La relativité en seconde

par P. GUELFI, Lycée Marie de Champagne, Troyes

L'expérience pédagogique qui va être décrite ici consiste, à la fin du nouveau programme de mathématiques de seconde, à en appliquer plusieurs aspects à un problème qui, tout en stimulant l'imagination, ne se laisse pas aborder de façon efficace par la seule intuition.

Ce travail a été fait avec une classe très hétérogène, comme la majorité des nouvelles secondes. Sur 32 élèves ayant assisté aux cours, 8 iront en Première S et 7 ne feront plus de mathématiques. On peut dire d'autre part que 12 élèves ont suivi avec intérêt le cours sur la relativité, ceci pour situer quantitativement les limites et la portée de cette tentative qui s'est déroulée sur 3 semaines et que je vais essayer maintenant de décrire avec suffisamment de détails.

On étudie uniquement l'aspect cinématique de la théorie de la relativité restreinte, c'est-à-dire que l'on dispose de deux repères r_1 et r_2 orthonormés de l'espace (fig. 1) à 3 dimensions, que l'origine o_2 de r_2 se déplace dans un mouvement de translation uniforme de vitesse v par rapport à r_1 suivant l'axe commun des abscisses de r_1 et r_2, et que les deux autres axes de r_2 restent parallèles à leurs homologues de r_1.

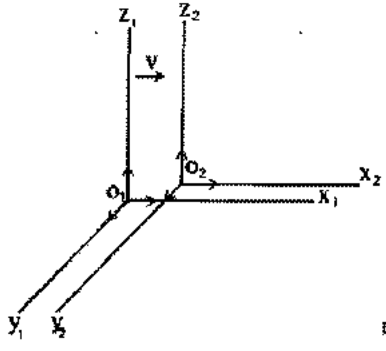

Fig. 1

D'autre part, les mouvements que l'on considère dans ces repères sont eux aussi de translation uniforme, ce qui permet de calculer les vitesses en divisant une distance parcourue par la durée du trajet, autrement dit de ne pas faire intervenir la notion de vitesse instantanée. Le fait que l'on se limite au côté cinématique de la théorie signifie que les objets en mouvement n'ont ici pas de masse, ceci évidemment n'empêche pas de choisir des exemples parlants comme les trains, les électrons, les galaxies ou les satellites.

Parties du programme utilisées

— Géométrie dans l'espace : repères cartésiens, coordonnées d'un point, calculs de distances.
— Système d'équations : changement de repères, expression analytique d'applications linéaires.
— Racines carrées, puissances de 10, erreurs et incertitudes.
— Comportement local des fonctions $\frac{1}{1+x}$ et $\sqrt{1+x}$ en O (approximation affine).
— Utilisation de la calculette.
— Recherche d'extréma notamment : un produit de 2 nombres positifs de somme donnée est maximal s'ils sont égaux.

Contenu du cours

I. Introduction

Je pense qu'il y a intérêt à présenter l'invariance de la vitesse de la lumière comme une donnée expérimentale immédiate sous la forme suivante :

S'il semble raisonnable de dire qu'un marcheur se déplaçant dans un train à 4 km/h dans le sens du train (ayant lui-même par rapport aux rails une vitesse de 100 km/h) a, par rapport aux rails, une vitesse de 104 km/h, l'expérience montre que si l'on remplace le marcheur par l'extrémité d'un rayon lumineux se déplaçant à 3.10^5 km/s dans le train, alors les vitesses ne s'ajoutent pas et l'extrémité du rayon lumineux se déplace, par rapport aux rails, avec une vitesse de $c = 3.10^5$ km/s et non 300 000,028 km/s comme on pourrait le penser. Il est amusant, à ce sujet, de constater que ceci est admis parfaitement par des élèves qui sont prêts à mettre votre parole en doute si vous affirmez que la vitesse de la chute d'un corps dans le vide est indépendante de sa masse ! Ceci tient à ce que le fait que la lumière se déplace n'est pas ressenti. Il faut donc insister sur le caractère choquant de l'invariance de c par rapport à un observateur quel que soit son mouvement par rapport à la source lumineuse.

II. La transformation de Galilée

Appelons R_1 et R_2 deux repères de "l'espace" des événements (ponctuels). Il faut, pour identifier un événement, connaître son abscisse x, son ordonnée y, sa cote z, et sa date t ; les événements auront donc 4 coordonnées, les repères d'espace r_1 et r_2, sous-jacents à R_1 et R_2, se déplacent comme annoncé plus haut. On justifie alors facilement la transformation de Galilée qui donne les coordonnées d'un événement dans R_2 en fonction de celles qu'il a dans R_1.

Posant $E(x_1, y_1, z_1, t_1)_{R_1}$ et $E(x_2, y_2, z_2, t_2)_{R_2}$, on a $x_2 = x_1 - vt_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$, $t_2 = t_1$ (hypothèse de Newton).

III. Principe de la relativité restreinte

"Les lois de la physique sont les mêmes dans un repère que dans tout autre en translation uniforme par rapport au premier".

Cela signifie qu'un physicien enfermé dans un train en translation uniforme, rideaux tirés, sera incapable de concevoir une expérience lui permettant de décider si son train bouge ou non par rapport aux rails !

IV. Loi d'addition des vitesses

Un point mobile se déplace en ligne droite dans r_1 à vitesse constante v_1 suivant l'axe o_1x_1, alors son mouvement est aussi de translation uniforme par rapport à r_2 (c'est une conséquence du principe de la relativité restreinte).

Sa présence à l'instant t_1 au point de coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans r_1 est l'événement $E(x_1, y_1, z_1, t_1)_{R_1}$; de même à l'instant $t'_1 \neq t_1$ il passe au point de coordonnées (x'_1, y'_1, z'_1) dans r_1 ; c'est l'événement

$$E'(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)_{R_1}.$$

Notons encore $E(x_2, y_2, z_2, t_2)_{R_2}$ et $E'(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)_{R_2}$, alors

$$v_1 = \frac{x'_1 - x_1}{t'_1 - t_1}$$

et si v_2 est la vitesse de notre point mesurée dans R_2,

$$v_2 = \frac{x'_2 - x_2}{t'_2 - t_2}$$

et la transformation de Galilée montre que $v_2 = v_1 - v$ ou $\boxed{v_1 = v_2 + v}$, loi galiléenne d'addition des vitesses.

V. Le problème expérimental de la vitesse de la lumière

Si la formule encadrée du § IV rend bien compte de l'expérience du marcheur dans le train, elle ne convient plus pour l'extrémité d'un rayon lumineux se propageant dans le même train car, si $v_2 = c$, on a vu que $v_1 = c$ et non $c + v$. Ceci contredit donc la transformation de Galilée dont la formule du § IV est une conséquence. On peut énoncer à ce stade la loi relativiste de composition des vitesses que l'on démontrera plus tard :

$$\boxed{v_1 = \frac{v_2 + v}{1 + \frac{v_2 v}{c^2}}}$$

et vérifier qu'elle ne contredit pas l'expérience du rayon lumineux et que si elle contredit les 104 km/h du marcheur, la différence est très faible, de l'ordre de $\frac{1}{3}.10^{-13}$ km/h.

VI. La transformation de Lorentz

On cherche la nouvelle transformation

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) \xrightarrow{L} (x_2, y_2, z_2, t_2)$$

de l'espace des événements qui respecte à la fois l'invariance de c et le principe de relativité et *on cherche parmi les applications linéaires* parce que ce sont les plus simples et que c'est déjà assez compliqué comme ça (en fait c'est une conséquence du principe de relativité mais la démonstration est délicate).

L'idée de ce cours étant d'arriver le plus vite possible à la découverte de L, j'ai choisi de suivre ici l'exposé d'Einstein que l'on trouvera p. 129 à 132 de [1]. Ceci a été fait en 1h30 de T.D. sous la forme d'une feuille de questions que je reproduis ici :

A - Position du problème

§ 1 - En considérant un signal lumineux dans R_1 et R_2, dire pourquoi on a

$$x_1 = ct_1 \implies x_2 = ct_2$$
$$x_1 = -ct_1 \implies x_2 = -ct_2$$

§ 2 - Montrer que si l'on a, quels que soient x_1 et t_1

$$(L) \quad \left| \begin{array}{l} x_2 - ct_2 = r(x_1 - ct_1) \\ x_2 + ct_2 = s(x_1 + ct_1) \end{array} \right.$$

alors les implications du § 1 seront satisfaites.

Quelles sont les dimensions des constantes r et s ?

§ 3 - Posons $a = \frac{r+s}{2}$ et $b = \frac{s-r}{2}$. Montrer que le système (L) s'écrit

$$(L) \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = ax_1 + bct_1 \\ ct_2 = bx_1 + act_1 \end{array} \right.$$

B - On cherche maintenant a et b en fonction de v

§ 1 - En exprimant dans (L) que o_2 a la vitesse v dans R_1, montrer que $v = -\frac{bc}{a}$.

§ 2 - Justifier l'affirmation suivante :

"Une règle immobile dans R_2 et de longueur ℓ dans R_2 doit avoir, pour un observateur de R_1, la même longueur qu'une règle de longueur ℓ dans R_1, immobile dans R_1 pour un observateur de R_2".

§ 3 - Soit U_2 et U'_2 les abscisses dans R_2 (fig. 2) des extrémités de la première règle du § 2 et U_1, U'_1 leurs abscisses dans R_1. Soit de même X_1 et X'_1 les abscisses des extrémités de la seconde règle du § 2 dans R_1 et X_2 et X'_2 leurs abscisses dans R_2 (fig. 3).

Montrer que $X'_2 - X_2 = U'_1 - U_1$.

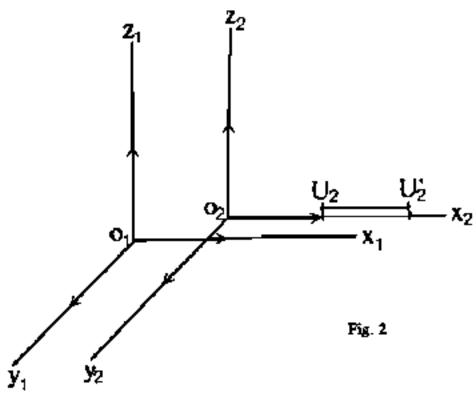

Fig. 2

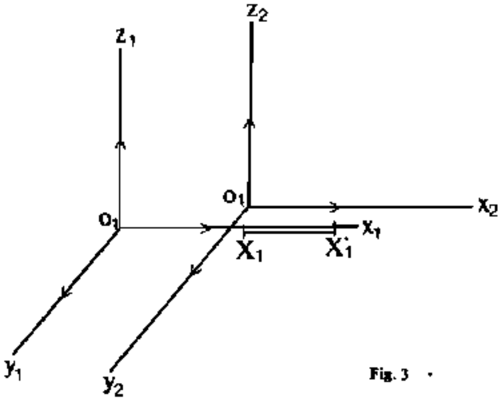

Fig. 3

§ 4 - On va maintenant calculer, en fonction de a et b, les longueurs $U'_1 - U_1$ et $X'_2 - X_2$.

a) Pour $U'_1 - U_1$, on réalise un instantané dans R_1, c'est-à-dire $t_1 = 0$, donc quel que soit x_1 , (L) donne $x_2 = ax_1$. Montrer que

$$U'_1 - U_1 = \frac{\ell}{a}$$

b) Pour $X'_2 - X_2$ on réalise un instantané dans R_2, $t_2 = 0$, (L) dit alors que $t_1 = -\frac{b}{ac}x_1$. Montrer que

$$X'_2 - X_2 = \ell\left(a - \frac{b^2}{a}\right).$$

§ 5 - Montrer, en utilisant B, § 1, 3 et 4, que les constantes a et b doivent vérifier le système S

$$S \quad \left| \begin{array}{l} v = -\frac{bc}{a}, \quad a > 0 \\ 1 = a^2 - b^2 \end{array} \right.$$

§ 6 - Résoudre S et remarquer que $S \Rightarrow v < c$.

§ 7 - Ecrire la transformation

$$L \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = z_1 \\ t_2 = \dfrac{t_1 - \dfrac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

VII. Loi relativiste de composition des vitesses

On refait le calcul du IV avec cette fois la transformation L et on trouve facilement la formule annoncée au V.

VIII. Problèmes d'approximation relativiste

Théorème 1 : Si $v_2 + v \geqslant 0$ et $2|v_2|v \leqslant c^2$ alors on fait, en remplaçant v_1 par $(v_2 + v)(1 - \frac{v_2 v}{c^2})$, une erreur par excès moindre que

$$2(v_2 + v)\ \frac{v_2^2\, v^2}{c^4}\ .$$

Il suffit ici d'appliquer le théorème d'approximation locale en 0 de $x \to \frac{1}{1+x}$ avec $x = \frac{v_2 v}{c^2}$.

Exemple : Si $v = 2.10^5$ km/s et $v_2 = 10^5$ km/s (situation que l'on peut rencontrer lors de l'émission d'une particule par un électron accéléré) on trouve $2v_2v = 4.10^{10}\ \text{km}^2/\text{s}^2 < 9.10^{10}\ \text{km}^2/\text{s}^2 = c^2$ et $v_1 \approx \frac{7}{3}.10^5$ km/s avec une erreur plus petite que 3.10^4 km/s. Cet exemple montre les limites du théorème *1*.

Supposons maintenant que le mouvement du mobile dans R_2 se fait dans le même sens que le mouvement de r_2 par rapport à r_1, autrement dit $v_2 > 0$. Un observateur de R_2 mesure la vitesse d'un mobile dans R_2, il trouve v_2, il connaît aussi v ; s'il croit à la théorie de Galilée, il pensera qu'un observateur de R_1, mesurant le phénomène, lui trouvera la vitesse $v_{1gal} = v_2 + v$. S'il croit à la relativité, il pensera que le même observateur de R_1 trouvera par sa mesure (i.e. avec les horloges et les règles de R_1)

$$v_{1rel} = \frac{v_2 + v}{1 + \frac{v_2 v}{c^2}}.$$

On a alors le

Théorème 2 : $v_{1gal} - v_{1rel} > 0$ et si $2v_2v \leqslant c^2$ on fait, en remplaçant $v_{1gal} - v_{1rel}$ par $(v_2 + v)\frac{v_2 v}{c^2}$, une erreur par excès moindre que

$$2(v_2 + v)\ \frac{v_2^2 v^2}{c^4}.$$

Une question naturelle se pose alors :

inventer une expérience pour laquelle $v_{1gal} - v_{1rel}$ soit maximal si $v_2 + v$ est donnée, limitée par exemple par les moyens dont dispose l'expérimentateur. Autrement dit, comment répartir la somme $v_2 + v$ dans v_2 et v pour que v_{1rel} soit le plus possible plus petite que la valeur v_{1gal} suggérée par l'intuition ?

Le théorème *2* joint au théorème sur le maximum d'un produit peut faire penser qu'il faut choisir $v_2 = v$ (i.e. faire courir le marcheur dans le train à la même vitesse que le train dans le repère des rails R_1). Le théorème *2* étant seulement un théorème d'approximation, il faut prendre des précautions et reprendre la formule exacte :

$$v_{1gal} - v_{1rel} = (v_2 + v)\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{v_2 v}{c^2}}\right)$$

pour voir qu'effectivement "$v_2 = v$" rend $v_{1gal} - v_{1rel}$ maximal et égal à

$$\frac{2v^3}{c^2 + v^2}.$$

Exemple : Si $v_2 + v = 200$ km/h, on trouve qu'il faut faire se déplacer le train à 100 km/h et le mobile aussi et qu'alors

$$v_{1gal} - v_{1rel} = \frac{200}{1 + 116{,}64.10^{10}}\ \text{km/h} ;$$

cet exemple présente une difficulté supplémentaire du fait que la calculette ne peut faire la somme $1 + 116{,}64.10^{10}$!

Ceci n'est pas grave car une telle précision n'aurait aucun sens étant donné celle avec laquelle c elle-même est connue (de l'ordre du mètre par seconde). Dans ces conditions on utilise le théorème *2* qui, avec $v_2 = v$, donne $v_{1gal} - v_{1rel} = \frac{2v^3}{c^2}$ et l'erreur est plus petite que $\frac{4v^5}{c^4}$, ce qui donne ici $v_{1gal} - v_{1rel} \simeq 1{,}7.10^{-12}$ km/h avec une erreur moindre que 3.10^{-22} km/h. On peut remarquer que, quoique très petite, $v_{1gal} - v_{1rel}$ est 50 fois plus grande dans ce cas que lorsqu'on avait $v_2 = 4$ km/h. Et si $v + v_2 = 104$ km/h, on aurait trouvé 3,6 fois plus avec $v = v_2 = 52$ km/h.

IX. Modifications à introduire dans notre représentation de la réalité

On peut suivre ici [2] p. 27 à 33.

A. La notion de longueur est relative au repère.

Une règle attachée à R_1, parallèle à o_1x_1, de longueur Dx_1 aura, si elle est mesurée par un observateur de R_2, la longueur $Dx_2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, Dx_1$ (contraction de Lorentz) ; ceci se voit facilement en appliquant la transformation L aux extrémités de la règle à un instant donné dans R_2, par exemple $t_2 = 0$. Les exemples ici peuvent s'appuyer sur le

Théorème 3 : On fait, en remplaçant Dx_2 par $Dx_1(1 - \frac{v^2}{2c^2})$, une erreur par excès moindre que $\frac{v^4}{2c^4} Dx_1$ mais supérieure à $\frac{v^4}{12c^4} Dx_1$.

Ceci se voit simplement en appliquant le théorème d'approximation locale de $x \to \sqrt{1+x}$ avec $x = -\frac{v^2}{c^2}$ et en se souvenant que $|v| < c$, ce qui découle immédiatement du VI (B § 6). On a aussi le

Théorème 4 : $Dx_2 \leqslant Dx_1$ (contraction) et on fait, en remplaçant $Dx_1 - Dx_2$ par $Dx_1 \frac{v^2}{2c^2}$, une erreur par excès moindre que $\frac{v^4}{2c^4} Dx_1$ et supérieure à $\frac{v^4}{12c^4} Dx_1$.

On peut remarquer ici que $Dx_1 - Dx_2$ est une mesure de l'écart entre la réalité et l'intuition ; en obéissant au même mobile qu'au VIII, on cherchera à rendre $Dx_1 - Dx_2$ maximal, ce qui s'obtient bien sûr lorsque v "tend" vers c. On voit alors que $Dx_2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, Dx_1$ se rapproche de 0 et le théorème *4* dit que $Dx_1 - Dx_2$ est de l'ordre de $\frac{Dx_1}{2}$ avec une erreur par excès inférieure à $\frac{Dx_1}{2}$; ce qui est cohérent, l'erreur étant d'autant plus proche de $\frac{Dx_1}{2}$ que v est proche de c.

Autrement dit, on peut raccourcir une règle autant qu'on veut en la mesurant à partir d'un repère R_2 pourvu que l'on puisse rendre v aussi proche que l'on veut de c.

B. La notion de simultanéité elle-même est relative.

Supposons que deux événements $E(x_1, y_1, z_1, t_1)_{R_1}$ et $E'(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)_{R_1}$ soient simultanés dans R_2, $t_2 = t'_2$, ils sont alors séparés dans R_1 d'une durée $Dt_1 = \frac{v}{c^2}(x'_1 - x_1)$ ou $Dt_1 = \frac{v}{c^2} Dx_1 \neq 0$ si $x_1 \neq x'_1$.

C. La notion d'antériorité est relative.

Un exemple amusant est celui des événements suivants :
E : arrivée de la tête d'un train au bout du quai.
E' : arrivée de la queue du même train au début du quai.

Le train et le quai ont la même longueur (plus précisément le train à l'arrêt a la même longueur que le quai).

Il est facile de voir, soit avec L, soit qualitativement avec la contraction de Lorentz, que pour un observateur du quai, E' est antérieur à E et pour un observateur du train, E est antérieur à E'.

On peut prolonger cet exemple en se demandant dans quel repère R_3 (2ème train) il faut observer E et E' pour qu'enfin ils soient simultanés comme le bon sens semble l'indiquer. La réponse est que R_3 doit aller dans le sens opposé à R_2 à la vitesse $\frac{c^2}{v}\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right)$ par rapport à R_1, c'est-à-dire, sous les hypothèses d'approximation de $\sqrt{1+x}$, environ $-v/2$ (ce dernier point peut se deviner en se disant que R_3 doit avoir une situation à peu près symétrique et intermédiaire par rapport à R_1 et R_2).

Ces résultats posent le problème de la causalité car si l'on peut changer l'ordre chronologique de deux événements suivant qu'on les observe dans un repère ou dans un autre, il est naturel de se poser la question de savoir s'il est possible de trouver un déplacement d'un observateur dans lequel il puisse voir exploser une bombe et ensuite la voir lâcher !

D. La notion de causalité est maintenue.

On a vu au B que des événements simultanés dans R_2 étaient séparés dans R_1 d'une durée $Dt_1 = \frac{v}{c^2} Dx_1$ donc $Dx_1 = \frac{c^2}{v} Dt_1 > cDt_1$ qui représente la distance que peut parcourir la lumière dans le temps Dt_1. Il est clair que E et E' sont donc séparés d'une distance spatiale plus grande que celle que peut parcourir la lumière dans le temps Dt_1. E et E' ne peuvent donc être reliés par un lien de cause à effet, aucun signal n'ayant le temps d'aller de l'un à l'autre ; c'est ceci qui autorise leur bouleversement chronologique.

X. L'invariant de Lorentz

Si $E(x_1, y_1, z_1, t_1)_{R_1}$ et $E'(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)_{R_1}$ posons

$$i_1(E, E') = c^2(t'_1 - t_1)^2 - (x'_1 - x_1)^2 - (y'_1 - y_1)^2 - (z'_1 - z_1)^2 .$$

Théorème 5 : On peut calculer $i_1(E,E')$ avec les coordonnées de E et E' dans R_2 ; on a alors

$$i_1(E,E') = i_2(E,E') = c^2(t'_2 - t_2)^2 - (x'_2 - x_2)^2 - (y'_2 - y_2)^2 - (z'_2 - z_2)^2$$

autrement dit $i_1(E,E')$ est un invariant du changement de repère, on le note donc $i(E,E')$ sans indice.

(Il suffit d'appliquer L).

Théorème 6 : $i(E,E') \geqslant 0$ signifie que E et E' peuvent avoir un lien de cause à effet.
$i(E,E') < 0$ signifie que E et E' ne peuvent pas avoir de lien de cause à effet.

C'est clair si on remarque que $i(E,E') \geqslant 0$ est équivalent à $c\,|t'_1 - t_1| \geqslant \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2 + (z'_1 - z_1)^2}$ qui est la distance spatiale dans R_1 entre E et E'.

Commentaire

Bien sûr, un exposé de ce genre exige que le professeur lui-même soit intéressé ; d'ailleurs le travail de préparation qu'il demande fait que cette condition est automatiquement réalisée.

Un avantage inattendu de ce cours a été aussi que certains élèves mal à l'aise sur le plan théorique ont pu s'exprimer à travers de nombreux exercices où les calculs numériques donnent des résultats paradoxaux (les chapitres VIII et IX sont riches en possibilités de ce genre).

Quant aux développements théoriques eux-mêmes, il serait tout à fait faux de croire que les élèves n'ont pas les possibilités d'abstraction nécessaires pour les suivre. Ce qui est vrai c'est que ces possibilités sont rarement exploitées, en partie du fait de la majorité des bons élèves qui sont très friands des calculs répétitifs où ils sont sûrs que la machine tournera bien. Ici le chapitre VI par exemple demande aux élèves une réflexion intense car il faut traduire des principes physiques dont l'énoncé ne nécessite que le langage courant § 1,2,3 en termes de contraintes sur L permettant de trouver son expression. Ceci permet alors de retourner à des énoncés en bon français au chapitre IX.

Pour ce qui concerne le côté que certains peut-être trouveront trop "physique" de ce cours, il me semble au contraire très bénéfique et le manque de rigueur par rapport à une théorie purement axiomatique (évidemment non envisageable pour le sujet traité ici) ne me semble pas supérieur, au contraire, à celui autorisé par le programme sur des sujets comme les fonctions trigonométriques ou les suites.

Je pense enfin que l'intérêt d'un cours de ce type, en dehors du fait qu'il permet de revoir de nombreuses parties du programme énumérées au début, est très général.

Il me semble en effet que ce genre de sujet devrait tendre à faire partie de la culture générale au même titre que, par exemple, la rotondité de la terre. Il est vrai cependant que la découverte en est plus ancienne que celle de la théorie de la relativité, il est vrai aussi que c'est un lieu commun de dire que la vulgarisation du domaine scientifique se fait de plus en plus vite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] La théorie de la relativité restreinte et générale, exposé élémentaire, la relativité et le problème de l'espace.
A. EINSTEIN (Gauthier Villars).

[2] Le principe de relativité.
P. LANGEVIN (Etienne Chiron).