10
SECOND CYCLE

Programmes et commentaires de G_2 G_3, TD et TC

Le Conseil de l'Enseignement Général et Technique (C.E.G.T.) a voté les programmes de mathématiques de terminale C et E le 10.12.1981 et ceux des sections G et de terminale D le 28.01.1982.

La note de service n° 82.090 du 24.02.82 (parue au B.O. n° 9, pages 816-817) précise le maintien, dans l'immédiat, des classes de premières G_1, G_2, G_3 ; et le maintien, en première G_1, du programme de mathématiques actuellement en vigueur dans les classes de première G_1.

Programme de première G_2 G_3

ALGÈBRE

1°) Fonction linéaire, lien avec les problèmes de proportionnalité. Pourcentages, taux, coefficients multiplicateurs.

2°) Suites arithmétique et géométrique, expression du terme général en fonction du rang, définition par récurrence. Calcul de la somme de n termes consécutifs.

Exemples d'utilisation en économie, démographie,...

Propriétés des puissances entières d'un réel.

Représentation graphique de l'application de **N** dans **R** $n \longrightarrow a^n (a > 1)$; par extension : notion d'exposant réel (le calcul se fait à l'aide de la machine).

3°) Exemples de problèmes conduisant à la résolution d'équations ou d'inéquations linéaires.

STATISTIQUES

1°) Mise en place des notions abordées en Seconde. Présentation des données en tableaux, en graphiques, en pictogrammes. Passage d'une représentation à l'autre.

2°) Caractéristiques de position d'une série statistique : mode, médiane, moyenne.

3°) Caractéristiques de dispersion : étendue, écart-moyen, écart-type, quartiles.

4°) Nuage de points, point moyen, ajustement linéaire par des méthodes graphiques.

Programme de terminales G_2 et G_3

Le programme des Terminales G_2 et G_3 prévoit d'abord une mise au point et un approfondissement des notions abordées en Première $G_2 G_3$. On traitera des problèmes variés relatifs :

— à la programmation linéaire (optimisation d'une fonction affine de deux variables vérifiant des contraintes simples);
— à la recherche d'extremum d'une fonction sur un intervalle;
— au calcul approché des racines d'une équation.

On donnera des compléments sur les points suivants :

ARITHMÉTIQUE

Notion de base de numération : base dix et base deux.

ANALYSE

1°) Notion de limite : définition quantifiée de la limite nulle en 0. Propriétés des fonctions tendant vers 0 en 0 :

a) Chacune est bornée sur un intervalle convenable contenant 0.

b) Somme de deux fonctions de limite nulle.

c) Produit d'une fonction tendant vers 0 par une fonction bornée.

Ces trois propriétés, d'où découlent toutes les autres, pourront être admises sans démonstration.

2°) Notions de fonction composée et de fonction réciproque. Enoncé, sans démonstration, des règles donnant les dérivées de ces fonctions.

3°) Dérivées des fonctions usuelles et primitives associées. Notation

$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\mathrm{d}t$; interprétation géométrique.

ANALYSE

L'objet de ce chapitre est l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle sous le triple aspect numérique, graphique et formel. L'objectif est d'obtenir que l'élève passe naturellement d'un aspect à l'autre et sache s'aider d'un aspect pour contrôler l'autre.

Il convient de faire acquérir une bonne compréhension des concepts sans formalisation inutile.

On n'utilisera que des fonctions bornées définies sur un intervalle borné. La continuité ne doit faire l'objet d'aucun exposé théorique mais on donnera des exemples simples de fonctions discontinues et de fonctions définies par morceaux.

1°) Révision des notions mises en place en seconde : sens de variation, monotonie, parité, représentation graphique.

Etude des valeurs numériques prises par une fonction au voisinage d'un point. On en dégagera la notion intuitive de "développement limité".

Il n'est pas utile de définir un développement limité en général pour utiliser en pratique ceux signalés en 2 et 3.

2°) Définition de la limite nulle en 0.
Développement à l'ordre 0 : limite en un point.

3°) Développement à l'ordre 1 : fonction dérivable et nombre dérivé. Interprétation géométrique. Coût marginal.

4°) Fonction dérivée, notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée de la forme $x \longmapsto f(ax+b)$.

5°) Etude globale d'une fonction, lien entre la monotonie et le signe de la dérivée.

Tous les théorèmes des paragraphes 4 et 5 pourront être admis sans démonstration.

Applications à l'étude du signe d'une fonction et à la résolution d'équations de la forme $f(x) = a$.

En particulier on étudiera sur des exemples numériques des fonctions définies par un trinôme du second degré, sens de variation, courbe représentative, signe, recherche algébrique des racines.

6°) Etude locale d'une fonction. Equation de la tangente. Extremum local.

boration des programmes puisque cette commission avait travaillé dans le cadre d'une première G commune. L'Inspection générale a demandé aussi la distinction des deux programmes de mathématiques en classe de première G.

L'administration a accepté, mais n'a pas prévu de nouvelle réunion de préparation des programmes de mathématiques. En conséquence, le début des commentaires de G_2 G_3 a été récrit par l'Inspection générale. Nous publierons dans le Bulletin ce début des commentaires dès que nous l'aurons reçu.

Vous trouverez ci-dessous la suite des commentaires pour G_2 G_3.

CLASSE DE PREMIÈRE G_2 G_3

Algèbre § 2. Il ne s'agit aucunement d'introduire rigoureusement la fonction exponentielle mais simplement de donner un sens à la touche correspondante de la calculatrice. L'importance de cette fonction en économie incite à familiariser tous les élèves avec son emploi.

Algèbre § 3. Ces questions ont été introduites en Seconde, il s'agit donc simplement de révisions qu'il y aura intérêt à répartir tout au long de l'année.

Analyse. Ce programme est volontairement limité à l'étude des fonctions bornées, définies sur un intervalle lui-même borné : ce sont les seuls cas qui se présentent en économie. On précise donc que des fonctions du type : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,1]$ sont exclues.

Analyse § 1. Ces révisions sont faites sous la forme de travaux dirigés et ne feront l'objet d'aucun enseignement magistral. Il ne s'agit nullement d'un exposé théorique sur les développements limités mais d'habituer progressivement les élèves à approcher une fonction quelconque par une fonction affine, lorsque cela est possible.

Analyse § 2. Les notions de limite et de continuité ayant toujours fait difficulté dans ces classes, le programme propose une simplification. Il ne mentionne pas la continuité. La notion de limite doit être réduite à la définition la plus rigoureuse possible de la limite nulle d'une fonction en 0. Une fonction qui tend vers L en un point est alors une fonction qui peut se mettre sous la forme : $f(x) = L + \varepsilon(x)$, ε étant une fonction qui tend vers 0 en ce point. Naturellement dans un premier stade, x sera l'infiniment petit de référence, on prendra ensuite $x = x_0 + h$ si l'on veut définir une limite en x_0.

Analyse § 3. En poursuivant l'étude dans la même direction et sur des exemples numériques, s'il est possible d'écrire

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h)$$

avec ε tendant vers 0 avec h et $\varepsilon(0) = 0$, on dit que f est dérivable en a et que A est le nombre dérivé de f en a. Dans le cours de seconde, il existe de

4°) Fonction logarithme (primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ s'annulant pour $x = 1$) ; croissance, courbe représentative.

Fonction exponentielle (réciproque de la précédente) ; croissance, courbe représentative.

Définitions : logarithme décimal ($\log x = M.ln\ x$), exposant réel ($a^x = e^{x\ ln a}$).

Comparaison numérique des fonctions logarithme, puissance et exponentielle pour les grandes valeurs de la variable (usage de la calculatrice).

Propriétés algébriques du logarithme et de l'exponentielle.

5°) Etude pratique de fonctions variées.

Il est entendu que les fonctions étudiées doivent être définies numériquement (l'usage de paramètres est exclu) ; l'étude du signe de la dérivée ne doit présenter aucune difficulté : la dérivée sera donc une fonction dont le signe est connu (exponentielle, carré, ...) ou facile à déterminer (trinôme, logarithme,...) ou un produit des deux.

Les limites infinies et les branches infinies ne sont pas au programme, les intervalles d'étude restant bornés (voir programme de Première). Il est cependant nécessaire, pour étudier certains problèmes économiques, d'habituer les élèves à l'étude des comportements asymptotiques. Il s'agit, sur des exemples numériques, connaissant une fonction f et un nombre ε plus grand que 0, de choisir une fonction g et un nombre A tels que $x > A$ entraîne $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. ε sera donné numériquement et les élèves seront guidés dans le choix de g ; il sera précisé que tout nombre supérieur à A est aussi une réponse acceptable. Conséquences graphiques.

6°) Usage des tables financières ; interpolation linéaire.

STATISTIQUES

Ajustement linéaire à l'aide de moyennes.

Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés.

Corrélation linéaire ; droites de régression : coefficient de corrélation linéaire.

Commentaires des programmes G_2 G_3 (Première et Terminale)

AVERTISSEMENT

***L'A.P.M.E.P.** avait demandé au Directeur des Lycées que la distinction subsiste entre les programmes de mathématiques de première G_1 et ceux de première G_2 G_3, avec réunion, à nouveau, de la commission d'éla-*

Ceci explique un programme de compromis dont un exemple typique est donné par le paragraphe 5 d'Analyse du programme de Terminale. — A notre sens, il aurait mieux valu "appeler un chat un chat", tout en s'interdisant comme ailleurs tout développement théorique —. Cela explique également que les programmes de terminale prévoient aussi explicitement une révision de ceux de première, et que ceux-ci n'aient pas proposé une liste de thèmes.

C'est à notre demande que figure, dans le préambule du programme de terminale, la phrase relative aux problèmes. Nous avons proposé cet ajout pour donner de l'importance aux problèmes et qu'ainsi l'activité mathématique ne se limite pas à l'étude de fonctions, convaincus que cela ne constituait pas un alourdissement du programme mais un approfondissement de celui de première.

On a appris depuis lors que la différenciation entre les sections G_1, G_2 et G_3 serait maintenue dès la première, mais que les projets des futurs programmes — pourtant élaborés dans une tout autre perspective — n'en seraient pas modifiés pour autant : ce seront ceux des sections G_2 et G_3 (avec l'horaire actuel de 2 h 30 en première). On n'en est plus à une incohérence près ! De qui se moque-t-on ?

Programme de terminale D

• L'horaire hebdomadaire est de 6 heures.

• Comme dans les classes précédentes, de nombreuses activités sont indispensables ; c'est uniquement pour éviter des difficultés d'interprétation au baccalauréat que le choix des thèmes est laissé à l'initiative des professeurs : aucune liste indicative n'est proposée.

• On continuera à utiliser largement les calculatrices.

• L'élève a acquis en Première Scientifique un bagage important, qu'on aura soin d'investir dès le début de l'année dans des directions variées. Le professeur de Terminale dispose de l'ensemble des connaissances de Première, démontrées ou admises.

• Dans le texte du programme la mention "énoncé admis" ou "on admettra" désigne une proposition pour laquelle le professeur décidera de l'opportunité d'une démonstration, étant entendu que celle-ci n'est pas exigible au baccalauréat mais qu'en tout état de cause la signification de l'énoncé, sa portée, ses applications seront mises en évidence.

Les autres propositions sont, bien entendu, démontrées.

I. - SUITES NUMÉRIQUES

a) Propriété fondamentale (qu'il est hors de question de démontrer) : toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.

nombreuses fonctions pour lesquelles ce calcul peut être fait aisément et des fonctions pour lesquelles il n'est pas possible de trouver A et ε.

Analyse § 4, 5 *et* 6. Le programme se propose d'habituer les élèves à l'étude des fonctions. Il est impératif que les exemples soient variés mais qu'ils ne donnent pas lieu à des calculs trop difficiles. On rappelle que le programme de Seconde contient un éventail de fonctions qui peuvent toutes être utilisées et même composées, à l'exception des fonctions trigonométriques.

Statistiques. On attachera la plus grande importance au § 1 qui conditionne tous les autres. On n'oubliera pas que c'est un des chapitres qui se prête le mieux aux activités pluridisciplinaires.

CLASSE TERMINALE

Arithmétique. Aucun développement n'est souhaitable sur les bases en général.

Analyse. Ce chapitre doit être traité dans le même esprit que celui de la classe de première. L'existence des primitives ne doit pas faire de problème puisqu'on se place dans le cas où on en connaît, sauf pour la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Les limites infinies n'étant pas au programme, il n'est pas question d'étudier la limite de $\frac{1}{x}$ e^x quand x tend vers l'infini mais il faut que les élèves sachent qu'il est possible de rendre ce rapport aussi grand que l'on veut et les conséquences graphiques qu'il faut en tirer.

Statistiques. Voir classe de première.

Position de l'A.P.M.E.P.
Sections G_2 G_3

Les futurs programmes de Première et Terminale G ont fait l'objet de plusieurs réunions de la commission réunie à l'initiative de l'Inspection générale, au cours du premier trimestre de l'année scolaire 1980-1981. A la demande explicite du ministère, ils ont été conçus pour une première G commune à tous les élèves de cette filière (pour un horaire qui devait être de 3 heures hebdomadaires) et pour les terminales G_2 et G_3 (pour un horaire équivalent). La commission a eu la tâche difficile sinon impossible d'élaborer des programmes devant répondre à une double finalité :

— s'adresser, en première, à tous les futurs élèves des sections G_1, G_2, G_3 regroupés, à ce niveau, dans une même section G,

— s'adresser, en terminale, aux seuls élèves des sections G_2 et G_3, et mieux armer qu'ils ne le sont actuellement les futurs élèves de B.T.S. et I.U.T.

Exemples simples de recherches d'asymptotes.

e) Fonction exponentielle $x \mapsto \exp x$ (il est souhaitable d'aborder cette fonction dès la présentation des applications réciproques).

Notations e^x, u^v.

Fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto x^\alpha$.

Croissance comparée des fonctions $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \exp x$.

On s'attachera à obtenir, pour $\alpha > 0$, les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^\alpha . \ln x = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\exp x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha . \exp x = 0.$$

Exemples de dérivées de fonctions composées des types $\ln f$, $\exp f$, f^α. (Les élèves devront savoir reconnaître sur des exemples simples, dans la recherche des primitives, les dérivées de telles fonctions).

III. - CALCUL INTEGRAL

a) Intégrale d'une fonction continue.

Il est recommandé d'adopter la définition suivante :

Soit f une application continue d'un intervalle I de **R** dans **R**.

On a admis, en Première, que f possède des primitives sur I, et que deux quelconques d'entre elles diffèrent par une constante.

Il en résulte que, pour tout $(a,b) \in I^2$, le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F ; on le note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on l'appelle intégrale, de a à b, de la fonction continue f.

En d'autres termes, $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est donc l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 au point a.

On traitera les questions suivantes :

— relation de Chasles (additivité par rapport aux intervalles) ;
— linéarité par rapport aux fonctions ;
— positivité : si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$;
— inégalité de la moyenne, valeur moyenne ;
— changements de variable affines ;
— intégration par parties.

b) Obtention d'une valeur approchée d'une intégrale : on exposera seulement la méthode des rectangles, avec majoration du reste.

b) Suites tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

c) Exemples d'études de suites vérifiant une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ (on admettra que la composée d'une suite de limite ℓ par une fonction f continue au point ℓ admet $f(\ell)$ pour limite).

Exemples de suites vérifiant une relation $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ (a,b réels donnés) ; on prendra certains de ces exemples dans des situations évolutives en économie ou en biologie.

II. - FONCTIONS NUMÉRIQUES

Dans les énoncés et les démonstrations on continuera de se placer dans des hypothèses de bonne sécurité sans en rechercher de plus fines. Comme dans les classes précédentes les exemples d'études de fonctions seront nombreux et variés, et on entretiendra l'habitude de la représentation graphique, car celle-ci joue un rôle important dans la description du comportement ; une indication d'allure peut suffire pour exprimer un aspect qualitatif, un tracé soigné est nécessaire lorsqu'on passe aux aspects quantitatifs.

a) Fonction logarithme népérien $x \longmapsto \ln x$; elle sera présentée le plus tôt possible, en exploitant l'acquis de Première. La fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log x$ sera introduite en vue du calcul numérique.

b) Compléments sur la continuité et les limites. Composée d'une fonction de limite ℓ par une fonction continue au point ℓ.

Si une fonction est croissante sur un intervalle $]a,b[$ ($a<b$) et si elle est majorée, alors elle admet une limite au point b (énoncé admis).

Fonction tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; stabilité du comportement d'une telle fonction par addition d'une fonction bornée, et par multiplication par une fonction admettant un minorant strictement positif (énoncés admis).

c) Fonctions continues sur un intervalle fermé ou non, borné ou non. On admettra que l'image continue d'un intervalle est un intervalle, et qu'une application continue et strictement monotone d'un intervalle sur un autre admet une application réciproque, qui est continue et strictement monotone.

d) Compléments sur le calcul des dérivées : dérivée d'une application composée, d'une application réciproque (résultats admis); cas de $x \longmapsto \sqrt{x}$. Dérivées successives. On donnera les notations $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, ... des dérivées, mais la notion de différentielle est en dehors du programme.

En se référant aux propriétés, vues en Première, liant le signe de la dérivée et le sens de variation, on développera sur de nombreux exemples l'étude d'une fonction, sens de variation, signe, extremums, et ses applications à la résolution d'équations et d'inéquations.

c) Application du calcul intégral à l'évaluation, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, de l'aire de la partie définie par

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) , \end{cases}$$

où f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

d) Exemples de résolution d'équations différentielles linéaires homogènes, à coefficients constants, du premier et du second ordre.

On s'attachera à résoudre ces équations avec des "conditions initiales" données ; on admettra alors l'unicité de la solution.

IV. - FONCTIONS VECTORIELLES ET CINEMATIQUE

a) Fonction vectorielle d'une variable réelle ; l'espace d'arrivée est $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, ou encore $\mathbf{C}$ identifié à $\mathbf{R}^2$. Les définitions et les démonstrations seront données à l'aide des coordonnées.

Dérivée d'une fonction vectorielle. Dérivée d'une somme, d'un produit $\varphi.\vec{v}$ (où $\vec{v}$ et φ sont respectivement à valeurs vectorielles et réelles) d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel.

b) Cinématique du point. Trajectoire. Vecteur-vitesse, vecteur-accélération.

Mouvement accéléré, mouvement retardé.
(Au baccalauréat, on se limitera à des mouvements dans le plan).

V. - NOMBRES COMPLEXES

a) Le corps des nombres complexes (aucune méthode n'est imposée dans cette introduction).

Bijection $(a,b) \mapsto a+bi$ de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{C}$.
Représentation géométrique d'un nombre complexe ; affixe d'un point, d'un vecteur, translation $z \mapsto z+\lambda$.
Nombres complexes conjugués.
Module ; inégalité triangulaire ; module d'un produit.
Nombres complexes de module 1 ; argument d'un nombre complexe non nul, notation $r.e^{i\varphi}$.
Relation $e^{i\varphi}.e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')}$, rotation $z \mapsto e^{i\theta}.z$.

VI. - ALGEBRE LINEAIRE

Les définitions d'un espace vectoriel et d'une application linéaire ont été vues en Première. On s'intéresse exclusivement à l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, (n entier numériquement fixé de façon raisonnable).

a) Opérations dans $\mathbf{R}^n$, base canonique.

Etude des combinaisons linéaires d'une famille de p éléments de $\mathbf{R}^n$; cette étude conduit à dégager :

— les notions de sous-espace vectoriel (partie stable non vide) et de famille génératrice ;

— la représentation, dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, d'une famille finie par une matrice ;

— la détermination d'une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ par les images des éléments de la base canonique de $\mathbf{R}^p$ et par conséquent par la matrice de ces images dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Les matrices n'ayant ici qu'un rôle représentatif, il est exclu de développer le calcul matriciel ; somme et produit de matrices sont hors du programme.

b) Interprétations d'un système linéaire de n équations à p inconnues :

— recherche des décompositions d'un vecteur ;

— recherche des antécédents de ce vecteur dans une application linéaire.

c) Opérations élémentaires $L_i \to L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$ sur les lignes d'une matrice. Exemples numériques de résolution d'un système linéaire par opérations élémentaires sur les lignes.

VII. - COMBINATOIRE. STATISTIQUE. PROBABILITES

a) Nombre des applications d'un ensemble fini dans un autre ; nombre des injections ; arrangements.

Nombre des parties de cardinal donné d'un ensemble fini ; combinaisons.

Notations : C_n^p, $\binom{n}{p}$

Formules : $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$.

Exemples variés de dénombrements.

Formule du binôme.

b) Exemples de situations où le hasard intervient ; association à une telle situation d'un ensemble fini d'épreuves Ω et d'une probabilité sur les parties de Ω (appelées événements).

Probabilité uniforme sur Ω, calcul de probabilités par dénombrement.

Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle. Evénements indépendants.

Enchaînement des expériences ; produit de deux probabilités sur un produit cartésien ; schéma de Bernoulli.

c) Aléa numérique (variable aléatoire réelle) prenant un nombre fini de valeurs ; probabilité associée à un tel aléa sur les parties de $\mathbf{R}$; fonction de répartition, espérance mathématique, variance, écart-type ; variable centrée, variable réduite.

Aléas indépendants.

Distribution binomiale.

L'alinéa qui suit n'est pas au programme du baccalauréat.

Sur un exemple numérique on procèdera à l'approximation d'une distribution binomiale par la loi de Gauss après avoir brièvement défini cette loi.

d) (Statistiques). Etude simultanée de deux grandeurs numériques mesurées sur une population de m individus ; nuage de points associé dans $\mathbf{R}^2$.

Ajustement, à m points expérimentaux, d'une fonction affine par la méthode des moindres carrés. Droite de régression.

Cas de points pondérés, barycentre du nuage. Inertie du nuage par rapport à un point ; minimum de cette inertie.

Commentaires pour Terminale D

La mention "exemples de" signifie qu'il n'y a lieu ni d'effectuer un exposé synthétique général ni de mettre en place un vocabulaire théorique. Bien entendu il est essentiel que l'étude d'un exemple soit menée de façon solide et précise, et permette de dégager des idées et des méthodes.

L'ordre adopté est celui des rubriques du programme ; le numéro de chaque rubrique est rappelé.

I. - Le champ de l'Analyse, tant pour les suites que pour les fonctions, s'agrandit notablement en Terminale. On continuera d'y donner place à deux formes d'activités, tenant compte de ce que les problèmes comportent divers aspects :

- les uns qualitatifs (convergence, existence d'un maximum, existence d'une solution d'une équation, ...) ;
- les autres quantitatifs (majorations, rapidité de convergence, optimisations,...), et que la même dualité existe au niveau des concepts :
  - certains qualitatifs (limite, continuité, dérivabilité,...) ;
  - d'autres quantitatifs (ordre de grandeur,...).

Dans ce travail d'organisation intervient à tout moment le calcul numérique, facilité par l'emploi des calculatrices ; il est bien clair qu'en Analyse les problèmes numériques jouent un rôle essentiel.

Familiarisés déjà avec les suites, les élèves de Terminale disposent d'outils nouveaux et performants, à commencer par le théorème (admis) sur les suites monotones bornées, qui permet d'établir la convergence d'une suite sans connaître sa limite.

L'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, ébauchée en Première, peut devenir méthodique grâce au raisonnement qui conduit, pour une fonction f continue, à l'équation $\ell = f(\ell)$.

Enfin le calcul intégral apporte des moyens d'encadrer une suite (suites $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, $\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$,...), et inversement des suites interviennent dans l'approximation d'une intégrale. Suites et fonctions ont donc droit toute l'année à un intérêt partagé.

II. - Le programme fait appel pour les fonctions, au prix de certains énoncés admis, à une large variété d'outils, de type global ou local, couvrant le domaine qualitatif, mais aussi le domaine quantitatif. On a voulu que ces outils concernent tout de suite un large éventail de fonctions ; de là l'introduction, dès le début de l'année, de la fonction logarithme népérien et, très peu après, de la fonction exponentielle. La formation de fonctions composées, de fonctions réciproques, de primitives, entretiendra cet élan.

Des calculs de valeurs approchées avec contrôle de l'approximation inciteront à la précision dans les études locales.

Comme en Première, on se gardera de cataloguer des situations ; on apprendra aux élèves à estimer le poids des termes mis en jeu ; on les habituera à obtenir des majorations par le calcul différentiel ; ainsi, pour x positif, si $0 \leq f'(x) \leq Mx$, alors $0 \leq f(x) - f(0) \leq M \frac{x^2}{2}$ (en effet la fonction $x \mapsto f(x) - M \frac{x^2}{2}$ est décroissante).

III. - Il a toujours été malaisé de présenter en Terminale l'intégration ; en effet à ce niveau, par souci des techniques de calcul, le concept de primitive prédomine sur celui d'intégrale. Il a donc paru plus efficace et plus court de rattacher la définition de l'intégrale d'une fonction continue aux primitives de cette fonction ; il va de soi que cette définition n'aura rien d'abrupt, elle peut être précédée d'une sensibilisation au moyen de la notion d'aire.

L'approximation numérique directe restitue à la notion d'intégrale son autonomie ; c'est une raison importante de bien mettre en valeur cet aspect.

Les situations nombreuses qui en sciences physiques mettent en jeu le calcul différentiel et intégral (vitesse et distance parcourue, intensité et quantité d'électricité, puissance et énergie,...) sont d'un intérêt mathématique et pédagogique évident.

Le procédé le plus commode pour intégrer l'équation du premier ordre $y' - my = 0$ repose sur la constatation qu'elle s'écrit $Y' = 0$ avec $Y(x) = y(x). \exp. (-mx)$; chaque solution est déterminée par sa valeur en 0.

IV. - L'objectif de l'étude des fonctions vectorielles est de diversifier les activités d'analyse, et d'investir brièvement l'outil vectoriel en cinématique. On donnera en particulier l'interprétation géométrique et cinématique du vecteur dérivé.

V. - Le programme s'abstient d'imposer des modalités de présentation des nombres complexes. Il convient toutefois de mettre en valeur le lien avec la trigonométrie : les formules d'addition sont l'expression d'une loi de composition sur le cercle unité.

Les applications mathématiques des nombres complexes ne sont pas les seules ; on montrera leur impact sur l'étude des phénomènes vibratoires.

VI. - L'objectif principal de l'Algèbre linéaire en Terminale D est l'étude des systèmes d'équations linéaires par opérations élémentaires. A cet effet quelques notions sur les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont introduites ; ce travail a été préparé par les programmes des classes précédentes.

VII. - En préalable au calcul des probabilités, on marquera la nécessité d'une certaine familiarité avec l'aléatoire. On sera donc amené à créer des situations où intervient le hasard ; ainsi pourra-t-on, pour échapper à une accumulation fastidieuse d'expérimentations, utiliser des relevés empruntés aux jeux, des suites pseudo-aléatoires fabriquées par une calculatrice, ou encore des séries de mesures expérimentales ou d'observations d'écoulements de trafic, de files d'attente, etc...

Cette étude expérimentale fera comprendre la nécessité d'une modélisation. On montrera en particulier que les hypothèses d'indépendance sont celles qui produisent les modèles les plus simples, ce qui suffit à les recommander sauf réalité expérimentale contraire. La formalisation doit rester souple ; il y a souvent plusieurs choix possibles de l'ensemble d'épreuves Ω. Dans le cas (seul à envisager) où Ω est fini il n'y a pas à se placer dans l'hypothèse où certaines parties de Ω ne sont pas probabilisées ; on évitera donc de parler de tribu ou d'anneau.

Le schéma de Bernoulli, qui assure l'introduction naturelle de la distribution binomiale, est le modèle le plus simple de répétition des expériences ; les élèves devront être capables de reconnaître, à l'énoncé d'une situation, si elle relève de ce modèle. On pourra dire quelques mots des tirages sans remise et des sondages.

L'étude d'une distribution binomiale $B(n,p)$ doit s'exprimer par des manipulations numériques (à l'aide de la calculatrice ou de tables) et graphiques, portant soit sur l'aléa lui-même s_n et l'aléa réduit centré $x_n = \frac{s_n - np}{\sqrt{npq}}$, soit sur le quotient $\frac{s_n}{n}$ (qui a même aléa réduit centré) ; on fera découvrir que la répartition attachée à ce quotient est d'autant plus concentrée autour de p que n est grand (approche de la loi des grands nombres). En outre, on confrontera, sur un exemple de taille suffisante et en utilisant éventuellement du papier gausso-arithmétique, la fonction de répartition de l'aléa réduit centré à la fonction de Laplace-Gauss.

Comme dans les classes antérieures on situera l'étude des statistiques au contact de situations expérimentales. On a choisi de développer en Terminale l'étude simultanée de deux grandeurs statistiques ; cette étude relèverait, pour être complète, de deux problématiques complémentaires, l'une basée sur l'ajustement et visant à approcher l'une des variables par une fonction de l'autre variable, l'autre sur l'idée de corrélation. On ne retiendra que le premier de ces points de vue, plus facile à présenter à cause de ses liens avec le calcul barycentrique.

Position de l'A.P.M.E.P.
Bilan concernant la Terminale D

1) L'A.P.M.E.P. estime que la commission n'a pas reçu du ministère un mandat suffisamment net concernant cette section.

— Il a été demandé, à juste titre, de revaloriser cette section. Mais aucun moyen n'a été prévu à cet effet : en particulier, pour les mathématiques, aucune heure de travaux dirigés en classe dédoublée n'a été accordée jusqu'à ce jour. Il faut affirmer de façon nette que dans ces conditions, la revalorisation de l'activité mathématique de l'élève est rendue très difficile.

— Il a été affirmé (officieusement) que la section débouche sur les carrières biologiques et médicales, mais aucune assurance n'a été donnée de la part de l'enseignement supérieur et des grandes écoles. Dans ces conditions, on voit mal comment la situation difficile que connaît à l'heure actuelle cette section pourrait évoluer.

2) Ces contradictions concernant les finalités et les objectifs ont, aux yeux de l'A.P.M.E.P., compromis gravement l'élaboration des programmes de l'ensemble de la section. Comment, en effet, les revaloriser par rapport à la section C avec des moyens inchangés et des perspectives de débouchés aussi minces qu'à l'heure actuelle ?

3) Le projet de programme de mathématiques s'en ressent fortement : sous-produit de la section C sauf en probabilités, il conduit à un éparpillement et à une vision trop lourde et desséchante des sujets abordés. Vu les conditions désastreuses de mise en œuvre, cela conduira à une formation superficielle et stéréotypée.

4) Dans ces conditions, il est clair que l'A.P.M.E.P. estime qu'une refonte sérieuse des objectifs et des contenus est absolument nécessaire, et souligne solennellement la gravité des responsabilités que prendraient ceux qui préconiseraient la mise en œuvre des projets actuels.

Programme de Terminale C et Terminale E

Le programme est commun aux classes terminales C et E, sauf en ce qui concerne le titre VIII (Géométrie).

• L'horaire hebdomadaire est de 9 heures (8 + 1).

• Comme dans les classes précédentes, de nombreuses activités sont indispensables ; c'est uniquement pour éviter des difficultés d'interprétation au baccalauréat que le choix des thèmes est laissé à l'entière initiative des professeurs : aucune liste indicative n'est proposée.

• On continuera à utiliser largement les calculatrices.

• L'élève a acquis en Première Scientifique un bagage important, qu'on aura soin d'investir dès le début de l'année dans des directions variées. Le professeur de Terminale dispose de l'ensemble des connaissances de Première, démontrées ou admises.

• Dans le texte du programme la mention "énoncé admis" ou "on admettra" désigne une proposition pour laquelle le professeur décidera de l'opportunité d'une démonstration, étant entendu que celle-ci n'est pas exigible au baccalauréat mais qu'en tout état de cause la signification de l'énoncé, sa portée, ses applications seront mises en évidence. Les autres propositions seront, bien entendu, démontrées.

• Les élèves ont été, en Première, initiés à des structures. L'étude de celles-ci n'a pas à être développée pour elle-même ; il s'agit cependant de pouvoir disposer, dans l'étude par exemple des nombres complexes ou de la fonction exponentielle, du langage approprié. Le professeur donnera donc au moment convenable la définition d'un corps commutatif, sans en apporter d'autre exemple que **R**, **Q**, **C**, ainsi que les définitions d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes.

I. - COMBINATOIRE. STATISTIQUES

a) Nombre des applications d'un ensemble fini dans un autre ; nombre des injections ; arrangements.

Nombre des parties de cardinal donné d'un ensemble fini ; combinaisons.

Notations : C_n^p, $\binom{n}{p}$. Formules $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$.

Exemples variés de dénombrements ; on fera le lien avec quelques calculs (sans théorie) de probabilités dans le cas d'équiprobabilité sur un ensemble fini d'épreuves.

b) Formule du binôme.

c) Etude simultanée de deux grandeurs numériques mesurées sur une population de m individus ; nuage de points associé dans $\mathbb{R}^2$.

Ajustement, à m points expérimentaux, d'une fonction affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression, coefficient de corrélation linéaire.

Cas de points pondérés, barycentre du nuage. Inertie du nuage par rapport à un point ; minimum de cette inertie.

II. - SUITES NUMERIQUES

a) Propriété fondamentale (qu'il est hors de question de démontrer) : toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.

Compléments sur les suites convergentes : la composée d'une suite de limite ℓ par une fonction f continue au point ℓ admet $f(\ell)$ pour limite.

b) Suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; stabilité du comportement d'une telle suite par addition d'une suite bornée, et par multiplication par une suite admettant un minorant strictement positif (énoncés admis).

Etude des suites $n \mapsto a^n$ et $n \mapsto n^\alpha$. Croissance comparée.

c) Suites récurrentes :

- exemples d'études de suites vérifiant une relation $u_{n+1} = f(u_n)$;
- exemples de recherche de suites vérifiant une relation $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$, dans laquelle a,b sont des réels donnés, ou une relation $u_{n+1} - u_n = P(n)$, dans laquelle P est un polynôme. On prendra certains de ces exemples dans des situations évolutives en économie ou en biologie.

III. - FONCTIONS NUMERIQUES

Dans les énoncés et les démonstrations on continuera de se placer dans des hypothèses de bonne sécurité sans en rechercher de plus fines. Comme dans les classes précédentes les exemples d'études de fonctions seront nombreux et variés, et on entretiendra l'habitude de la représentation graphique, car celle-ci joue un rôle important dans la description du *comportement ; une indication d'allure peut suffire pour exprimer un aspect qualitatif, un tracé soigné est nécessaire lorsqu'on passe aux aspects quantitatifs.*

a) Fonction logarithme népérien $x \to \ln x$; elle sera présentée le plus tôt possible, en exploitant l'acquis de Première. La fonction logarithme décimal $x \to \log x$ sera introduite en vue du calcul numérique.

b) Compléments sur la continuité et les limites. Composée d'une fonction de limite ℓ par une fonction continue au point ℓ.

Si une fonction est croissante sur un intervalle $]a,b[$ $(a<b)$ et si elle est majorée, alors elle admet une limite au point b (énoncé admis).

Fonction tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; stabilité du comportement d'une telle fonction par addition d'une fonction bornée, et par multiplication par une fonction admettant un minorant strictement positif (énoncés admis).

c) Propriétés des fonctions continues sur un intervalle (fermé ou non, borné ou non) ; on donnera les trois propriétés fondamentales suivantes, qu'il est hors de question de démontrer :

- l'image continue d'un intervalle est un intervalle ;
- l'image continue d'un segment est un segment ;
- une application continue et strictement monotone d'un intervalle sur un autre admet une application réciproque, qui est continue et strictement monotone.

d) Compléments sur le calcul des dérivées : dérivée d'une application composée, d'une application réciproque ; cas de $x \to \sqrt{x}$.

Dérivées successives. On donnera les notations $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$,... des dérivées, mais la notion de différentielle est en dehors du programme.

En vue des utilisations en Scienees physiques ; définition et notation des applications dérivées partielles d'une application numérique de deux ou trois variables réelles.

En se référant aux propriétés, vues en Première, liant le signe de la dérivée et le sens de variation, on développera sur de nombreux exemples l'étude d'une fonction, sens de variation, signe, extremums, et ses applications à la résolution d'équations et d'inéquations.

Exemples de comportement asymptotique d'une fonction, aspect graphique (courbes "asymptotes", $y=f(x)$ et $y=g(x)$, la différence $f(x)-g(x)$ tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$).

e) Fonction exponentielle $x \to \exp x$ (il est souhaitable d'aborder cette fonction dès la présentation des applications réciproques).

Notations e^x, u^v.

Fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \to x^\alpha$.
Croissance comparée des fonctions $x \to \ln x$, $x \to x^\alpha$, $x \to \exp x$.
On s'attachera à obtenir, pour $\alpha > 0$, les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} x^\alpha . \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\exp x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha . \exp x = 0 \quad .$$

Exemples de dérivées de fonctions composées des types $\ln f$, $\exp f$, f^α (Les élèves devront savoir reconnaître sur des exemples simples, dans la recherche des primitives, les dérivées de telles fonctions).

f) Exemples de développements limités au voisinage de 0 : on se bornera à donner la définition d'un développement limité, on établira, jusqu'à leur troisième terme non nul, les développements limités de

$x \to \cos x$, $x \to \sin x$, $x \to \exp x$, $x \to \ln(1+x)$, $x \to \sqrt{1+x}$.

Utilisation de développements limités dans la recherche de limites. *Au baccalauréat on indiquera la marche à suivre dans le cas de fonctions ne se ramenant pas directement à celles qui sont citées ci-dessus.*

Sont hors du programme : les notations de Landau, la notion d'équivalent (pour les suites comme pour les fonctions) ainsi que toute étude systématique des opérations sur les développements limités.

g) Accroissements finis.
- Enoncé sans démonstration du théorème de Rolle ; interprétation géométrique.
- Pour une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$:

  • Si la fonction dérivée f' a ses valeurs comprises entre des réels m et M, alors on a $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$;

  • Si la fonction dérivée f' admet au point a une limite ℓ. alors on a également $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$. Extension à une limite infinie.

IV. - CALCUL INTEGRAL

a) Intégrale d'une fonction continue.
Il est recommandé d'adopter la définition suivante : soit f une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a admis, en Première, que f possède des primitives sur I, et que deux quelconques d'entre elles diffèrent par une constante.

Il en résulte que, pour tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F ; on le note $\int_a^b f(t)\,dt$ et on l'appelle intégrale, de a à b, de la fonction continue f.

En d'autres termes, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est donc l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 au point a.

On traitera les questions suivantes :
- relation de Chasles (additivité par rapport aux intervalles) ;
- linéarité par rapport aux fonctions ;
- positivité : si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$;
- inégalité de la moyenne, valeur moyenne ;
- changements de variable affines ;
- intégration par parties.

Exemples d'étude d'une fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, où f n'a pas de primitive explicitée.

b) Obtention d'une valeur approchée d'une intégrale : on exposera seulement la méthode des rectangles, avec majoration du reste ; on en déduira une interprétation de la valeur moyenne d'une fonction comme limite d'une suite.

c) Application du calcul intégral à l'évaluation, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, de l'aire de la partie définie par :

$\left\{\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right.$ où f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

d) Sans théorie générale : autres applications géométriques, mécaniques, physiques, du calcul intégral ; exemples de calcul d'un volume, d'une masse, d'un moment d'inertie.

(Ce paragraphe d ne fera l'objet d'aucune question de mathématiques au baccalauréat).

e) Résolution des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants du premier et du second ordre.

On prouvera dans chaque cas l'existence et l'unicité de la solution vérifiant des "conditions initiales" données.

L'alinéa ci-dessous ne fera l'objet d'aucune question de mathématiques au baccalauréat.

Sur des exemples numériques, résolution d'une équation différentielle à coefficients constants de la forme $y'' + hy' + ky = a\cos(\omega x - \varphi)$.

V. - FONCTIONS VECTORIELLES ET CINEMATIQUE

a) Fonction vectorielle d'une variable réelle ; l'espace d'arrivée est $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, ou encore $\mathbf{C}$ identifié à $\mathbf{R}^2$. Les définitions et des démonstrations seront données à l'aide des coordonnées.

Dérivée d'une fonction vectorielle. Dérivée d'une somme, d'un produit $\varphi\vec{V}$ (où $\vec{V}$ et φ sont respectivement à valeurs vectorielles et réelles) d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel. Dérivée de la norme d'une fonction vectorielle.

b) Exemples simples de construction d'une courbe plane définie par une représentation paramétrique. (Toute étude de points singuliers ou de branches infinies est hors du programme).

c) Cinématique du point. Trajectoire. Vecteur vitesse, vecteur accélération. Mouvement accéléré, mouvement retardé.

Mouvements rectilignes, circulaires; mouvement circulaire uniforme, oscillateur harmonique (à support rectiligne). *(Au baccalauréat on se limitera à des mouvements dans le plan).*

VI. - NOMBRES COMPLEXES

a) Le corps des nombres complexes (aucune méthode n'est imposée dans cette introduction).

Bijection $(a,b) \mapsto a+bi$ de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{C}$.

Représentation géométrique d'un nombre complexe ; affixe d'un point, d'un vecteur.

Nombres complexes conjugués.

Module ; inégalité triangulaire ; module d'un produit.

Nombres complexes du module 1 ; argument d'un nombre complexe non nul, notation $r\,e^{i\varphi}$.

Relation $e^{i\varphi}.e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')}$. Dérivée de $t \mapsto e^{it}$.

b) (Compléments de trigonométrie). Formule de Moivre.

Exemples de linéarisation de polynômes trigonométriques.

Conversion de produits en sommes et de sommes en produits.

Réduction de $a\cos x + b\sin x$ (par $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$).

c) Racines n-ièmes d'un nombre complexe ; groupe des racines n-ièmes de l'unité, interprétation géométrique.

Résolution dans $\mathbf{C}$ des équations du second degré.

VII. - ALGEBRE LINEAIRE

Les définitions d'un espace vectoriel et d'une application linéaire ont été vues en Première, on les complètera par celle d'un sous-espace vectoriel. Il s'agit de mettre ces notions en œuvre sur des exemples variés d'espaces de dimension finie, en s'appuyant sur l'étude du modèle fondamental $\mathbf{R}^n$; dans les exercices et problèmes l'entier n sera numériquement fixé (de façon raisonnable).

a) Opérations dans $\mathbf{R}^n$, base canonique.

Etude des combinaisons linéaires d'une famille de p éléments de $\mathbf{R}^n$; cette étude conduit à dégager :

- la notion de sous-espace vectoriel engendré ;
- la représentation, dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, d'une famille finie par une matrice ;
- la détermination d'une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ par les images des éléments de la base canonique de $\mathbf{R}^p$, et par conséquent par la matrice de ces images dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

On remarquera que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Les matrices n'ayant ici qu'un rôle représentatif, il est exclu de développer le calcul matriciel : somme et produit de matrices sont hors du programme.

b) Interprétations d'un système linéaire de n équations à p inconnues :

- recherche des décompositions d'un vecteur ;
- recherche des antécédents de ce vecteur dans une application linéaire.
  Dans $\mathbf{R}^n$: familles finies génératrices, familles finies liées, libres ; bases.

c) Opérations élémentaires $L_i \to L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$ sur les lignes d'une matrice.

Méthode du pivot de Gauss (recherche d'une forme triangulaire de la matrice) ; sa mise en œuvre pour déterminer si une famille finie de vecteurs est une base, est libre, est génératrice.

Cette étude permet d'aboutir aux résultats fondamentaux suivants :

- toute base de $\mathbf{R}^n$ a exactement n éléments ;
- toute famille libre de $\mathbf{R}^n$ a au plus n éléments, et c'est une base si et seulement si elle a n éléments ;
- toute famille génératrice de $\mathbf{R}^n$ a au moins n éléments, et c'est une base si et seulement si elle a n éléments ;
- théorème de la base incomplète.

d) Exemples numériques de résolution d'un système d'équations linéaires par opérations élémentaires sur les lignes.

e) Espaces vectoriels de dimension finie.

Bases. Isomorphisme avec $\mathbf{R}^n$ d'un espace vectoriel muni d'une base comprenant n vecteurs. Dimension.

Un endomorphisme injectif (resp. surjectif) d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires ; projections, symétries.

VIII. - GEOMETRIE (TERMINALE C)

On continue de travailler dans le plan et l'espace considérés en Seconde et en Première. On dispose des espaces vectoriels associés ; il n'est donc pas nécessaire de modéliser un espace affine en général.

a) (Plan et espace)

Calcul barycentrique. Etant donné n points pondérés (A_i, α_i), étude des fonctions

$$M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \quad \text{et} \quad M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$$

Applications affines :

- une application de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans lui-même est dite affine quand elle est de la forme $\vec{v} \mapsto \vec{A} + \varphi(\vec{v})$, où φ est linéaire ;
- dans l'espace pointé en O, une application $M \mapsto M'$ est affine si l'application $\overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{OM'}$ est affine (définition indépendante du choix du point O).

Caractérisation des applications affines par la conservation des barycentres. Image d'une droite, d'un plan, d'une partie convexe par une application affine ; conservation du parallélisme.

On montrera que les isométries sont des applications affines conservant le produit scalaire. En plus des translations et des homothéties les élèves ont à connaître les symétries, orthogonales ou non, et les affinités ; on leur fera utiliser ces transformations dans de nombreux problèmes de constructions et de lieux géométriques.

b) (Géométrie plane). Mesures, dans le plan orienté, de l'angle orienté d'un couple de droites. Condition pour que quatre points soient cocycliques.

c) (Géométrie plane)

Composition de rotations et translations, groupe des déplacements.

Composition d'un déplacement et d'une symétrie orthogonale ; anti-déplacements. Sur des exemples, recherche du groupe des isométries conservant une configuration donnée.

Composition de déplacements et d'homothéties, groupe des similitudes directes.

Exemples de transformation définie par une application complexe $z \mapsto f(z)$: cas des similitudes directes ; exemple de transformation non affine.

d) (Géométrie dans l'espace)

Exemples simples d'isométries de l'espace laissant fixe un point donné.

Groupe des rotations d'axe donné ; on établira qu'une rotation est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans.

A titre d'exemples de composition : composée de deux rotations d'axes coplanaires ; composée d'une rotation d'axe D par une translation conservant D (vissage d'axe D).

e) (Géométrie plane)

Coniques : définitions géométriques (bifocale, et par foyer et directrice) ; équations cartésiennes réduites ; équivalence de ces diverses définitions.

Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Exemples de représentations paramétriques d'une conique.

Tangente à une conique en un point (on établira sa propriété de bissectrice par rapport aux foyers).

IX. - GEOMETRIE (TERMINALE E)

On continue de travailler dans le plan et l'espace considérés en Seconde et en Première. On dispose des espaces vectoriels associés ; il n'est donc pas nécessaire de modéliser un espace affine en général.

a) (Plan et espace)

Calcul barycentrique. Etant donné n points pondérés (A_i, α_i), étude des fonctions

$$M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \quad \text{et} \quad M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$$

Applications affines :

- une application de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans lui-même est dite affine quand elle est de la forme $\vec{v} \to \vec{A} + \varphi(\vec{v})$, où φ est linéaire ;
- dans l'espace pointé en O une application $M \to M'$ est affine si l'application $\overrightarrow{OM} \to \overrightarrow{OM'}$ est affine (définition indépendante du choix du point O).

Caractérisation des applications affines par la conservation des barycentres. Image d'une droite, d'un plan, d'une partie convexe par une application affine ; conservation du parallélisme.

On montrera que les isométries sont des applications affines conservant le produit scalaire. En plus des translations et des homothéties les élèves ont à connaître les symétries, orthogonales ou non, et les affinités ; on leur fera utiliser ces transformations dans de nombreux problèmes de constructions et de lieux géométriques.

b) (Géométrie plane)

Composition de rotations et translations, groupe des déplacements.

Composition de déplacements et d'homothéties, groupe des similitudes directes.

Représentation complexe d'une similitude directe.

c) (Géométrie dans l'espace)

Exemples simples d'isométries de l'espace laissant fixe un point donné.

Groupe des rotations d'axe donné ; on établira qu'une rotation est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans.

A titre d'exemples de composition : composée de deux rotations d'axes coplanaires ; composée d'une rotation d'axe D par une translation conservant D (vissage d'axe D).

d) (Géométrie descriptive)

Rotation autour d'un axe vertical ou de bout. Rabattement sur un plan horizontal ou frontal.

Distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan ; angle de deux droites.

Représentation du cercle.

e) (Géométrie plane)

Coniques : définitions géométriques (bifocale, et par foyer et directrice) ; équations cartésiennes réduites ; équivalence de ces diverses définitions.

Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Exemples de représentation paramétrique d'une conique.

Tangente à une conique en un point (on établira sa propriété de bissectrice par rapport aux foyers).

Commentaires pour Terminale C et Terminale E

• *La mention "exemples de" signifie qu'il n'y a lieu ni d'effectuer un exposé synthétique général ni de mettre en place un vocabulaire théorique. Bien entendu il est essentiel que l'étude d'un exemple soit menée de façon solide et précise, et permette de dégager des idées et des méthodes.*

• *L'ordre adopté est celui des rubriques du programme ; le numéro de chaque rubrique est rappelé.*

I. - La notion d'équiprobabilité ne sera pas mise en question lorsqu'elle interviendra dans les calculs de dénombrements.

Comme dans les classes antérieures, on situera l'étude des statistiques au contact de situations expérimentales. On a choisi de développer en Terminale l'étude simultanée de deux grandeurs statistiques ; cette étude relève de deux problématiques complémentaires, l'une basée sur l'ajustement et visant à approcher l'une des variables par une fonction de l'autre variable, l'autre sur l'idée de corrélation.

II. - Le champ de l'Analyse, tant pour les suites que pour les fonctions, s'agrandit notablement en Terminale. On continuera d'y donner place à deux formes d'activités, tenant compte de ce que les problèmes comportent divers aspects :

— les uns qualitatifs (convergence, existence d'un maximum, existence d'une solution d'une équation, ...) ;
— les autres quantitatifs (majorations, rapidité de convergence, optimisations, ...),

et que la même dualité existe au niveau des concepts :

— certains qualitatifs (limite, continuité, dérivabilité, ...) ;
— d'autres quantitatifs (ordre de grandeur, caractère lipschitzien, comportement asymptotique, ...).

Dans ce travail d'organisation intervient à tout moment le calcul numérique, facilité par l'emploi des calculatrices ; il est bien clair qu'en Analyse les problèmes numériques jouent un rôle essentiel.

Familiarisés déjà avec les suites, les élèves de Terminale disposent d'outils nouveaux et performants, à commencer par le théorème (admis) sur les suites monotones bornées, qui permet d'établir la convergence d'une suite sans connaître sa limite. On ne pouvait jusque là prouver la convergence d'une suite que vers un nombre connu par ailleurs. On peut désormais créer des nombres ; on en donnera des exemples (développements décimaux, suite $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$, suite $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$, ...). On ne cherchera toutefois pas à rassembler ces constructions dans une étude axiomatique de $\mathbb{R}$.

L'étude des suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$, ébauchée en Première, peut devenir méthodique grâce au raisonnement qui conduit, pour une fonction f continue, à l'équation $\ell=f(\ell)$. L'étude de la suite bénéficie en outre de l'approfondissement de celle de la fonction (accroissements finis).

Enfin le calcul intégral apporte des moyens d'encadrer une suite (suites $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, $\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$, ...), et inversement des suites interviennent dans l'approximation d'une intégrale. Suites et fonctions ont donc droit toute l'année à un intérêt partagé.

III. - Le programme fait appel pour les fonctions, au prix de certains énoncés admis, à une large variété d'outils, de type global ou local, couvrant le domaine qualitatif, mais aussi le domaine quantitatif. On a voulu que ces outils concernent tout de suite un large éventail de fonctions ; de là l'introduction, dès le début de l'année, de la fonction logarithme népérien et, très peu après, de la fonction exponentielle. La formation de fonctions composées, de fonctions réciproques, de primitives, entretiendra cet élan.

Des calculs de valeurs approchées avec contrôle de l'approximation, des majorations de restes dans des développements limités, inciteront à la précision dans les études locales ; pour celles-ci il est recommandé de prolonger en 0 par $\epsilon(0)=0$ les fonctions ϵ dont on aura besoin.

Comme en Première, on se gardera de cataloguer des situations ; on apprendra aux élèves à estimer le poids des termes mis en jeu et à apprécier s'il y a lieu de recourir à l'outil du développement limité ; on les habituera d'autre part, à partir des théorèmes sur le sens de variation, à obtenir des majorations par le calcul différentiel ; ainsi, pour x positif,

$$\text{si} \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant Mx\,, \quad \text{alors} \quad 0 \leqslant f(x)-f(0) \leqslant M\,\frac{x^2}{2}$$

(en effet la fonction $x \mapsto f(x)-M\dfrac{x^2}{2}$ est décroissante). Cette méthode, parmi d'autres, permet d'obtenir les développements limités qui sont au programme.

En ce qui concerne le théorème des accroissements finis, on a le choix des démarches ; voici deux voies qui peuvent être envisagées :

- ou bien on énonce le théorème de Rolle, et on en déduit la relation $f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(c)$; les théorèmes admis en Première en découlent ;

- ou bien on décide de partir de l'énoncé admis en Première : "$f' \geqslant 0$ implique f croissante", on en déduit une caractérisation des fonctions constantes, des fonctions strictement croissantes (resp. décroissantes) ; on en déduit aussi *l'inégalité* des accroissements finis : si $a<b$ et $m \leqslant f' \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$ (car les fonctions $x \mapsto f(x)-mx$ et $x \mapsto Mx-f(x)$ sont croissantes).

Le théorème de Rolle est, par cette voie, un résultat à part, aisé à obtenir si f' est continue (on applique alors à f' le théorème des valeurs intermédiaires) ; il marque un lien entre les zéros de f et ceux de f'.

Quelle que soit la démarche suivie, l'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir le théorème sur le prolongement de la dérivée.

Les brèves indications sur les fonctions de plusieurs variables ne visent que la pratique des dérivations. Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur les ensembles de définition ou les conditions d'existence.

IV. - Il a toujours été malaisé de présenter en Terminale l'intégration ; en effet à ce niveau, par souci des techniques de calcul, le concept de primitive prédomine sur celui d'intégrale. Il a donc paru plus efficace et plus court de rattacher la définition de l'intégrale d'une fonction continue aux primitives de cette fonction ; il va de soi que cette définition n'aura rien d'abrupt, elle peut être précédée d'une sensibilisation au moyen de la notion d'aire.

L'approximation numérique directe restitue à la notion d'intégrale son autonomie ; c'est une raison importante de bien mettre en valeur cet aspect. Sur des exemples simples, on pourra comparer la performance de la méthode des rectangles à celle de méthodes plus élaborées (trapèzes, tangentes) ; aucune étude systématique de ces méthodes n'est à envisager.

Les situations nombreuses qui en Sciences Physiques mettent en jeu le calcul différentiel et intégral (vitesse et distance parcourue, intensité et quantité d'électricité, puissance et énergie, ...) sont d'un intérêt mathématique et pédagogique évident. La résolution d'une équation différentielle particulière, avec second membre $a\cos(\omega x-\varphi)$, est proposée un peu plus loin dans une intention analogue d'interdisciplinarité.

Le procédé le plus commode pour intégrer l'équation du premier ordre $y'-my=0$ repose sur la constatation qu'elle s'écrit $Y'=0$, avec $Y(x)=y(x).\exp(-mx)$; chaque solution est déterminée par sa valeur en 0.

A l'ordre 2, il est aisé de construire une solution répondant à des conditions initiales données. Etablir l'unicité de cette solution revient à montrer que la fonction nulle est la seule solution vérifiant $y(0)=y'(0)=0$. On peut remarquer, à cet effet, qu'une équation $y''-(m+p)y'+mpy=0$ s'écrit $z'-pz=0$, avec $z=y'-my$. Lorsque $z(0)=0$, z est la fonction nulle. Le raisonnement s'étend à des fonctions à valeurs complexes (fonctions vectorielles) et par conséquent au cas où m et p sont complexes conjugués.

V. - Dans l'étude des fonctions vectorielles on se gardera d'un excès de développements théoriques ; on sera amené à suggérer cependant l'extension aux fonctions vectorielles des notions de continuité et de limite, afin d'exprimer l'interprétation géométrique et cinématique du vecteur dérivé.

L'objectif est d'investir brièvement l'outil vectoriel en cinématique, et de proposer des activités conjuguées de géométrie et d'analyse ; il y a donc lieu de familiariser les élèves avec des tracés de courbes obtenues par des générations simples dans le plan, exceptionnellement dans l'espace.

Dans la recherche de la tangente à une conique en un point, on utilisera une représentation paramétrique ; on aura à dériver une norme, $\|\overrightarrow{MF}\|$ pour chacun des foyers ou $\|\overrightarrow{MH}\|$ selon le mode de génération ; on obtiendra ainsi une caractérisation géométrique de la tangente.

VI. - Le programme s'abstient d'imposer des modalités de présentation des nombres complexes ; des considérations historiques ne sont pas à négliger dans cette présentation. Il convient de toute façon de mettre en valeur :

— le lien avec la trigonométrie ; les formules d'addition sont l'expression d'une loi de composition sur le cercle unité ;

— les aspects algébriques, touchant à l'extension du champ de factorisation des polynômes (exemple : $(x^2+a)^2-bx^2$) ;

— les aspects géométriques (voir VIII).

L'introduction des racines n-ièmes de l'unité permet la résolution d'équations de la forme $P^n = Q^n$; on pourra souligner l'intérêt historique du cas $n = 3$.

Les applications mathématiques des nombres complexes ne sont pas les seules : on montrera leur impact sur l'étude de phénomènes vibratoires.

VII. - Les programmes des classes précédentes, par l'étude des vecteurs tant géométrique qu'analytique, et par celle des systèmes d'équations linéaires, préparent à l'Algèbre linéaire, qui constitue en Terminale un objectif spécifique.

Il est nécessaire de se garder, à ce stade, d'un exposé trop formel et de trop grandes ambitions intrinsèques ; car il s'agit, avant tout, de faciliter une attaque efficace de problèmes numériques ou géométriques.

L'introduction des opérations élémentaires est dans la ligne des méthodes déjà préconisées en Seconde. Elle a un double objectif : définir des moyens de démonstration pour une théorie brève de la dimension ; mais aussi assurer, pour le traitement pratique des systèmes numériques, des méthodes algorithmiques particulièrement efficaces.

La méthode du pivot s'introduit aisément à la faveur d'interprétations de diverses natures, mais qui toutes se relient à l'écriture vectorielle $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots x_p\vec{a}_p = \vec{b}$, dans $\mathbf{R}^n$, d'une équation linéaire à p inconnues. On imaginera par exemple que les vecteurs seraient mieux représentés dans une base où on pourrait faire, pour certains d'entre eux, l'économie d'une coordonnée ; on est ainsi amené à des modifications élémentaires de la base, reposant sur un déplacement de termes : tel vecteur qui s'écrit $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + t\vec{\ell}$ peut aussi s'écrire $x(\vec{i} - \lambda\vec{j}) + (y + \lambda x)\vec{j} + z\vec{k} + t\vec{\ell}$, et si x n'est pas nul, le choix de λ permettra d'annuler la seconde coordonnée ; il est aisé de s'assurer que si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{\ell})$ est une base, $(\vec{i} - \lambda\vec{j},\vec{j},\vec{k},\vec{\ell})$ en est une autre.

En ce qui concerne l'extension aux espaces vectoriels munis d'une base des notions de familles liées, libres, génératrices et de celle de dimension, il est inutile de reprendre toute la théorie faite dans $\mathbf{R}^n$; l'essentiel est de faire comprendre aux élèves, à propos de ces questions figurant au programme mais aussi grâce aux exemples traités en problème, comment la donnée d'une base permet de se ramener au cas de $\mathbf{R}^n$; on n'envisagera que des situations conduisant à un espace de dimension finie.

VIII. - Le calcul analytique a été peu développé en Première. Il appartient au professeur de Terminale de montrer à ses élèves le bon usage de cet instrument : choix d'axes bien adaptés aux données, choix du mode de représentation (équation cartésienne, représentation paramétrique).

En ce qui concerne les transformations, on pourra aborder les aspects suivants :

— effet d'une transformation donnée sur une configuration simple et sur des grandeurs qui lui sont attachées (distances, angles, aires, volumes, ...) ;

— recherche de transformations faisant passer d'une configuration donnée à une autre ;

— effet d'une transformation sur des fonctions numériques ou vectorielles (telles que $M \rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$, $M(x,y) \rightarrow ax^2+by^2$, $M \rightarrow \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$) ;

— exemples de groupes de transformations laissant invariante une configuration donnée (parallélogramme, carré, angle, réseau, ...) ou une grandeur qui lui est attachée.

Dans les problèmes métriques et angulaires de géométrie plane, le recours aux nombres complexes peut être efficace ; en particulier la propriété de l'arc capable s'exprime par l'invariance de l'argument d'un quotient. Les applications $z \rightarrow f(z)$ fournissent de nombreuses situations où l'alignement n'est pas conservé ; on se bornera à en expérimenter une $z \rightarrow \frac{1}{z}$, $z \rightarrow \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $z \rightarrow \frac{z-i}{z+i}$, $z \rightarrow z^2$, ... ; aucune connaissance n'est exigible sur de telles transformations, et en particulier sur l'inversion.

En ce qui concerne les paragraphes de géométrie dans l'espace, ils sont destinés à compléter la vision de l'espace déjà recherchée en Première ; ils ne prendront donc tout leur sens que s'ils sont nourris d'exercices variés, peu chargés en calculs et s'inspirant plutôt des quelques résultats simples mis à la disposition des élèves sur les transformations et leur composition.

Position de l'A.P.M.E.P.
Bilan concernant les Terminales C et E

1) Contrairement aux objectifs définis pour l'ensemble du second cycle, le programme et les commentaires insistent trop fortement sur la présentation rigoureuse et bien ordonnancée des concepts et des théorèmes. Il conviendrait, au contraire, de centrer tout l'enseignement (étude des concepts, résolution de problèmes, activités diverses) autour de quelques grands problèmes jouant un rôle central dans les secteurs mathématiques considérés, conduisant à des situations riches, intersectorielles ou liées aux autres disciplines et fournissant des problématiques pour nourrir les situations didactiques. Faute de quoi, la formation scientifique est appauvrie, et la seule problématique consiste en des variantes concernant le déroulement des sujets traités et le choix des exercices d'application.

2) Aucune indication n'est donnée sur les niveaux d'approfondissement, ce qui laisse croire qu'au niveau de la terminale C, les mathématiques sont (enfin !) rigoureuses. En outre, les thèmes d'activité sont absents. Par rétroaction, cette orientation compromet l'évolution que les programmes des classes précédentes pouvait induire.

3) Il est indispensable de se donner les moyens d'infléchir l'esprit et les contenus en fonction d'une analyse scientifique de la mise en place des années antérieures.

4) L'ensemble seconde-première-terminale manque d'une stratégie globale pour l'enseignement de plusieurs points capitaux (questions de convergence en analyse, rôle des transformations en géométrie, problèmes linéaires et concept de linéarité).

*
* *

Position de l'A.P.M.E.P. sur le suivi de la réforme des programmes de toutes les sections

Il ne peut être effectué de façon scientifiquement sérieuse que par la mise en place d'analyses menées par des équipes de recherche dotées des moyens appropriés. La mise en place de ces équipes et des débats scientifiques doit relever d'une COmmission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, faute de quoi on en restera toujours au stade de l'improvisation hâtive et des coups de balancier idéologiques.