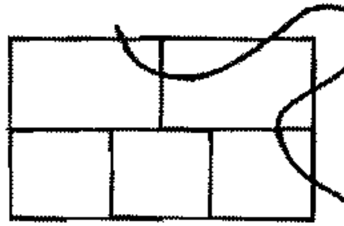
Quelques problèmes "impossibles"

par D. LANFRANCHI, Collège G. Philipe, Fontaine-Grenoble

I - Etude naïve

Qui n'a, enfant, été à la fois intéressé et irrité par la recherche de problèmes d'apparence facile tels que :

1. Tracer d'un seul trait et sans superposition le dessin d'une enveloppe fermée.



2. Tracer, sans superposition, une ligne coupant une fois et une seule chacun des seize segments élémentaires de la figure ci-contre.

On arrive assez vite à la conviction que ces problèmes sont "impossibles". Mais, pour l'apaisement de l'esprit, comment le démontrer ?

Avec mes élèves de 6^e^ et 5^e^, pour le deuxième problème, j'ai procédé ainsi :

Après quelques essais en classe, je leur propose de chercher le problème chez eux.

Quelques jours après, on étudie quelques situations binaires définies par deux états, telles que celle de

a) *La lampe* qui a deux états commandés par l'action d'un interrupteur [E : être éteinte ; A : être allumée].

Si au début elle est éteinte, quel est son état après la 19^e^ action ? Après la 158^e^ ?

Les élèves sont conduits à former un tableau où l'état initial est précisé

0	1	2	3	...
E	A	E	A	...

b) *Deux joueurs* A et B qui se lancent alternativement une balle. Au début c'est A qui a la balle. Qui l'a après le 27^e^ lancer ? Le 76^e^ ?

On obtient le tableau

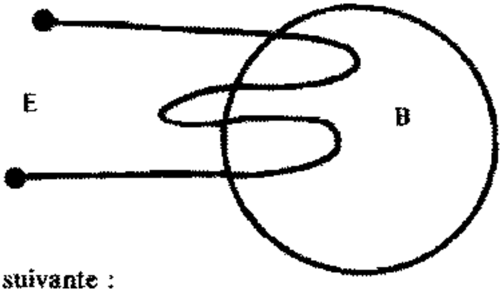
0	1	2	3	...
A	B	A	B	...

Régions et trajet

Appelons "région" une portion d'espace limitée par une "frontière" — surface ou ligne — Dans l'exemple précédent, le joueur B est dans une région (comme au tennis). Après un nombre pair de lancers, la balle, partie de l'extérieur E, se retrouve à l'extérieur après avoir franchi un nombre pair de fois la frontière de la région B au cours de son trajet.

Par le tableau ci-dessous

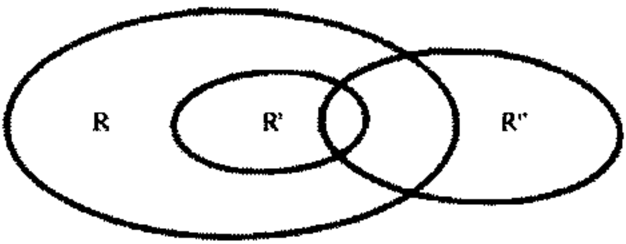
0	1	2	3	...
E	I	E	I	...



les élèves découvrent la règle suivante :

R1 : Si un trajet franchit la frontière en n points, ses deux extrémités sont dans le même état — intérieur ou extérieur à la région — si n est pair. Ils sont dans des états différents si n est impair.

On peut bien sûr appliquer cette règle à plusieurs régions R, R', R'', ...



Si on appelle "région impaire pour un trajet L", une région dont la frontière est coupée un nombre impair de fois par L, on déduit une autre règle :

R2 : Toute région impaire contient une extrémité du trajet.

Et un trajet ayant au plus deux extrémités, on conclut :

R3 : Il n'existe pas de trajet pour plus de deux régions impaires dont les intérieurs sont disjoints.

Remarque : Si les deux extrémités se rejoignent le trajet est un "circuit". Tout point d'un circuit peut être considéré comme une double extrémité. Les deux extrémités confondues se trouvent par le fait dans le même état pour chaque région. D'où :

R4 : Si le trajet est un circuit, toutes les régions sont paires pour lui.

Territoires, portes et trajet complet

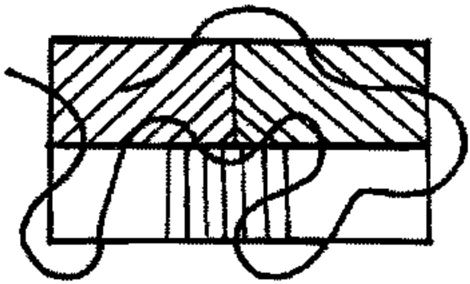
Appelons "territoires" des portions de plan limitées par des polygones non croisés, "portes" les côtés de ces polygones et "trajet complet" pour un territoire T une ligne continue qui traverse une fois et une seule chaque porte de T. Cette ligne peut être considérée comme la trajectoire d'un point M, qui ne peut s'arrêter sur une porte (situation binaire : intérieur - extérieur).

S'il y a n portes un trajet complet pour T aura n points d'intersection avec la frontière de T. Les territoires étant des régions, on peut appliquer les règles précédentes, on obtient :

R'2: Tout territoire impair contient une extrémité du trajet complet pour lui.

R'3: Il n'existe pas de trajet complet pour plus de deux territoires impairs dont les intérieurs sont disjoints.

Le deuxième problème évoqué au début consiste à trouver un trajet complet pour cinq territoires dont trois (hachurés) sont impairs. D'après *R'3* ce problème est impossible (sans solution).



Région-point et graphes continus

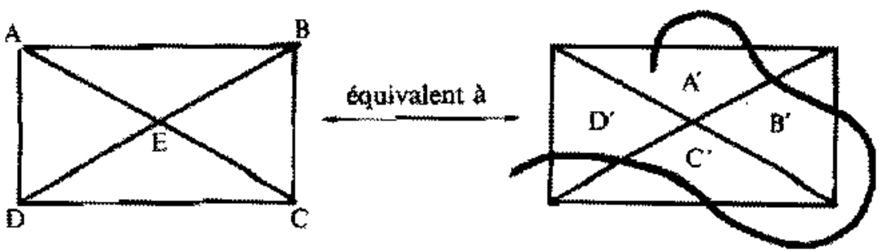
Les régions peuvent se réduire à des points, alors "régions-points" et trajet forment des "graphes" particuliers ayant sommet et arcs ; on les appelera "graphes continus" (En réalité ce sont des "multigraphes").

R2 et *R3* deviennent :

R"2: Un sommet impair contient une extrémité du trajet.

R"3: Il n'existe pas de graphe continu ayant plus de deux sommets impairs.

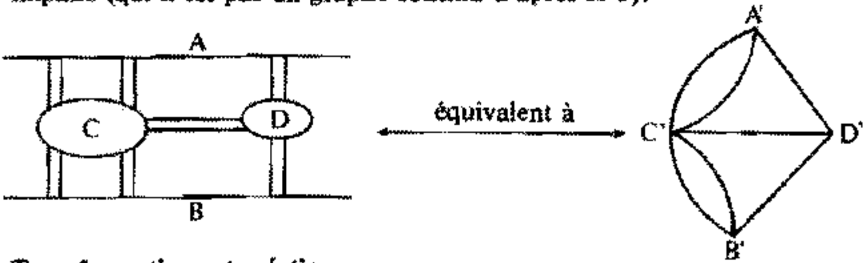
Le premier problème évoqué consiste à trouver un trajet pour cinq points dont quatre sont impairs. D'après *R"3* c'est impossible.



Problème des ponts de Kœnigsberg (*)

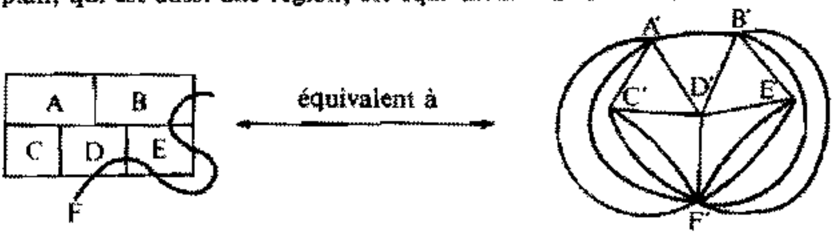
Il s'agit de trouver un trajet passant une fois et une seule par chaque pont reliant de petites îles et les rives du fleuve Pregel (**) qui traverse la ville de Kœnigsberg. (Euler démontra que le problème était impossible).

A, B, C, D sont quatre régions qui seraient toutes impaires pour un trajet-solution. Donc, il n'y a pas de solution. Les élèves s'aperçoivent qu'ils peuvent réduire ces régions à des points en conservant les contraintes des communications. Ils obtiennent alors un graphe avec quatre points impairs (qui n'est pas un graphe continu d'après *R°3*).

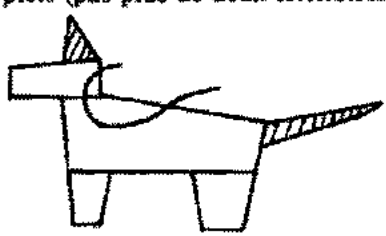


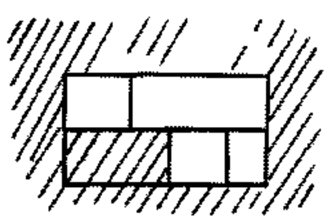
Transformations et créations

Les élèves cherchent à appliquer l'équivalence des problèmes de régions et des problèmes de graphes, en utilisant l'idée que le "reste" du plan, qui est aussi une région, est équivalent à un sommet.



Ils imaginent aussi des ensembles de territoires pour des trajets complets (pas plus de deux territoires impairs - hachurés).





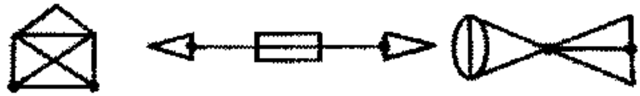
ou des figures à tracer sans lever le crayon et sans superposition. Il suffit que les figures aient plus de deux points impairs pour que ce soit impossible. Ils émettent la conjecture que le problème est toujours possible pour des figures n'ayant pas plus de deux points impairs (gros points) et que les éléments impairs sont toujours en nombre pair.

(*) l'actuelle Kaliningrad

(**) aujourd'hui Prégolia

Impossible

Possible



Conclusion

Cette étude naïve se révèle pédagogiquement positive par l'intérêt éveillé dans les jeunes esprits, les notions dégagées et les transformations qui n'altèrent pas le problème, pour aboutir à la solution et à la phase créative finale. C'est une récréation mathématique qui leur fait découvrir l'importance de la parité.

II - Etude "graphique"

Hors du cadre du premier cycle on peut entreprendre une étude qui utilise les résultats de la théorie des graphes sur les notions précédentes (sommet impair, graphe continu...)

Lemme des changements d'états binaires

Etant donné un ensemble de n éléments dans la même situation binaire $\{E_1,E_2\}$, le nombre n_1 (variable) d'éléments se trouvant dans l'état E_1 et le nombre n_2 (variable) d'éléments se trouvant dans E_2, ne changent pas de parité s'il y a un nombre pair de changements d'état.

En effet tout changement d'état d'un élément change à la fois la parité de n_1 et celle de n_2 (adjonction d'une unité pour l'un, diminution d'une unité pour l'autre). Donc deux changements d'états ne changent pas la parité de n_1 et de n_2 .

On en déduit le résultat :

R1 : Un nombre pair de changements d'état conserve les parités de n_1 et de n_2, un nombre impair de changements modifie les parités de ces nombres.

Corollaire 1

Soit un graphe de n sommets dont n_1 sont impairs et n_2 sont pairs. n_1 est pair et n_2 a la parité de n .

En effet si on enlève un arc au graphe, les "parités" des deux sommets correspondants changent.

Il y a ainsi un nombre pair de changements d'état (2). En continuant cette opération (enlever un arc) qui conserve la parité de n_1 , on aboutit à un graphe n'ayant qu'un seul arc dont les deux sommets sont impairs. Ainsi le nombre n_1 de sommets impair est pair.

De n_1 pair et de $n = n_1 + n_2$, on déduit que n_2 a même parité que n.

Ainsi, dans une assemblée, le nombre de personne ayant échangé un nombre impair de poignées de main, est pair.

Chemin continu

On appelera "chemin continu" la trajectoire L sans superposition d'un point mobile M qui ne peut s'arrêter sur une frontière.

Toute région est alors dans une situation binaire pour L, elle est dite "paire" si la frontière a un nombre pair de points communs avec L; elle est dite "impaire" dans le cas contraire.

De même le point M est dans une situation binaire pour une région R (intérieur, extérieur).

Pour la région-point on peut convenir qu'il n'y a qu'un point intérieur à la frontière.

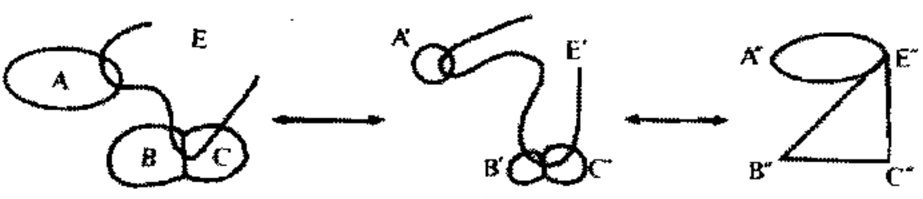
Propriété des régions impaires

R2 : Toute région impaire pour un chemin continu L contient une extrémité et une seule de L (L a nécessairement deux extrémités distinctes).

En effet tout franchissement de frontière change l'état de M dans la situation binaire $\{M \in R\ ;\ M \notin R\}$. Un nombre impair de franchissements impose que les deux extrémités soient dans des états différents, l'un intérieur, l'autre extérieur. L ne peut être un circuit.

Equivalence topologique

Topologiquement on peut réduire des régions disjointes (dont les intérieurs sont disjoints) à des points distincts, et la partie E de l'espace extérieure à toutes les régions à un point particulier.



Entre B'' et C'' il n'y a pas de "déchirure" puisque l'arc B''C'' n'est pas dans l'espace E''.

Un ensemble de régions disjointes associées à un chemin continu est topologiquement équivalent à un graphe continu.

On conviendra que le graphe vide (sans sommets) est un graphe continu.

Propriété des chemins continus

Tout chemin continu l'est au plus pour deux régions disjointes impaires (il n'existe pas de chemin continu pour plus de deux régions disjointes impaires).

S'il y avait plus de deux régions disjointes impaires, chacune — d'après *R2* — ayant une extrémité du chemin continu, celui-ci aurait plus de deux extrémités.

Propriété des graphes continus

R'3 : Tout graphe continu a zéro ou deux sommets impairs.

Un sommet étant une région-point, il ne peut y en avoir plus de deux d'après *R'3*. Et d'après le corollaire 1, le nombre de sommets impairs est pair.

Remarque

R4 : Si un chemin continu est un circuit toutes les régions ou sommets de graphe sont paires pour lui.

(même démonstration que celle de la remarque page 815).

Conjecture sur les graphes continus

Pour qu'un graphe soit continu il suffit qu'il ait zéro ou deux points impairs.

On peut essayer (de multiples façons) de démontrer la proposition de cette conjecture. Voici un essai (il serait intéressant d'en voir d'autres).

Circuit ajouté pour un graphe

Définition : Un circuit C est dit "ajouté" pour un graphe G, s'il est ajouté sans superposition d'arc à partir d'un point quelconque A de G. A étant un sommet ou un point d'arc de G.

Notation : G = g + C

Propriété des circuits ajoutés

1) L'adjonction d'un circuit ajouté C à un graphe G ne change pas la parité des points communs de C et G.

2) Si C est un circuit ajouté à un graphe continu G, le nouveau graphe G' obtenu est aussi continu.

1° Si C coupe G en un sommet, il ajoute deux arcs à ce sommet. S'il le coupe en un point qui n'est pas un sommet il le transforme en sommet ayant quatre arcs. Dans les deux cas, la parité de chaque point commun n'est pas changée (donc tous les points de G conservent leur parité).

2° Si un point M peut décrire un chemin continu L pour G, lorsqu'il atteint le point commun A, il peut décrire C, et de retour en A, achever de décrire L (il n'y a pas de superposition d'après la définition des circuits ajoutés) .

Graphe réduit d'un graphe G

C'est un graphe g_n obtenu par le processus suivant :

1) On supprime un circuit C_1 de G et on prend le graphe restant g_1. Si C et g_1 sont non connexes, on considère comme sommet de g_1 un point A_1 de C_1.

2) On applique encore cet algorithme à g_1, puis aux graphes successifs obtenus, jusqu'à la suppression du dernier circuit C_n.

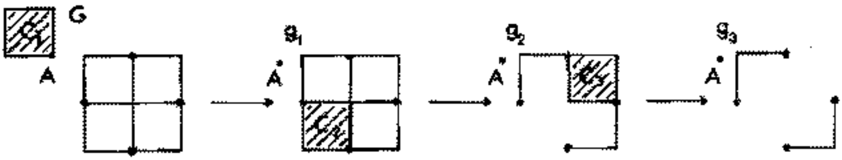
On a donc $G = g_1 + C_1$; $g_1 = g_2 + C_2$ ...

$$g_{n-1} = g_n + C_n$$

Il résulte de ce processus que pour tout i, C_i est un circuit ajouté pour g_i (au moins un point commun A_i et pas de superposition).

R5 : Ainsi on passe d'un graphe réduit de G, à G par une série de circuit ajoutés, la parité des sommets étant conservée.

Exemple G : Graphe non connexe avec quatre points impairs



Théorème

T1 : Pour qu'un graphe soit continu il faut et il suffit qu'il ait zéro ou deux sommets impairs.

D'après *R'3* la condition est nécessaire (de même est nécessaire la condition de connexité) montrons qu'elle est suffisante (conjecture des graphes continus).

Supposons que G ait zéro ou deux sommets impairs, un graphe réduit g aura aussi zéro ou deux sommets impairs (*R5*). Ce graphe g sans circuit ne peut être que le graphe nul ou un graphe n'ayant que deux sommets impairs : ce ne peut être alors qu'une ligne à deux extrémités. Dans les deux cas g est continu, donc G est continu (2ᵉ propriété des circuits ajoutés) .

Conjecture chromatique

Tout graphe continu est 3-chromatique

La réciproque n'est pas vraie d'après le contre-exemple suivant (quatre sommets impairs).