira-t-il devant $|x| + 15 = 5$?

Exemple 2 : Si l'on ne sait pas réduire $x^5 + x^5$, a-t-on compris de façon fiable la réduction de b + b en 2b quelle que soit la substitution opérable sur b ?

Exemple 3 : S'est-on réellement approprié la façon de trouver le signe d'un produit si l'on ne sait pas compenser le remplacement d'un facteur par son opposé ?

Exemple 4 : A-t-on vraiment compris que deux nombres opposés ont le même carré si, ayant reconnu que $7x - 5$ et $5 - 7x$ sont opposés, on ne sait pas simplifier $(7x - 5)^2 - (5 - 7x)^2$?

2.2. QUELQUES SOURCES PRIVILÉGIÉES

Le questionnement et l'auto-questionnement peuvent notamment s'exercer à propos de quelques sources privilégiées :

— *la vie courante* (problèmes de repérage, de mesurage, de gestion d'un budget, d'organisation d'une activité,...)

— *la conjoncture* (sociale ou économique : problèmes du chômage, gestion d'une région,... lancement d'un bateau, d'un avion,... ; politique : élections,... ; astronomique : éclipses, sondes spatiales,...) *et l'environnement,*

— *les activités de jeu* (cf. Brochure A.P.M.E.P. n° 44 *Jeux 1* et rubrique *Jeux et Maths* dans le Bulletin !),

— la prise en compte, à travers tout cela, de tout ce qui est *aléatoire,* du non-déterministe,

— *l'ouverture au monde technique contemporain* (rôle des fonctions trigonométriques) et *les autres disciplines* (notamment les sciences physiques, la biologie, la géographie),

— *l'histoire des mathématiques* (leçon tout à la fois de modestie, et de confiance tant les progrès sont venus, répétons-le, à coup de tâtonnements et d'erreurs rectifiées) :

Histoire qui peut, par exemple pour la Suite de Fibonacci, renforcer l'intérêt des élèves...

— *les notions mathématiques du programme et les manipulations correspondantes :*

Exemples pour celles-ci : les aires, les solides, les transformations géométriques (pavages,...).

2.3. QUELQUES CLASSES DE PROBLÈMES

Dans les problématiques proposées pour le Premier Cycle (cf. Bulletin de juin 1982, page 518), relevons, sans sous-estimer pour autant les autres, quelques classes de problèmes qui semblent particulièrement séduisants et formateurs :

— *les équations numériques* en liaison avec les enrichissements successifs de la notion de nombre, les appuis réciproques entre calculs et graphiques, l'utilisation et la réalisation de programmes sur calculateurs de poche, les diverses méthodes de résolution approchée,...

Tout cela à condition de ne pas se limiter à la religion du premier degré...

— *les fonctions numériques,* ici aussi non limitées au premier degré, en liaison avec des problèmes concrets, et avec des tracés de courbes, équations ou inéquations,...

— *les transformations géométriques :* mise en évidence des invariants, traduction(s) matérielle(s) et propriétés, intervention dans les problèmes, composition,...

A condition de ne pas se limiter aux isométries et d'oser, aussi, quelques coups de projecteur (fussent-ils simplement des manipulations matérielles) sur d'autres transformations...

— *les problèmes de construction de figures avec leurs étapes :* analyse d'une figure répondant aux conditions de l'énoncé et mise en évidence de "conditions nécessaires", examen de celles-ci pour savoir si elles sont "suffisantes", et recherche du nombre de solutions.

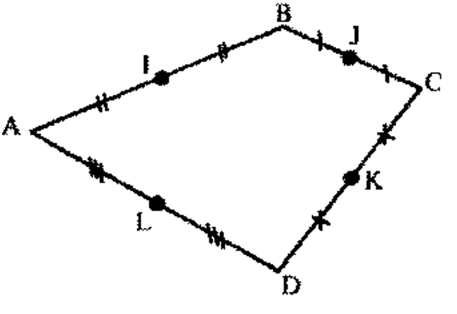
— *les problèmes de points variables :*

Les moins immédiats obligent à la démarche scientifique-type la plus complète (cf. § 3.5 b)).

Ils permettent toutes les ouvertures : on n'est pas obligé, à un moment donné, de savoir traiter de la façon la plus exhaustive tout problème qui se rencontre (cf. § 3.3). Ils libèrent l'imagination et la créativité tout en aiguisant la finesse d'observation et l'art de conjecturer.

— la liaison et les inter-actions "*espace-plan*" :

• Par exemple l'étude du "quadrilatère des milieux" IJKL (cf. figure ci-contre) n'exige pas que A, B, C, D soient dans un même plan. Alors autant partir d'un quadrilatère gauche.



• Il y a lieu aussi d'apprendre à reconnaître et à utiliser des figures du plan dans des situations de l'espace : toitures, charpentes, bâtiments divers...

• Les figures de géométrie dans l'espace (cf. brochures A.P.M.E.P. ou pochettes de l'IREM d'Orléans) offrent de belles applications de théorèmes de géométrie plane sans cela plutôt désincarnés. Il en est par exemple ainsi, à propos des milieux des côtés d'un triangle, pour le cuboctaèdre, pour l'octaèdre dont les sommets sont les centres des faces d'un cube (octaèdre dual du cube), ... Autre exemple : pourquoi laisser les parallélogrammes "à plat" alors que les prismes se les arrachent, au moins par leurs faces latérales...

2.4. QUELQUES GRANDS TYPES D'INTERROGATION

Les questionnements s'articuleront autour de quelques types d'interrogation. En voici quelques-uns, sans ordre imposé :

— les données ayant été analysées, quels sont les invariants ? quels sont les liens entre les diverses variables et les invariants ?

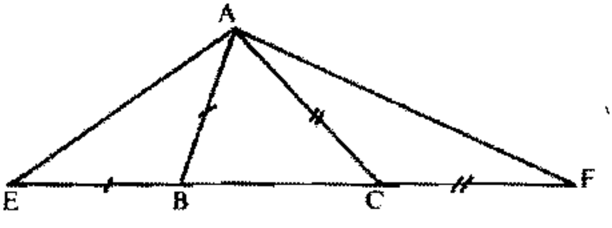
On retrouvera cela, par exemple, aussi bien à partir de tableaux de données issus de la vie pratique que, pour la géométrie, à partir de problèmes de construction, de points variables ou de transformations.

— comment triompher de certaines contraintes ?

Par exemple :

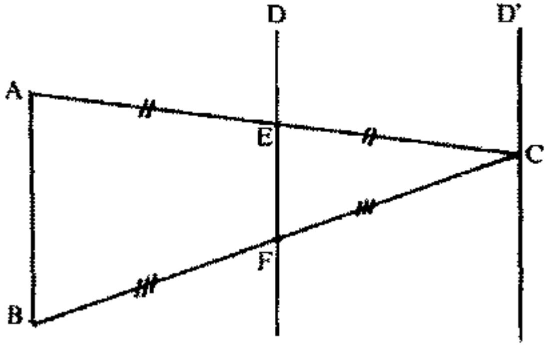
• *construire une figure à partir de certaines données.*

Ainsi : construire un triangle ABC connaissant deux de ses angles et le périmètre.



Voici une solution : Il suffit de "déplier" le périmètre selon EF. On sait alors construire le triangle AEF puisque $\widehat{E} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ et $\widehat{F} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$. D'où, ensuite, B et C.

• *construire une figure en limitant les instruments utilisables.*
Ainsi : construire le milieu de deux points A et B avec seulement une règle non graduée à bords parallèles, plus large que AB.



Voici une solution : la règle permet d'obtenir D et D', d'où, à partir d'un point C de D', les milieux E et F. Il suffit d'utiliser ensuite le fait que les médianes d'un triangle sont concourantes.

• *résoudre des équations numériques en se limitant à tel ensemble de nombres,...*

— comment caractériser et identifier des êtres mathématiques ?

Exemple 1 : Caractérisations de tel type de quadrilatère.

Exemple 2 : Quand on découvre telle configuration, tel ensemble de points, non encore familiers, quelle est leur identité ? (par exemple si l'on cherche, A et B donnés, l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = Cte$).

Exemple 3 : Des programmes différents de construction ou de calcul conduisent-ils au même résultat ? (On peut ainsi préparer l'étude de $\frac{a}{d} + \frac{b}{d}$ en comparant l'effet de son programme de calcul à ceux d'autres programmes dont celui de $\frac{a+b}{d}$).

— comment réaliser, interpréter, exploiter des représentations ?

Exemple 1 : Représentations graphiques de fonctions à l'aide d'axes de coordonnées.

Exemple 2 : Représentation de pourcentages avec des secteurs de disque (secteurs "circulaires").

— les caractères "nécessaire" et "suffisant" étant clairement distingués, quand s'agit-il de l'un ou de l'autre, ou des deux ?

Exemple 1 : Pour que les milieux des côtés d'un quadrilatère ABCD, joints dans l'ordre, soient les sommets d'un losange, il suffit de prendre ABCD rectangle, mais ce n'est pas nécessaire.

Exemple 2 : Pour obtenir $a=b$ il est nécessaire d'avoir $a^2=b^2$ mais ce n'est pas suffisant si les signes ne sont pas précisés.

— un problème étant traité, quel est le problème réciproque ?

Exemple 1 : J'ai étudié la configuration des milieux des côtés d'un polygone. Réciproquement, si on m'impose tels points comme milieux, puis-je retrouver le polygone, ou plusieurs, et comment ?

Exemple 2 : J'ai calculé l'aire d'un carré à partir du côté. Réciproquement, quel sera le côté si l'aire est imposée ?

Exemple 3 : J'ai calculé, dans une application, les images de tel élément. Réciproquement, quels sont les antécédents de tel élément de l'ensemble d'arrivée ?

— que se passe-t-il si l'on change le référentiel ?

Par exemple, que devient, dans l'espace, telle situation de géométrie plane ?

— que se passe-t-il si l'on change une donnée, ou plusieurs ?

Exemple : Supposons qu'il y ait eu recherche du minimum de $MA+MB$ lorsque M est sur une droite Δ donnée et que les points donnés A et B sont de part et d'autre de Δ. Que se passe-t-il lorsqu'ils sont d'un même côté de Δ ?

Cela peut parfois se résumer en des "problèmes-valises" exubérants :

Exemple 1 : Problèmes de distances d'un point à F ou d'équidistance d'un point à F et F', F et F' pouvant être des points, des droites, des demi-droites, des segments, des cercles, ... (cf. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième,* tome 1).

Exemple 2 : Etudier $a_1 \circ a_2$, a_1 et a_2 pouvant être des symétries, orthogonales ou centrales, ou des translations.

— qu'advient-il d'une configuration fixe si on lui donne des degrés de liberté ?

Exemple : Soit un losange ABCD de centre M. On fixe A et B. Quel est l'ensemble des points C, celui des points D, celui des points M : — dans le plan ?
— dans l'espace ?

— peut-on généraliser ?

Exemple : Supposons qu'il ait été constaté que $1^3+2^3=(1+2)^2$; $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$. On peut se poser le problème suivant :

a-t-on $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$?

— peut-on étendre des résultats ?

Exemple : On sait développer $m(a+b)$. A partir de là peut-on développer $(c+d)(a+b)$?

— comment "évaluer", donner des ordres de grandeur ?

Exemple 1 : Trouver rapidement, sans calculatrice, un ordre de grandeur de $(1{,}45\times 1{,}15)^{15}$ sachant que $(1{,}45)^3\simeq 3$ et $(1{,}15)^5\simeq 2$.

Exemple 2 : Donner un ordre de grandeur du nombre de façons de placer dix personnes sur dix places numérotées...

— comment optimiser une démarche ?

Exemple 1 : Je cherche à construire un polygone connaissant les milieux de ses côtés. J'étudie d'abord les cas de 3, puis 4, puis 5, puis 6 côtés. Comment dégager une méthode capable d'être généralisée ?

Exemple 2 : Optimisation d'un programme de calcul (cf. utilisation de calculatrices programmables ayant un nombre restreint de pas ou de lignes de programme).

— enfin, il surgit nécessairement les interrogations liées à une analyse des méthodes de recherche et de leurs résultats. Nous verrons cela dans les paragraphes suivants.

3. RESOUDRE DES PROBLEMES

Il ne s'agit pas seulement de "tenter [par là] de *développer la capacité d'utiliser le savoir*" (G. Polya) mais, *plus fortement, de contribuer à développer les capacités de chacun et son aptitude à évoluer.*

3.1. DEMANTELER LES PRESTIDIGITATIONS

Puisque résoudre des problèmes est si important, il s'agirait *d'apprendre* à les résoudre.

Or il n'en va pas ainsi quand l'enseignant expose, sans hésitations ni bavures et sans aucune explication sur leur genèse, des démonstrations qui semblent autant de coups de génie.

Exemple : Soit à démontrer, en Quatrième, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Dessinons un triangle ABC. Posons le problème, puis, sans coup férir, traçons par chaque sommet la parallèle au côté opposé. De là un triangle A'B'C' dont les hauteurs de ABC sont, ô merveille, les médiatrices. Le tour est donc joué, une étude antérieure (parfois de plusieurs mois) ayant établi que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Splendide !

Mais en quoi une telle prestidigitation, selon le mot d'André Antibi, est-elle formatrice pour les élèves ?

Ce qui est d'abord important, c'est le *pourquoi* des démarches. S'il n'y en a pas une qui s'impose, il ne faut pas laisser de côté le temps des essais, des tâtonnements, des recherches, des erreurs et des rectifications, des étapes, en un cheminement souvent sinueux qui donne parfois l'impression de régresser. Ne cachons pas aux élèves nos propres essais et essayons de pratiquer, en commun avec eux, une approche de problèmes nouveaux pour en vivre une véritable analyse.

C'est cela qui est formateur, capable de décrisper l'élève et de lui permettre de mobiliser tous ses moyens.

C'est sur tout cela que le Premier Cycle doit d'abord insister. A la charnière où il se trouve, c'est bien l'un de ses objectifs spécifiques.

3.2. LE LICITE

Pour résoudre un problème, qu'est-ce qui est licite ?

Qu'accepterons-nous, que préconiserons-nous parmi les démarches suivantes :

— *une démarche expérimentale ?*

Ainsi pour évaluer une longueur en la mesurant sur un dessin ou sur un objet, pour évaluer une aire par des encadrements et des comptages, pour étudier des solides à partir de patrons ou de maquettes, pour réaliser l'image d'une figure à l'aide d'un appareil tel qu'un symétriseur, un translateur, une table traçante,...

— *une utilisation immédiate d'observations matérielles générales ?* (De telles observations permettent de "prouver" de façon convaincante)

Par exemple, accepterons-nous les propriétés de la symétrie orthogonale comme allant de soi, à partir du pliage autour d'une droite, et non par décision de les prendre comme axiomes — ou de les démontrer — ? De même pour la rotation ou la translation...

— *une démarche par pas ?* ("pas" : augmentations répétitives)

Ainsi pour tracer une courbe par points, pour résoudre graphiquement une équation,...

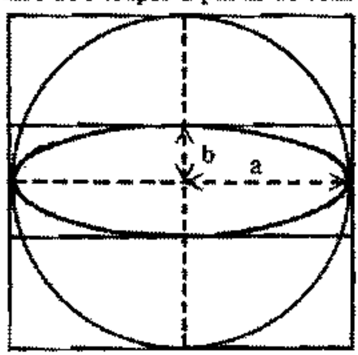
— *un appui de résultats généraux hors programme ?*

Par exemple, si un élève constate que 2 et 3 sont solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$, puis qu'il précise que ce sont *les* solutions en se fondant sur le théorème général attribuant au plus n racines réelles à tout polynome de degré n non nul.

— *une vérification de conjectures* auprès d'une source de savoir : livre ou personne ? — ou, sous peu, banque de données ?

— *une extension intuitivement correcte :*

Exemple 1 : découverte de l'aire de l'ellipse à partir de celle du disque et de la correspondance entre les aires du rectangle et du carré respectivement circonscrits (cf. figure ci-contre).



Exemple 2 : extension sans problème aux décimaux positifs, puis aux réels positifs, de la formule sur l'aire du rectangle établie lorsque les dimensions sont des naturels.

— *une méthode statistique ?*

Exemple : méthode de Monte-Carlo pour l'obtention de certaines aires, ... lorsque l'ère des ordinateurs aura atteint les Collèges...

— *une méthode d'exploration détaillée, susceptible de couvrir tout le champ ?*

Exemple : problèmes sur des nombres, notamment avec des calculatrices ou des ... ordinateurs.

— *ou seulement des "démonstrations" ?*
Mais à partir de quoi ?

• Le corpus des énoncés utilisables à un instant t est-il celui des définitions ou théorèmes vus en classe, dans des "leçons", jusqu'à cet instant t ?
Faut-il y inclure ceux des années antérieures ?

Oui, en troisième, pour les énoncés de quatrième. Mais en quatrième, une pratique trop fréquente récuse, à tort, les énoncés de sixième-cinquième réinscrits au programme de quatrième (sur les côtés opposés d'un parallélogramme par exemple)... en acceptant les autres (sur les aires par exemple).

Peut-on y inclure des résultats établis à l'occasion "d'exercices" ?

Peut-on changer de corpus selon les problèmes ou les thèmes d'études ?

Peut-on l'enrichir par une culture personnelle ?

• Questions qui se poseront tant que le "contrat didactique" ne sera pas explicité...

— *ou... ?*

3.3. LE POSSIBLE ET LE SOUHAITABLE

a) Toutes les démarches précédemment évoquées ne sont pas également possibles : elles sont d'abord fonction des connaissances et des moyens matériels disponibles.

Exemple 1 : Un élève de Premier Cycle ne saura pas résoudre par le calcul, au moins sans référence à des ouvrages d'un niveau supérieur, une équation du troisième degré sans racines apparentes. Mais il pourra la résoudre graphiquement, par approximations au moins.

Exemple 2 : Un élève de Sixième peut utiliser des quadrillages pour dessiner des segments parallèles, ou perpendiculaires, ou de même longueur. Mais cela ne s'insère pas alors dans une théorie déductive.

Exemple 3 : Un élève de Sixième sait déduire l'aire du parallélogramme de celle du rectangle à l'aide de découpages, et remodelage en rectangle, du parallélogramme. Mais il ne saurait être, ici, question d'une démonstration, au sens classique du terme (il y faudrait une explicitation de propriétés hors de propos en sixième), encore qu'il s'agisse bien d'une preuve.

Evoquons *pour mémoire,* car cela ne joue apparemment pas pour le Premier Cycle, les impossibilités absolues.

Exemple : Il est impossible de résoudre par radicaux les équations générales de degré supérieur ou égal à 5 (démonstration faite par Abel en 1826).

De même, certaines conjectures nous échappent-elles encore :

Exemple : On ne sait toujours pas démontrer le "théorème" de Fermat disant que "pour n entier plus grand que 2, et x,y,z rationnels non nuls, l'égalité $x^n + y^n = z^n$ ne peut être vraie".

b) Le choix des démarches dépendra aussi des domaines considérés :

Exemple 1 : Pour des études de mouvements de mobiles (problèmes de trains ou d'autos,...), les résolutions graphiques ont une précision bien suffisante...

Exemple 2 : Les formules des aires de polygones, la relation de Pythagore, se prouvent fort bien de façon expérimentale.

c) Ce choix est aussi en interaction constante avec les niveaux d'approfondissement des notions tels qu'on les souhaite :

• S'agit-il d'une première approche ? d'un débrousaillage ? d'une étude déjà solide d'exemples ? d'une étude générale et synthétique ? Dans cette gradation, les démarches acceptées ou requises seront de plus en plus restrictives et contraignantes :

Exemple : Dans le plan rapporté à un repère othogonal, soit à chercher l'ensemble E des points M(x,y) tels que $|x| + |y| = p$, p étant un réel positif :

— première approche : tracé de quelques points, pour une valeur numérique de p,
— débrousaillage : pour une valeur numérique donnée de p, mise en évidence de symétries, conjecture sur l'ensemble E,
— étude déjà solide d'exemples : démonstration de ce qu'est E pour quelques valeurs numériques de p,
— étude générale, pour p quelconque, avec étude des transformations de E induites par les variations de p ou par celles du repère du plan.

• Réciproquement, le choix de la démarche peut induire un niveau d'approfondissement :

Exemple : Soit un triangle ABC dont le cercle inscrit a pour centre I. Et soit à étudier $\widehat{BIC}$ en fonction des angles du triangle ABC. Si je le fais expérimentalement, ce sera une première approche, et un débroussaillage si une étude plus systématique (cf. § 3.6. (13)) me permet de conjecturer que $\widehat{BIC}$ est fonction du seul choix de $\widehat{A}$.

d) Toutes les démarches ont leurs mérites, complémentaires, et l'un des objectifs spécifiques du Premier Cycle pourrait être de faire apprécier cette richesse de démarches, liées à des niveaux de conviction, de preuve, différents.

On n'en est pas là : dans l'optique actuelle, que nous récusons, la démonstration, extrêmement négligée en Sixième-Cinquième, devrait ensuite tout régenter. On n'accepte alors d'autres méthodes qu'à contrecœur et on impose par là-même une aridité qui donne à la démonstration peu d'occasions de s'exercer réellement et de montrer son intérêt.

Il est normal que le champ des démonstrations s'accroisse en boule de neige, et il le serait de commencer bien avant la Quatrième. Mais le champ des situations analysables et explorables s'accroît par le fait même, et plus vite encore, chaque problème résolu en faisant surgir de nouveaux qui ne sont pas tous justiciables des mêmes niveaux d'approfondissement. Les diverses démarches possibles ne sont donc jamais trop nombreuses pour concourir à l'accroissement des capacités et à celui de la connaissance. Il suffit de savoir chaque fois apprécier la démarche choisie et les conclusions qu'elle autorise.

e) Cependant (cf. § 1.4) ***le Premier Cycle se doit d'insister, sans lui donner une prime d'exclusivité, sur les mérites particuliers des démonstrations.***

Toutes les fois que celle-ci permet, et permet seule, de conclure la résolution d'un problème, il y a lieu d'y recourir pour autant qu'elle soit accessible. Dans le cas contraire, il faut prendre clairement conscience de ce que la résolution n'a été que partielle...

C'est pourquoi, dans ce qui suit, et sans qu'il s'agisse d'exiger autant des élèves (cf. préface du présent texte), nous envisagerons généralement les résolutions de problèmes du point de vue le plus poussé : celui qui conduira le plus possible à des démonstrations. Pour toute autre démarche — qui, redisons-le, peut être fort intéressante — il suffira d'infléchir en minorant les exigences et en marquant les différences avec la méthode démonstrative.

3.4. VERS UNE MAITRISE DE L'INFORMATION

a) La médiation d'un langage

Les énoncés et les situations exploités en mathématiques sont perçus ou traduits en des langages qui mêlent, à des degrés divers, le langage courant et le langage mathématique formel. De là quelques objectifs spécifiques :

(1) — contribuer à la *maîtrise du langage courant*, notamment à la compréhension de mots particulièrement utilisés en mathématiques, par exemple : "soit", "quelconque", "arbitraire", "consécutifs", "tout", "chaque", "tous", "aucun", "quel que soit", "au moins", "au plus", "il existe",...

(2) — déjouer les pièges de la *langue "circummathématique"* :

• *mots en distorsion du langage courant :*

Exemple : le "si" du langage courant a parfois la signification du "si et seulement si".

Autres exemples : hypothèse ; direction ; vecteur ; polaires ; fraction ; partie ; chiffre ; milieu ;...

• *"mots-valises" de la langue courante* (mots qui transportent tel ou tel symbole, problème ou notion mathématique, mais pas toujours le même) :

Exemples : "est", "et", "ou", "un", "le", "égal",...

• *mots-règles du jeu d'activités mathématiques* : "déduire", "démontrer", "prouver", "construire", "choisir", "résoudre", "résoudre dans", "définir", "caractériser", "déterminer", "développer", "réduire", "factoriser",...

• *mots d'organisation mathématique du discours :* "si... alors", "si et seulement si", "or", "donc", "d'où", "il faut et il suffit", "réciproque",...

• *mots "doubles", avec deux énoncés conjugués en un seul.*

Exemples : "propriété caractéristique", "est l'ensemble".

(3) — mettre à l'aise dans les *langages mathématiques* :

• celui des notations et du vocabulaire de nomenclature, sans oublier le problème des mots plurivalents :

Exemple : Une "hauteur" sera, selon le contexte, une droite, un segment, une longueur ou une distance.

• les divers langages spécifiques, à saisir en leur fonctionnement :

géométrie des configurations, géométrie analytique, géométrie vectorielle, ..., calcul algébrique,...

b) la trajectoire d'un texte

Il s'agit de percevoir d'abord le mouvement d'un texte : de déceler les hypothèses et données, les questions, les conjectures et, s'il y a lieu, la progression du texte.

Il s'agit aussi, éventuellement, de réaliser un premier aboutissement de ce texte : en géométrie, et parfois en algèbre, il peut être question de réaliser une figure, peut-être un objet (polygone articulé, solide,...) ou un outil (symétriseur, conchoïdeur, pantographe,...).

Ici surgiront des difficultés que nous retrouverons lors d'une analyse ultérieure. Par exemple, on trahirait le texte en se restreignant à des cas particuliers — ou en les ignorant.

c) l'impact d'un texte ou d'une situation

Il dépendra de la mise en évidence (et cela s'apprend, mais il y faut du temps) de mots-clés ou de situations-clés ou d'expressions évocatrices, de l'intérêt provoqué par la situation ou par le problème posé,... de la possibilité d'une attitude claire et confiante,...

Cet impact-là va déclencher une réflexion qui comportera un rappel ou une recherche d'informations.

> Par exemple, sauf sélection anticipée de l'une d'elles grâce à une autre information, le mot "milieu" devrait déclencher les diverses traductions connues de ce mot et une revue de notions, configurations ou propriétés où il intervient (symétrie centrale, parallélogramme,..).

d) la recherche d'une documentation ou d'une information

— dans sa propre mémoire, et une mémoire se cultive...

— dans des manuels, dictionnaires ou encyclopédies,...
Il faut donc connaître leur organisation, savoir utiliser des index,...

— dans des fiches ou cahiers personnels, mais cela suppose que ces fiches soient bien organisés, avec des classements, références ou index,

— bientôt peut-être auprès de banques de données.
Il s'agira alors de savoir les utiliser intelligemment...

— souvent, pour la géométrie, à l'aide d'une manipulation ou d'une réalisation matérielle.

e) des informations graduelles

> *Par exemple*, si l'on s'intéresse au mot "vecteur", il y aura d'abord, liée à la définition et aux propriétés immédiates, une revue de situations élémentaires où il intervient (parallélogramme, translation, triangle avec les milieux des côtés, analytique,...), puis un défilement des opérations vectorielles connues, avec leurs propriétés liées à l'énoncé de Thalès,... Si cela ne suffit pas, il y aura lieu d'appeler des exercices sur les vecteurs et de les travailler...

Bien entendu le contexte devrait aider à trier et à sélectionner parmi toutes ces informations, et à orienter leur recherche. Un objectif spécifique du Premier Cycle sera de continuer à apprendre à utiliser en ce sens le contexte.

f) la possibilité de reconnaître, de comprendre et de réinvestir

Cela suppose un minimum de connaissances et d'entraînement aux problèmes. Sinon, c'est en aveugle et sourd que l'intéressé subira les informations qu'il songera à appeler, en aveugle et sourd qu'il en appellera.

Par exemple, l'équation $|2x-10| + \sqrt{25-x^2} = 0$ se résout facilement si l'on sait utiliser le fait qu'une valeur absolue et un radical sont tous deux positifs et que leur somme ne peut donc être nulle que si chacun est égal à zéro.

Autre exemple : Il faut savoir choisir entre deux énoncés réciproques, donc bien maîtriser ce qui fonde l'utilisation d'un énoncé.

Autre exemple : Si une première phase d'une étude d'équation se conclut par ''s'il existe des réels solutions, ce ne peut être que 3 ou 5'', il faut bien comprendre que cela signifie qu'aucun réel autre que 3 et 5 n'est solution mais que le problème demeure pour 3 et pour 5.

Les démarches logiques et les connaissances mathématiques sollicitées sont plus ou moins directement transposables. Plus elles auront *fonctionné, en un apport personnel, dans des conditions diversifiées*, plus il sera facile de les mettre en œuvre. Un objectif du Premier Cycle sera donc de *susciter ce fonctionnement diversifié*.

Par exemple, les transformations géométriques pourront servir d'outils de démonstration d'autant plus utilisables qu'elles auront déjà beaucoup fonctionné pour transformer des figures, pour en construire, pour passer d'une figure à une autre, pour établir telles ou telles propriétés, pour trouver des ensembles de points variables..., en un fonctionnement *réalisé par l'élève lui-même*, et non pas réduit à un discours magistral...

3.5. DES PROCÉDURES GÉNÉRALES DE RECHERCHE

Une fois le problème posé et l'information adéquate accessible, comment résoudre ce problème, en visant le plus haut niveau de preuve possible ?

• Laissons de côté les cas de résolution immédiate par simple analyse approfondie de l'énoncé (Exemple : équation déjà citée, du type $|\ldots| + \sqrt{} = 0$).

• Pour des cas plus complexes, un objectif essentiel spécifique du Premier Cycle est d'insister à fond sur les procédures générales de recherche :

a) Organisation déductive des raisonnements

Il s'agit de mettre en évidence une organisation allant d'hypothèses vers des conclusions en essayant d'établir un pont entre elles.

Cela supposera souvent que l'on substitue à la conclusion espérée (conjecturée) une proposition équivalente plus proche des hypothèses.

Par exemple, si un point variable M est défini à partir d'un point variable N et s'il apparaît que M est l'image de N par une application bijective, la recherche de l'ensemble des points M se résoudra probablement à travers la recherche préalable de l'ensemble des points N.

b) Une procédure générale scientifique

Le Premier Cycle est le lieu privilégié pour insister sur la démarche la plus fréquente, qui est la démarche scientifique par excellence, vécue en mathématiques sous sa forme la plus accomplie (cf. § **1.4.**).

Face à un problème dont la résolution n'est pas immédiate, et après avoir analysé les questions, réfléchi à l'intervention et à l'utilité des diverses données, précisé l'information correspondante :

• Il s'agit d'abord de *prendre des exemples*, sans négliger d'éventuels cas particuliers ou singuliers, et de les accumuler jusqu'à ce que :

— à défaut de conjecture initiale, *il en apparaisse une*,

— face à une conjecture :
ou bien celle-ci s'annonce *fondée*,
ou bien il apparaît un *contre-exemple*.

> La plupart des problèmes, des "vrais", où la conclusion n'est inscrite ni dans la question ni dans un escalier aux marches serrées, relèvent de cette méthode : citons notamment les problèmes dits "spéculatifs" (selon la terminologie de R. Dontot, problèmes pour lesquels on n'est pas assuré de l'existence de solutions ; équations, problèmes de construction,...), les problèmes relatifs à la détermination d'ensembles de points variables, les problèmes de recherche de relations entre éléments d'un ensemble (ensembles de points, ensembles d'applications,...),...

• *Il s'agit ensuite — dans le cas où aucun contre-exemple n'est apparu — de démontrer ou d'infirmer la conjecture*. L'essai de démonstration peut faire éclater la conjecture. Il faut alors *recommencer la première phase*. Si la conjecture résiste aux essais sans qu'on puisse pour autant démontrer, le problème restera ouvert.

c) Procédure par épuisement des cas

• Il s'agit de l'examen exhaustif de cas recouvrant toutes les possibilités :

> *Exemple :* Problème : "Comment choisir un naturel x tel que x^{4n} ait tel chiffre des unités ?" ou encore "x étant un naturel choisi au hasard, quelle est la probabilité pour que x^{4n} ait tel chiffre des unités ?".
>
> Comme le chiffre des unités de x^{4n} ne dépend que de celui de x, il suffit d'examiner les dix cas possibles : pour x^4 on trouve

toujours un chiffre des unités égal à 0 ou 1 ou 5 ou 6. Dès lors x^{4n} possède le même chiffre des unités que x^4 et on sait résoudre les problèmes posés.

• Cette méthode ne pouvait jusqu'à une époque récente s'appliquer qu'à un nombre de cas très faible. Elle s'exerçait donc rarement.

L'introduction des ordinateurs change complètement cet aspect des choses. Désormais, à propos de nombres ou de configurations, il est possible d'examiner un nombre extrêmement grand de cas.

Par exemple, en 1979, pour chercher les nombres premiers de la forme $2^p - 1$, où p est lui-même premier, un ordinateur a exploré jusqu'à $2^{50\,000}$ (Il a ainsi découvert 26 nombres premiers de cette forme, le 26ème étant $2^{44\,497} - 1$.

• Cela ne permet pas toujours de conclure à l'égal d'une démonstration.

Par exemple, l'investigation signalée ci-dessus ne permet pas de dire si l'ensemble de ces nombres premiers est fini ou infini, ni même s'il y en a plus de 26.

Mais cela permet souvent de *régler pratiquement un problème en se limitant à un domaine utile.*

d) Procédure par récurrence

Citons-la pour mémoire, vu son importance. Sa réputation de difficulté la fait éloigner du Premier Cycle. Elle n'en sera donc pas un objectif spécifique.

Pourtant elle sera *parfois* rencontrée et doit pouvoir être *éventuellement* abordée, par exemple à propos de

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n$$

(cf. *Activités mathématiques en 4ème-3ème,* tome 1), ou pour le nombre de segments joignant n points deux à deux.

e) Un principe général : se ramener à un problème précédent ! (On se gardera toutefois d'en faire un principe exclusif : il faut aussi parfois innover, mais l'innovation émergera.. de problèmes précédents...).

On peut voir ce principe à l'œuvre dans les démarches ci-dessous recensées (§ 3.6.). Voici d'autres exemples.

Exemple 1 : Ayant découvert la formule de l'aire du rectangle, on en déduira celle du parallélogramme et celle du triangle. De l'une ou de l'autre de celles-ci on déduira celle du trapèze.

Exemple 2 : Soit un billard rectangulaire et deux boules A et B. Il s'agit de frapper l'une des boules avec l'autre après 2 réflexions sur des bords du billard (sans effets).

La solution pour 2 réflexions se déduit de celle pour 1 réflexion.

Exemple 3 : Le fait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes peut se déduire du fait que les médiatrices le sont (cf. § 3.1.).

Il va de soi, avec un tel principe, que le fait d'étudier de nombreux problèmes accroît les connaissances en boule de neige. Mais il est d'abord *affaire d'à-propos* et le Premier Cycle doit cultiver cela !

On objectera que ce n'est pas spécifique des mathématiques, ni des mathématiques du Premier Cycle, mais *ce qui peut être spécifique, c'est la rigueur des enchaînements et des connexions, ainsi que la richesse de l'éventail à partir d'un domaine mathématique encore restreint,* ce qui permet de mesurer l'ampleur que pourraient prendre, si on le voulait bien, les objectifs "de comportement" par rapport aux objectifs de "contenus".

• Insistons sur les connexions entre problèmes, entre méthodes, entre notions. Là nous semble l'essentiel. A la croisée des chemins, relais entre l'Elémentaire et les Lycées, le Premier Cycle y trouve un objectif spécifique, à valoriser constamment.

3.6. QUELQUES DÉMARCHES SPÉCIFIQUES DE RÉSOLUTION

Nous allons maintenant présenter brièvement quelques démarches de résolution plus spécifiques.

• *Leur liste n'est ni exhaustive, ni impérative.* Elle reste ouverte ! (un peu comme l'est celle des nombres premiers $2^p - 1$ cités ci-dessus § 3.5 c) : nous n'avons pas tout exploré !)

• Leur *classification* elle-même garde évidemment une forte part d'*arbitraire*. On ne lui accordera qu'une valeur indicative.

•• *Voici cet herbier de démarches :*

(1) *Définition et étude d'une version simplifiée du problème :*
— on revient ensuite au problème initial —.

Exemple 1 : Si je ne sais pas trouver le plus possible de diviseurs de $n(n+3)(n+5)$, lorsque n est un naturel, je cherche d'abord une façon de trouver les diviseurs quand j'ai un produit de valeurs numériques, tel $14 \times 17 \times 19$. Si je ne sais encore pas, j'essaierai avec deux facteurs seulement.

Exemple 2 : Supposons que je ne sache pas trouver un dénominateur commun lorsqu'il s'agit de $\frac{7}{x-3} + \frac{5}{3-x}$. Si je reconnais en $x-3$ et $3-x$ deux nombres opposés, j'essaie d'abord une recherche avec des valeurs numériques, par exemple avec $\frac{7}{9} + \frac{5}{-9}$.

(2) *Recours à des problèmes voisins :*

Exemple 1 : Soit deux points A et B et une droite $\triangle$ donnés. Pour placer M sur $\triangle$ tel que MA − MB soit maximum, je peux m'inspirer d'un problème voisin, celui de la recherche du minimum de MA + MB.

Exemple 2 : Pour résoudre un problème sur l'octaèdre, je peux m'aider de sa transposition sur la figure duale qu'est le cube (cf. § 2.3).

(3) *Recours à un cas particulier* (auquel on se ramènera ensuite)

Exemple : Pour développer le produit d'une somme par une somme on étudie d'abord le cas où l'une des sommes se réduit à un seul terme, puis on se ramène à ce cas.

(4) *Recours à un autre domaine* (des mathématiques) :

Exemple : Pour développer $(a+b)^2$, il suffit, lorsque a et b sont positifs, d'utiliser des aires de rectangles (à l'aide d'un carré de côté a + b décomposé en rectangles, éventuellement carrés).

Autres exemples : Recours à la géométrie analytique ; mise en équation d'un problème ; utilisation du calcul vectoriel à propos de configurations ; ...

(5) *Examen de plusieurs cas de figure, ou d'un autre cas :*

Exemple : Soit une droite $\triangle$ et deux points A et B donnés. La recherche du minimum de MA + MB est difficile lorsque A et B sont d'un même côté de $\triangle$. Mais si l'on prend A et B de part et d'autre... Il reste ensuite à ramener le premier cas à celui-ci.

(6) *Recours à un référentiel différent :*

Exemple : Pour résoudre une équation dont les solutions ne peuvent être qu'entières, on peut d'abord la résoudre dans $\mathbb{R}$ sans tenir compte de cette restriction.

(7) *Recours à un enrichissement de la situation :*

Exemple : Pour étudier "triangle rectangle - hypoténuse-médiane correspondante", on peut "doubler" le triangle en rectangle ou en triangle isocèle.

Autres exemples : Cf. *Activités mathématiques en 4ème-3ème,* tome 1, ou encore § 3.1. du présent texte.

(8) *Utilisation du "trajet inverse" (ou problème réciproque) :*

Exemple 1 : Pour calculer x tel que $f(x)=a$, je peux d'abord chercher comment obtenir $f(x)$ à partir de x, puis reprendre "à l'envers" les diverses opérations.

Exemple 2 : Pour résoudre un problème de construction non immédiat j'analyserai d'abord une figure analogue à celle souhaitée.

(9) *Méthode de coïncidence* (très utilisable pour des réciproques mais parfois difficile au niveau du Premier Cycle).

Exemple : J'ai établi que, pour ABC rectangle en A et de hauteur [AH], $AH^2 = HB.HC$.

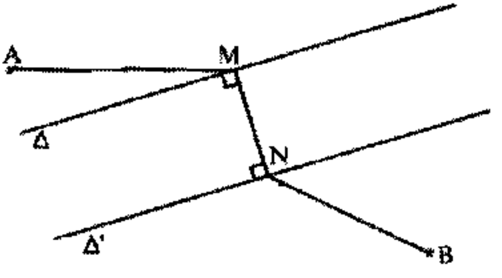
Pour étudier la réciproque, soit C′ sur (BC) tel que $(AC') \perp (AB)$. Il s'agit de savoir si C′ coïncide avec C. Or, ABC′ étant rectangle, je peux lui appliquer le théorème direct. D'où $AH^2 = HB.HC'$. Donc $HC = HC'$ (ce qui montre que, sans hypothèse supplémentaire...).

(10) *Raisonnement "par l'absurde" :*

Les problèmes d'incidence, de régionnements,... en fournissent de nombreux exemples.

(11) *Mise entre parenthèses d'une condition :*

Exemple : On donne deux parallèles Δ, Δ', et deux points A et B situés comme l'indique la figure ci-contre. Pour placer M sur Δ et N sur Δ' tels que $AM + MN + NB$ soit minimum, on met MN "entre parenthèses" : soit B′ tel que $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{NM}$. On cherche d'abord M tel que $AM + MB'$ soit minimum...



(12) *Illustration d'une condition :*

Exemple : Pour construire un triangle de périmètre et d'angles connus, rabattre deux côtés autour du troisième. De là une méthode de construction, cf. début du § **2.4**.

(13) *Fixation de variables :*

Exemple : Soit un triangle ABC et I le centre de son cercle inscrit. Pour chercher s'il existe une relation entre $\widehat{BIC}$ et les angles de $\widehat{ABC}$, je peux laisser un angle de $\widehat{ABC}$ constant. S'il s'agit de $\widehat{BAC}$, je suis amené à conjecturer que $\widehat{BIC}$ ne dépend que de A, et même que $\widehat{BIC}$ semble égal à $90° + \frac{\widehat{A}}{2}$ ...

(14) *Etude séparée de plusieurs conditions :*

Exemple : Construire ABC tel que [BC], la hauteur [AH] et la médiane [AM] aient des longueurs imposées.

Ayant placé [BC], on s'occupe séparément des deux autres conditions. Il s'ensuit que A apparaît comme élément commun à deux ensembles de points : un pour chaque condition.

(15) *Art de fragmenter le domaine de recherche :*

Exemple : Le plan étant rapporté à un repère orthogonal, pour chercher l'ensemble des points M(x,y) du plan tels que $|x| + |y| = Cte$, on cherchera pour x et y positifs puis on complètera par des symétries (cf. § **3.3. e**).

(16) *Disjonction de cas :*

Exemple : Pour résoudre $(x-1)(3x-5) = 4(x-1)$ on peut traiter à part le cas $x-1=0$ (qui fournit la solution 1). Il restera ensuite à traiter la possibilité $3x-5 = 4$.

(17) *Détermination de passages dangereux :*

Exemple : Pour la représentation graphique de la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ on joindra de proche en proche les points obtenus mais pas quand il s'agira de traverser l'axe des ordonnées, zéro étant une valeur interdite pour x. Il restera alors à étudier ce qui se passe au voisinage de zéro.

(18) *Appel à des outils fondamentaux :*

Exemple : Soit un triangle ABC d'orthocentre H. Supposons le cercle circonscrit fixe ainsi que le milieu de [BC]. Quel est l'ensemble des points H ?

On peut l'obtenir en montrant qu'il se déduit de celui de A par la succession de deux symétries centrales ou, évidemment, d'une translation.

(19) *Recours au "désencordage" ou "désemboîtage" :*

Exemple : Pour résoudre $5(x+7)^2+4 = 49$, on calcule d'abord $(x+7)^2$ puis, s'il y a lieu, $x+7$ puis x.

(20) *Généralisation :*

Exemple : Pour étudier le nombre de façons de placer n objets dans n cases numérotées, on étudie les cas de 2 objets, de 3 objets,... jusqu'à ce que, à l'aide d'un arbre par exemple, apparaisse la loi générale.

(21) *Appel à des méthodes générales :*

Exemple : Pour résoudre une équation (de degré supérieur à 1) de type $f(x) = g(x)$, on essaiera de résoudre l'équation équivalente $f(x) - g(x) = 0$ en essayant ensuite de factoriser le premier membre.

(22) *Recours à des modèles physiques :*

Exemple 1 : Il s'agit de trouver le plus court chemin pour joindre, sur la surface d'un solide développable (pavé, tétraèdre,...) un point à un autre (problèmes "de mouche et d'araignée"). Pourquoi ne pas réaliser le solide en question et observer les divers trajets possibles sur les solides "mis à plat" ?

Exemple 2 : Il s'agit d'étudier les lignes décrites par des points liés à un carré qui "roule", sans glisser, sur telle ou telle ligne. Pourquoi ne pas faire une observation matérielle ? Elle facilitera les conjectures, voire les démonstrations.

(23) *Recours à des outils physiques :*

Pour étudier les symétries, les applications conchoïdales,... pourquoi ne pas utiliser des appareils qui les réalisent ? ... ou des pavages ?

Autre exemple : Si l'on ne dispose pas des moyens théoriques de l'étude de l'inversion, pourquoi ne pas en tenter une première approche à l'aide d'un inverseur ?

(24) *Recours à des programmes de calcul sur machine :*

Exemple : Pour chercher si un naturel est premier. Le classique "crible d'Eratosthène" est alors avantageusement remplacé par une autre procédure : pour chercher si a impair supérieur à 1 est premier, il est plus commode d'examiner s'il est multiple ou non de tous les impairs successifs, *premiers ou non*, s'il y a lieu, jusqu'à celui dont le carré dépasse a.

(25) *Recours à des programmes de tracés avec visualisation sur table traçante, imprimante de courbes ou écran de télévision :*

Normalement ce sera, dans l'avenir, une possibilité de moins en moins négligeable. Il faudra alors tenir compte de tout ce qu'elle permettra en fait d'exemples, de conjectures, à propos, par exemple, de familles de courbes, de dessins répétitifs ("jolygones",...).

•• Il nous semble souhaitable que chacun de nous étoffe peu à peu le tableau de ces diverses démarches, quantitativement et qualitativement.

•• ***Un objectif spécifique du Premier Cycle sera l'acquisition progressive du plus grand nombre de démarches spécifiques possibles,*** cette acquisition exigeant que chaque élève découvre et fasse fonctionner lui-même chacune de ces méthodes sur au moins quelques exemples.

•• Mais les démarches de "l'herbier" que chacun pourra se constituer progressivement ainsi seront toujours ***insérées dans une pratique réfléchie des procédures générales de recherche*** décrites au § **3.5**.

Plus généralement et plus fortement encore les objectifs spécifiques de l'enseignement des mathématiques dans le Premier Cycle n'ont-ils pas leur intérêt essentiel dans leur ***contribution***, aussi importante que possible, ***à une action éducative globale*** ?

...C'est ce que nous examinerons dans un prochain article...