

Approche de la notion de longueur

par Jean SAUVY, ingénieur des Ponts et Chaussées
(équipe Activités Recherches Pédagogiques)

Nouvel éclairage sur l'acquisition de la notion de longueur chez les enfants de 6-7 ans (d'après des expériences anglaises).

Les loisirs de l'été m'ont permis d'étudier avec soin un numéro ancien (Janv. 1977) de la revue *Recognitions*, publiée par l'*Association of Teachers of Mathematics* (Angleterre). Ce document est consacré à des extraits de la thèse de Ken Saunders sur la mesure en mathématique.

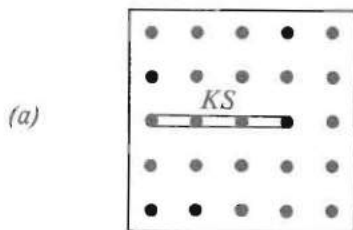
Mon attention a été particulièrement attirée par le compte rendu d'expériences que l'auteur (K.S.) a réalisées avec un groupe d'enfants de 6 et 7 ans utilisant une *planchette à clous*.

Les propos des enfants et de l'adulte ont été enregistrés et sont reproduits dans le document. On dispose ainsi d'un matériau de base particulièrement intéressant qui invite à la réflexion. J'ai pensé utile d'en effectuer la traduction la plus fidèle possible.

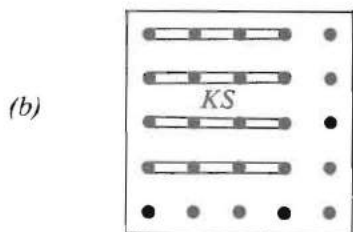
Je la ferai suivre des réflexions que ce travail de lecteur attentif m'a inspirées.

I. La recherche et les discussions des élèves

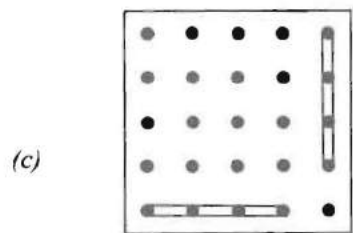
Je (c'est Ken Saunders qui parle) travaille avec Sarah, Claire, Gena, Geoffreys, Julian, Peter et Jonathan. Un "geoboard"* (planchette à clous) de 5×5 est placé devant le groupe.



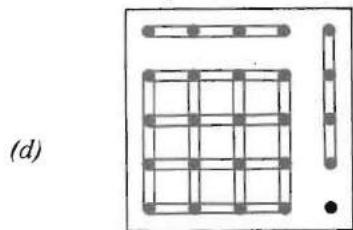
Je dispose un élastique comme indiqué et je demande : « Quelqu'un peut-il placer un élastique qui ait la même longueur que celui-ci ? »



Chœur de « oui, c'est facile ! » et, rapidement, plusieurs élastiques sont placés sur la planchette comme indiqué sur la figure.



Ensuite Geoffreys en place une ; et également Julian.

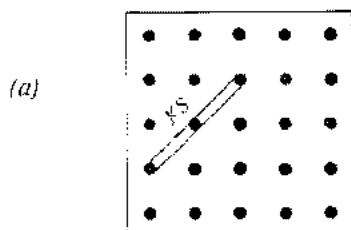


D'autres élastiques sont placés et bientôt on entend des commentaires tels que : « C'est une fenêtre », « C'est une prison ».

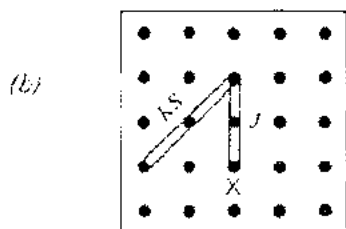
Fig. 1

* N.D.L.R. : "Geoboard" a donné "géoplan" en français.

Je voulais savoir comment les enfants compareraient les longueurs sur la planchette à clous... Comment allaient-ils interpréter la notion de longueur ? Comment mesureraient-ils, étant donné que je leur interdisais de toucher la planchette ?

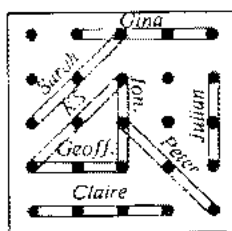


Nous recommençons : cette fois je dispose un élastique comme indiqué et j'invite les enfants à placer un élastique de la même longueur.



Jonathan place un élastique.
 KS : « Est-ce la même longueur ? »
 Jonathan : « Oui, il va sur trois clous »
 Peter : « Il paraît plus court ».
 Jonathan réfléchit, il étire son élastique d'un demi intervalle, le maintien du doigt à cette place et dit : « C'est à peu près là (X) ».

Fig. 2

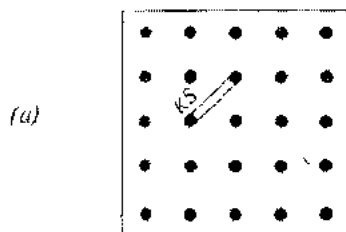


Ensuite chacun place son élastique.

KS : « Tous les élastiques ont-ils la même longueur ? »

Peter place un doigt sur mon élastique et un sur celui de Julien et dit : « Celui-là a fait de plus grands pas ('has got bigger gaps') que celui-ci. »

Fig. 3



Le jour suivant je donne à nouveau une planchette à clous aux enfants. Je place un élastique comme indiqué.

Claire : « Est-ce que nous devons placer un élastique de cette longueur ? »

Peter : « Qui ne peut pas ? »

Fig. 4

KS : « Quelqu'un peut-il ? »

Plusieurs en chœur « oui, oui ! »

KS : « Attendez une minute. Claire d'abord, puis... », des cris : « après moi, après moi... je suis second... »

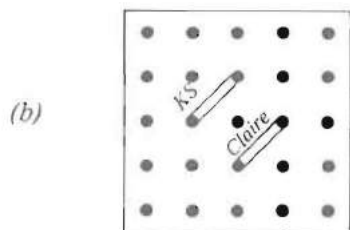


Fig. 4

Claire met son élastique.

KS : « Quelqu'un n'est-il pas d'accord ? »

Chœur : « non, non ».

KS : « Bien, Peter, peux-tu en placer un ? »

Peter : « C'est facile, c'est facile ».

Julian : « C'est à moi ? »

KS : « Gena, veux-tu placer le tien ? »

Julian : « Je n'en ai pas encore mis ».

Jonathan : « Je placerai le mien à la fin ».

KS : « Bien Sarah, veux-tu en placer un ? »

Et ainsi chacun place son élastique. Je demande si tout le monde est d'accord.

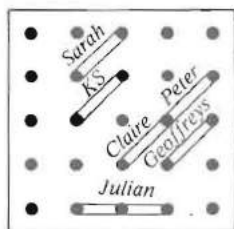


Fig. 5

Claire (montrant l'élastique de Julian) : « Je ne suis pas d'accord avec celui-là ».

KS : « Que Claire nous dise pourquoi elle n'est pas d'accord ».

Claire : « Eh ! bien... on peut dire qu'il est plus court parce qu'il n'a pas autant de place ("so much space")... celui-là (montrant le mien) a un plus long espace parce qu'il va vers en bas ».

Geoffreys : « voué... il a un plus long espace que celui-là. Celui-là (montrant l'élastique de Julian) devrait monter par là (pour rejoindre le clou occupé par l'extrémité de l'élastique de Claire). »

KS : « Ne le change pas de place ; laisse-le encore un peu où il est. Que pouvons-nous dire ? »

Sarah : « Eh ! bien ! que celui-là est plus long et que celui-là est plus court, parce que si vous les enlevez vous pouvez les mesurer. »

Elle est interrompue par des cris "non".

Geoffreys : « Comment peux-tu mesurer des fils élastiques, ils auront une longueur différente... (...) »

A nouveau j'enlève tout et je recommence plaçant un élastique comme indiqué.

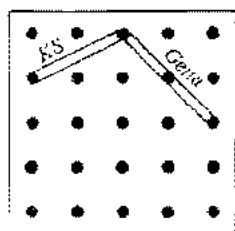


Fig. 6

Gena place un élastique.

Cris : « trop long... trop long... beaucoup trop long ! »

KS : « Écoutez Sarah un moment... Vous étiez en train de mesurer avec vos doigts. Mais si je dis que vous ne devez pas mesurer avec vos doigts... tout ce que vous pouvez faire c'est de regarder ; alors comment savez-vous que ce n'est pas la même longueur ? »

Geoffreys : « Parce que l'élastique ne va pas de ce clou à ce clou : il va sur trois carrés. »

KS : « Tu veux dire qu'il traverse trois carrés ? »

Peter : « Oué, et celui-là. Il traverse un, deux, trois. »

Je demande si quelqu'un peut placer un élastique de la même longueur que le mien mais n'allant pas dans la même direction.

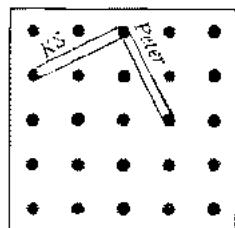


Fig. 7

Peter : « Je peux le savoir comme ça... et celui-là parce que celui-là est presque aussi mince que celui-là... après vous remettez celui-là et alors celui-là est aussi mince que celui-là. »

Sarah : « Et celui-là il va sur trois carrés et l'autre il va sur trois carrés. »

Geoffreys : « Voué. Eh bien ! celui-là est là... et celui-là deux vers le bas et en travers aussi. »

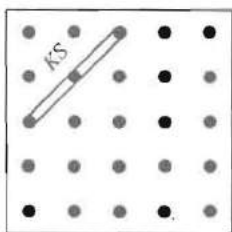


Fig. 8

Un peu plus tard je dégage la planchette et y place un seul élastique, comme indiqué. J'explique que je vais faire circuler la planchette parmi les enfants. Chacun devra mettre un élastique de même longueur mais personne n'aura le droit de parler.

Les élastiques sont placés comme indiqué.

KS : « Bien ! maintenant nous allons pouvoir dire ce que nous pensons. »

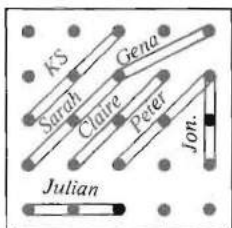


Fig. 9

Claire : « Je ne suis pas d'accord avec celui-là (celui de Jonathan). »

KS : « Tu dois dire pourquoi, Claire. »

Claire : « Bien, parce que, hum... celui-là il va vers le bas et l'autre il va tout droit vers le bas. »

Geoffreys : « Celui-là il traverse trois clous, l'autre aussi mais il n'y a pas un clou là qui soit juste comme l'autre. »

(Il a remarqué que deux élastiques de différentes longueurs "traversent" le même nombre de clous.)

Peter (montrant l'élastique de Gena) : « Celui-là il ne prend que deux clous, tous les autres trois. »

KS : « Oui, mais regarde, Geoff vient de dire que celui-là va sur trois clous et cet autre aussi sur trois clous, mais que l'un est plus court. Alors on ne peut pas dire d'après le nombre de clous, non ? »

Sarah (comptant les carrés traversés mais se trompant) : « On peut dire... un, deux... ça fera quatre. Il traverse quatre... et cet autre élastique il va sur un, deux, trois. »

KS : « Pourquoi comptes-tu celui-là (de carré) pour deux ? »

Sarah (recomptant) : « Un, deux, trois. »

KS, montrant son élastique et celui de Julian : « Celui-là il va sur trois et cet autre sur trois ; est-ce que celui-là est aussi long que l'autre ? »

Plusieurs voix : « Non ! »

Julian : « Je vais changer mon élastique. »

Jonathan : « Moi aussi. »

II. Quelques réflexions

1 - Nous avons ici un bel exemple de la pédagogie "recherche et découverte" qu'on peut pratiquer avec de petits groupes d'enfants.

2 - La technique de l'enregistrement au magnétophone des discussions qui accompagnent la recherche permet de saisir la "pensée en acte" des enfants dans sa richesse et sa spontanéité et nous donne des indications sur la façon dont ils acquièrent les concepts de base.

3 - A travers les réactions des enfants rapportées dans le document sous revue on peut déceler un certain nombre d'indications montrant que les enfants, dès l'âge de 6-7 ans, sont en possession de *rudiments non négligeables de connaissances géométriques euclidiennes*.

Alors que dans beaucoup d'expériences, notamment celles pratiquées par Piaget et ses continuateurs, ces connaissances géométriques n'affleurent guère, avec la planchette à clous l'enfant dispose d'un cadre de référence privilégié et se trouve alors en mesure d'aller aussi loin que la maturation de sa jeune intelligence le permet.

La planchette à clous matérialise une *structure visible* qui, en matière géométrique, peut être qualifiée (en empruntant le vocabulaire des psychologues de la Gestalt-théorie) de "bonne forme géométrique".

D'une part en effet les clous (qui attirent le regard comme ils retiennent les élastiques) sont *alignés*, d'autre part ils sont *équidistants*. La répétition d'intervalles spatiaux égaux semble permettre la perception par l'enfant d'une *régularité spatiale* de base dans laquelle s'enracine le concept de "même quelque chose" (dans notre langage d'adulte nous disons "même distance", "même intervalle", "même longueur", "même carré", etc.).

La mobilité du regard, sa façon de mener quasi simultanément des visées de détail (l'intervalle entre deux clous par exemple) et des visées plus larges (embrassant plusieurs rangées de clous), la petitesse relative de la planchette à clous qui rassemble beaucoup d'information spatiale sous un faible espace, permettent d'entrevoir pourquoi l'association "exploration visuelle / planchette" conduit à d'aussi bonnes performances.

Nous sommes en effet en présence de *performances remarquables* sur la route conjointe de l'abstraction et de la conceptualisation, comme je le montrerai dans un instant.

Bien plus, nous constatons l'apparition de *progrès*, d'acquisitions dans le cours même de l'exploration-recherche.

a/ *abstraction-conceptualisation*

Dès les premiers pas, trois enfants répondent au problème qui leur est posé en installant des élastiques dont les emplacements se déduisent tous de l'emplacement modèle (que matérialise l'élastique de K.S.) par une *translation* dans le sens perpendiculaire à la direction de l'élastique-modèle (*Fig. 1 b*). Le réseau à mailles carrées des clous s'y prête puisqu'il permet une sorte de contrôle visuel de la quasi-congruence des extrémités des élastiques (celle de l'enfant / celle de K.S.). Mais l'enfant qui opère ainsi ne peut dire "c'est la même longueur" que parce qu'il néglige ("il fait abstraction") le fait que les élastiques n'occupent pas la même place et donc ne coïncident pas vraiment.

Quelques instants plus tard nous voyons deux enfants (Geoffreys et Julian) qui placent leur élastique dans la direction perpendiculaire au modèle (*Fig. 1 c, 1 d*). Cette solution s'écarte perceptivement davantage du modèle que lorsqu'il y avait simple translation. Nous voyons là le concept de longueur se détacher un peu plus de son support concret puisque il *affirme son indépendance par rapport à la direction*. Mais là encore ce "saut épistémologique" de grande envergure est sans doute rendu possible par la bonne forme géométrique du réseau à mailles carrées qui se "lit" aussi bien dans une direction que dans la direction perpendiculaire.

Cette interprétation semble confirmée par ce qui se passe tout de suite après, quand K.S. place l'élastique-modèle en diagonale à 45° "sur trois clous" (*Fig. 2 a*).

Jonathan reste attaché aux directions majeures (les côtés des carrés) et place son élastique suivant une de ces directions (*Fig. 2 b*). Il croit avoir répondu correctement parce qu'il fait lui aussi enjamber trois clous à son élastique.

Toutefois cette solution crée un conflit perception / raisonnement qu'exprime Peter quand il dit "Il paraît plus court". Jonathan en tombe d'accord et étire un peu son élastique. Autrement dit il arbitre le conflit en négligeant la référence "trois clous" et en donnant la primauté à la perception. Cependant, comme il lui manque l'assise spatiale du réseau de clous, il prend soin d'ajouter "c'est à peu près là", (manifestant par cette phrase qu'il a en sa possession la *notion d'approximation*).

Jonathan n'est pas seul à faire l'erreur : trois autres enfants, (Gina, Julian, Claire) en font aussi parce que chacun d'eux semble ne pas pouvoir se détacher des directions majeures (*Fig. 3*). Par contre Sarah et Peter réussissent : l'un et l'autre reconstituent, à un autre emplacement de la planchette, les deux données importantes dans la configuration-modèle en matière de longueur : *l'inclinaison à 45° et l'enjambement de trois clous*. La solution trouvée par Sarah paraît la plus immédiate (simple translation), par contre celle de Peter demande déjà un niveau remarquable d'abstraction (*Fig. 3*).

b/ progrès

Dès la séance du lendemain, nous avons l'impression d'un progrès puisque la plupart des enfants sont capables de reproduire à un autre emplacement du quadrillage la configuration-modèle à 45° sur deux clous (Fig. 5).

Claire signale l'erreur de Julian (toujours fidèle aux directions majeures) et explique tant bien que mal pourquoi : parce que l'inclinaison n'est pas respectée. Geoff, entendant cette explication, "pige" tout d'un coup et indique comment on pourrait corriger l'erreur.

Au cours de cet échange de paroles entre les enfants, un début d'éclaircissement se fait autour de la constatation que la diagonale du carré de base est plus longue que les côtés.

Par la suite, quand l'élastique-modèle est placé en diagonale à 45° sur trois clous, la discussion reprend et, au terme des explications données par certains des enfants, les deux "réfractaires" Julian et Jonathan (Fig. 9), semblent finalement en mesure de voir le rôle joué par l'inclinaison : ils disent qu'"ils vont changer" leur élastique.

4 - En résumé, je retiens les trois points suivants :

a) Le réseau à mailles carrés facilite la *géométrisation de l'espace* et permet l'*émergence de notions euclidiennes* qui, chez des enfants de 6-7 ans, sont encore mal assurées.

b) La longueur s'apprécie visuellement par un processus (sans doute très complexe) qui semble être global et qui fait intervenir (implicitement bien sûr) les propriétés d'invariance sous le groupe des déplacements (translation, rotation), à condition que ces *déplacements** soient *guidés perceptivement* par un grille dotée d'une "bonne forme géométrique" ("motifs" carrés répétitifs se déployant suivant deux axes rectangulaires).

c) La démarche pédagogique du type *recherche - découverte* conduite avec des groupes restreints par un enseignant qui intervient relativement peu, laissant les enfants tâtonner, s'exprimer, s'auto-corriger et s'instruire mutuellement, apparaît comme riche de possibilités quand on se propose d'aider les enfants âgés de 6-7 ans (et sans doute 8-9) à tirer parti des connaissances embryonnaires de géométrie euclidienne qu'ils ont dans leur bagage et faire des progrès décisifs sur la voie de l'acquisition des notions de longueur et de distance.

* virtuels, imaginés.