La didactique expérimentale des mathématiques

par Georges GLAESER

Cette conférence veut être un témoignage concernant l'éclosion récente d'une nouvelle science.

I. Des élèves décevants et imprévisibles. Nous exerçons "le plus beau métier du monde" — c'est bien connu — mais sa pratique ne cesse de nous réserver des surprises. Nous intervenons dans nos classes, en faisant de notre mieux, pour *fabriquer de la compréhension dans la tête de nos élèves*. Mais l'essentiel nous échappe : nous nageons en pleine imprévisibilité.

Illustrons cela en évoquant une de ces séquences d'enseignement qu'il arrive à chacun de nous de mijoter avec conscience et minutie, en vue d'introduire quelques notions particulièrement passionnantes.

On concoctera donc une activité motivante, un exercice typique, court et facile, destiné à présenter rapidement le thème. Ensuite, on instituera un débat d'où surgira *la* liste des bonnes questions, à laquelle on opposera *les* bonnes réponses, mûrement préparées. Une synthèse claire et vivante mettra les choses au point... et à l'heure prévue, *les* élèves auront tous compris !... Voilà pour la *pédagogie-fiction*.

Le *déroulement réel de la classe* est bien plus décevant. D'abord, si on les avait laissé faire, *ils* se seraient éternisés sur l'exercice trivial du début, butant sur des difficultés auxquelles nul enseignant n'aurait pu songer auparavant. Puis *ils* sont restés muets lorsqu'on a voulu entamer le dialogue, et finalement, le "brillant" exposé qui avait été si complaisamment médité à l'avance est passé au-dessus de l'auditoire...

Bien sûr, c'est là une caricature... Mais avouez que des épisodes de ce goût-là ne sont pas rares, dans notre métier.

Nous enseignons en plein brouillard ! Nous ne disposons pas de moyens efficaces pour savoir à l'avance ce qui sera facile ou difficile. Nous ignorons presque tout sur les mécanismes qui provoquent la compréhension ou l'incompréhension.

Nous en sommes presque au même point que les médecins des siècles passés, dont les malades étaient décevants et imprévisibles. On avait beau saigner et purger les patients, ceux-ci mouraient ou guérissaient sans que l'on puisse savoir ni pourquoi, ni comment !

Un enseignant qui serait constamment attentif à ces déboires et qui comprendrait avec lucidité que ses interventions sont soit utiles soit néfastes sans qu'il sache en décider ne pourrait pas y survivre. Il s'en tire en se créant un *bon sens pédagogique* (on dit aussi qu'il acquiert de l'expérience) et il se forge un jeu d'"explications" (qui d'ailleurs n'expliquent rien) basées sur des idées reçues.

"Comment se fait-il que mes élèves n'aient pas tous compris mes explications, pourtant si claires, sur un sujet aussi facile ?"

"C'est de leur faute ! Ils sont nuls ! Ils ne travaillent pas ! Ils n'ont aucune curiosité ! Ils sont désavantagés par leur milieu familial et socio-culturel ! On ne leur a rien appris dans les classes antérieures ! On a beau rabâcher, ils ne retiennent rien ! D'ailleurs les programmes sont dingues ! On n'a pas le temps ! Etc. etc, etc".

II. **L'innovation.** Une autre issue s'appuie sur une critique des pratiques usuelles, basées sur le bon sens.

On trouve des enseignants-pionniers qui remettent leurs méthodes en cause, et essaient de mettre en œuvre de nouvelles façons d'enseigner. Nous les appellerons des *innovateurs*. Leur tradition a acquis depuis longtemps des lettres de noblesse, auxquelles se rattachent les noms de Henri Pestalozzi, Maria Montessori, Ovide Decroly, Célestin Freinet, Francisco Ferrer, Anton Makarenko, et bien d'autres. Plus particulièrement, parmi les innovateurs de l'enseignement des mathématiques, on peut citer Puig Adam, Emma Castelnuovo, Martin Wagenschein, Alexandre Wittenberg, Paul Cuisenaire, George Papy, Caleb Gattegno, Dienes,... et j'en passe.

On peut même dire que tous les enseignants qui font intelligemment leur métier, qui ne se bornent pas à suivre aveuglément un seul manuel scolaire, qui s'efforcent de mieux connaître leurs élèves, sont déjà des innovateurs.

Ils ont toute notre sympathie. Mais il faut distinguer scrupuleusement leurs travaux de ce qui fera l'objet de la présente conférence.

Les innovateurs ne se donnent pas les moyens de faire œuvre scientifique. Ils n'émettent *pas de conjectures susceptibles d'être réfutées.*

En fait, *l'innovation réussit toujours !* D'abord parce que l'initiateur est fortement motivé, et qu'un professeur enthousiaste enseigne mieux que celui qui délivre un enseignement de routine. Ensuite, parce que l'innovation ne s'effectue pas selon des plans très rigides. L'innovateur a généralement assez de flair pour changer de voie, selon les circonstances, dès qu'il soupçonne qu'il fait fausse route. Ainsi, à la fin de l'expérience, il ne saura jamais au juste ce qu'il a réfuté ou confirmé. Et enfin, l'innovateur n'a pas les moyens d'établir des plans d'expérience scrupuleux.

Ce que l'innovation nous apporte, c'est une anthologie de recettes intéressantes qui ont réussi dans des circonstances mal précisées, sans que l'on sache vraiment comment elles ont fonctionné. Elle nous propose une liste d'opinions pédagogiques basées sur une certaine pratique. Cela vaut bien mieux que des opinions a priori, formulées par des personnages qui ignorent les élèves, la mathématique et son enseignement. Mais les innovateurs n'apportent aucun élément de preuve, si ce n'est un succès global, obtenu dans des cas marginaux. Et ils ont bien autre chose à faire que d'administrer des vérifications.

III. **La didactique expérimentale** apparaît lorsqu'on se donne des moyens scientifiques pour trancher les débats pédagogiques. La révolution que nous tentons d'accomplir s'inspire de l'exemple des autres sciences expérimentales à leur début. En particulier, nous essayons de suivre la voie tracée par la médecine, lorsqu'à la fin du XIX^e siècle, elle a rejeté peu à peu les spéculations littéraires sur les malades et les maladies pour ne reconnaître que le verdict du laboratoire.

Mais il ne suffit pas de désirer ardemment une telle transformation pour prétendre y parvenir. Une période d'utopie est inévitable. Si, dès 1851, Antoine Cournot proclamait qu'il était possible d'expérimenter en pédagogie, ce n'est que dans les toutes dernières décennies que l'on voit se réaliser systématiquement ce projet.

Et là encore, gardons-nous d'être trop naïfs. On voit paraître de nos jours une profusion de soi-disant recherches pédagogiques, laxistes et critiquables, dont se distinguent quelques dizaines de travaux solides qui répondent avec précision à des questions bien posées.

C'est peu, direz-vous ! Mais s'il n'en existait qu'un ou deux, on pourrait déjà annoncer qu'une nouvelle science est en train de naître.

Pour porter un jugement sain, en ce domaine, il faut se garder de toute impatience.

a. Il est prématuré d'exiger que la didactique produise d'emblée la grande synthèse, la fresque sur "L'art d'enseigner tout à tous" (pour reprendre le sous-titre du chef-d'œuvre de Comenius (1632)). Là encore, l'exemple de la révolution pasteurienne nous indique la voie. Elle renonce à découvrir l'*élixir universel* qui guérira toutes les maladies. Pasteur a commencé par s'attaquer à quelques questions marginales (maladie des vers à soie ou de la bière) pour aboutir à une compréhension de la nature d'un certain type de maladies infectieuses, sans s'attarder à des discours sur la maladie en général.

C'est consciemment que la didactique expérimentale s'attaque à des problèmes très délimités qui paraissent futiles aux amateurs de grandes fresques. Pourtant, il est encourageant de constater que chaque découverte sérieuse élargit rapidemment son champ de validité et jette des lumières sur des phénomènes plus généraux.

b. Il est prématuré d'attendre des retombées immédiates de ces premières découvertes sur la pratique des salles de classe. Les didacticiens revendiquent le droit de dépenser tout le temps qu'il faudra pour élucider les mécanismes de la compréhension. Lorsque Claude Bernard découvrit la fonction glycogénique du foie, on ne constata aucun impact immédiat de ce travail sur la pratique hospitalière. Il est clair cependant que le progrès ultérieur dans la thérapeutique du foie bénéficie largement de la meilleure connaissance que nous avons aujourd'hui du fonctionnement des organes. Et la médecine expérimentale seule pouvait apporter cette connaissance.

L'enseignant, engagé sur le terrain, ne peut donc pas attendre que la didactique lui fournisse tout de suite des recettes miracles.

Cependant *il peut nous aider*. D'abord, il peut déjà s'informer (d'une façon désintéressée pour l'instant) sur le développement de la science, en participant à la critique de nos méthodes, et en nous apportant des informations sur les observations cliniques qu'il peut faire sur ses élèves. Pour cela, il doit apprendre à améliorer l'observation de sa classe. Il pourrait essayer de se tenir au courant en venant de temps en temps assister au Séminaire National de Didactique des Mathématiques, qui a lieu quatre fois par an à Paris. Là, des chercheurs viennent exposer leurs derniers travaux. Il peut aussi lire *Recherches en didactique des mathématiques*, revue émanant de ce séminaire, et aussi *Educational Studies in Mathematics*.

En second lieu, il devrait marquer sa réprobation devant les bavardages des pédagogues d'opinion, des pédagogues de ministère, qui nous abreuvent de sentences définitives sur ce qu'ils n'ont ni observé, ni expérimenté. Lorsque ces fabricants de programmes énoncent des certitudes sur la "seule façon de bien enseigner", nous devons leur demander : "Qu'en savez-vous ? Sur quoi vous basez-vous pour affirmer avec autant d'aplomb ?"

IV. Un précurseur : Alfred Binet. La didactique expérimentale des mathématiques ne s'épanouit systématiquement que depuis deux ou trois décennies. Mais, en fait, ce courant de pensée a eu une préhistoire. Je voudrais ici évoquer l'apport d'Alfred Binet (1857-1911).

Il est regrettable que son nom, accolé à celui de Simon, n'évoque guère aujourd'hui que la mise au point de la trop fameuse "Echelle métrique d'intelligence", qui aboutit à l'établissement du Q.I., instrument pseudo-scientifique très critiquable. Binet n'est pas responsable de tous les abus provoqués par ses tests, et heureusement son œuvre ne se réduit pas à cela. Je voudrais, pour illustrer mon exposé, évoquer les expériences qu'il décrit dans son ouvrage *La fatigue intellectuelle* (1898) en collaboration avec V. Henry. (Voir aussi : A. Binet. *Ecrits psychologiques et pédagogiques*, choisis par Avanzini, Privat, éditeur — Toulouse 1974).

A cette époque, le grand "tube" des discours pédagogiques n'était ni les "Maths modernes", ni la sélection. Mais on discutait ferme sur le *surmenage scolaire*. En 1886, l'Académie de Médecine organisa une série de débats sur ce thème, où chacun vint présenter des opinions toutes faites. "La durée des classes — affirmait une sommité médicale de l'époque — ne doit pas excéder vingt à trente minutes pour des enfants." D'autres proclamèrent qu'il fallait atténuer les effets de la fatigue intellectuelle, en intercalant des leçons de gymnastique entre des séances d'enseignement général. Là-dessus, le chimiste Berthelot intervint dans la presse, pour protester contre ces opinions. Il ne trouvait rien d'excessif aux horaires en vigueur.

Ces joutes oratoires scandalisaient Alfred Binet, qui déclara : "Une des affirmations vaut l'autre, ou plutôt elles ne comptent pas plus l'une que l'autre."

Et au lieu de discours, il entreprend une série d'expériences pour observer les effets de la fatigue intellectuelle. Il présente dans son livre ses propres travaux, et analyse finement diverses études effectuées à l'étranger sur le même sujet.

Les montages expérimentaux qu'il propose sont des variantes du schéma suivant : on soumet à diverses populations d'écoliers des tâches familières, mais répétées avec excès, pour provoquer une fatigue artificielle.

Par exemple, on fera faire, au cours d'une journée, une série de dictées (ou de calculs) d'une durée d'un quart d'heure répétées toutes les deux heures, et l'on comparera avec soin les performances des séances du matin avec celles de la fin de journée. On essayera de distinguer les fautes usuelles de celles qui sont spécifiquement causées par un état de fatigue. On cherchera à déterminer à partir de quel moment ces fautes caractéristiques commencent à abonder, etc.

Et puis, en variant les circonstances, on essaie de mettre à l'épreuve les "certitudes" qui furent proférées à l'Académie. En particulier, il entrecoupa des séances de dictée d'intermèdes de dessins, de récréations, de séances de repos organisés de diverses façons, et aussi de leçons de gymnastique aussi traditionnelles que possible. Il obtint alors un résultat très net, tout à fait inattendu pour lui par son ampleur, et qui allait à l'encontre de ce que le bon sens de l'époque jugeait "évident".

Le livre de Binet nous intéresse particulièrement par sa critique des méthodologies utilisées. Par exemple, l'expérimentateur aura à comparer des performances orthographiques sur des dictées faites le matin et le soir. Comment sera-t-on assuré que ces épreuves sont équivalentes ? Les différences de résultats ne sont-elles pas causées par des différences de difficultés ? Aujourd'hui, on connaît bien des précautions expérimentales qu'il convient de prendre pour éviter ce reproche.

Par exemple, on dispose depuis une cinquantaine d'années d'une liste de mots ou de phrases qui ont été étalonnés, en les dictant à des populations très variées d'écoliers. On connaît, pour cet échantillon, les fautes les plus usuelles et les pourcentages d'erreurs que l'on commet aux divers niveaux de la scolarité. Il suffit donc de *composer* des dictées, en les prélevant sur ces "Echelles Dubois-Buyse d'orthographe usuelle", pour obtenir des textes dont les difficultés soient convenablement équilibrées. Mais on pourra compléter le dispositif en partageant les populations testées en sous-populations, auxquelles les mêmes dictées auront été soumises dans des ordres différents. Cette méthode aura même l'avantage de vérifier que le choix des textes est satisfaisant en permettant de comparer les performances obtenues, sur les diverses dictées, le matin où les élèves sont censés ne pas être fatigués. Et, comme les principales fautes ont été prévues d'avance en pourcentage, on pourra étudier les déviations entre ce qu'on attendait et ce qui s'est produit effectivement.

Alfred Binet critique aussi quelques conclusions hâtives que certains expérimentateurs maladroits ont cru pouvoir tirer au sujet de l'influence de l'âge sur la fatigue :

"... si on trouve qu'après une certaine leçon le nombre de fautes dans la dictée a augmenté plus chez les jeunes élèves que chez les plus âgés, on ne peut pas en conclure que les jeunes élèves ont été plus fatigués que les autres ; la différence peut tenir simplement à ce fait que l'exercice présente plus de difficultés pour les premiers que pour les derniers ; la fatigue intellectuelle peut être la même chez les élèves jeunes et âgés, seulement cette fatigue a une influence plus forte sur un exercice difficile que sur un exercice facile. Nous insistons sur ce point parce qu'aucun auteur n'a remarqué cette cause d'erreur ; on a commis cette erreur un grand nombre de fois et on en a déduit que les élèves jeunes se fatiguent plus que les élèves plus âgés ; c'est une conclusion qui n'est pas encore prouvée."

Ces quelques allusions à l'œuvre de Binet suffisent — je pense — pour suggérer comment la démarche expérimentale peut s'appliquer à l'enseignement. Et elle illustre le fossé qui sépare l'innovation de la didactique expérimentale, les "recherches" d'un Célestin Freinet et celles d'un Alfred Binet.

L'œuvre de ce pionnier s'est perpétuée, donnant naissance à ce qu'on nomme "les sciences de l'éducation". Mais notre point de vue diffère beaucoup de ce courant de pensée, spécialement par le choix des "objets d'études". D'abord, nous étudions la didactique d'*une seule discipline*, la mathématique. Et surtout nous portons notre attention sur certains aspects particuliers de la réalité éducative. Ces aspects sont directement inspirés par une théorie dont nous allons exposer les grandes lignes.

Bien entendu, les didacticiens qui n'acceptent pas ce point de départ réalisent une œuvre peu comparable à la nôtre.

V. Le modèle de la didactique expérimentale. Pour les besoins de l'exposition, je vais être obligé d'énoncer dogmatiquement et schématiquement les principaux postulats qui nous inspirent. Ceux-ci risquent donc d'apparaître encore comme des opinions ! En fait, ils s'appuient solidement sur toute une somme de travaux expérimentaux. Mais les arguments en faveur de ces postulats nécessiteraient tout un livre pour être exposés en détail.

La thèse la plus spectaculaire affirme que la construction et le développement des connaissances et des savoir-faire mathématiques est un *processus très long*, beaucoup plus long que ce qu'on imagine généralement.

C'est particulièrement vrai pour les notions de base, qui apparaissent les plus fondamentales. Ce n'est pas en quelques heures, mais sur *plusieurs dizaines d'années* que s'étale l'acquisition de la notion de fraction, de volume, de démonstration, d'équation, de paramètre, de problème, de symbole... En fait, chacun de nous dispose d'une *compréhension partielle,* souvent suffisante pour faire face aux circonstances usuelles. De temps en temps, on se heurte à des circonstances inédites et l'on s'aperçoit que l'idée qu'on se faisait était incomplète, imprécise, ou même franchement fausse. A la suite d'une *révision déchirante*, on se construit un nouveau palier de compréhension partielle qui résistera quelque temps, avant de s'effondrer à son tour.

La meilleure preuve de cette extraordinaire lenteur s'appuie sur le témoignage des professeurs qui ne comprennent vraiment certains points de mathématiques qu'au moment où ils les enseignent. Ainsi, une notion dont ils commençaient à se former une conception vague, avant l'âge scolaire, trouve encore à se préciser à l'âge adulte.

Les connaissances provisoires antérieures s'étaient pourtant révélées efficaces lorsqu'il s'agissait de se débrouiller en cours de scolarité, de réussir ou de rater des examens ! Mais lorsqu'on se trouve confronté à la tâche nouvelle d'expliquer ces subtilités à des élèves, il apparaît que des aspects importants avaient encore échappé.

Je veux aussi apporter un témoignage personnel récent :

Sous l'influence provocatrice de mon ami Georges Reeb, avocat infatigable de l'analyse non-standard, je me suis aperçu ces dernières années que je me faisais une idée fausse de ce qu'était l'ensemble des entiers naturels. J'ai donc vécu toute une vie de mathématicien (et je ne suis pas le seul) en présentant des lacunes graves de compréhension sur une partie des mathématiques dont l'apprentissage a commencé vers quatre ou cinq ans.

Je sais bien qu'il y a de rares individus de génie qui comprennent beaucoup plus vite que nous. Mais je détiens des preuves irréfutables (cf. *Recherches en didactique des mathématiques,* 1981, Vol. 2-3) que les plus grands savants vivent aussi sur des compréhensions incomplètes, et qu'ils ont mis parfois des décennies pour comprendre certains points dont les difficultés échappent aux profanes.

Cette lenteur s'explique par le mécanisme même de la compréhension qui ne s'effectue pas d'une façon continue, mais en surmontant d'une façon irréversible certaines difficultés. Parmi celles-ci, il en est qui sont occasionnelles, ne concernant que peu d'individus particuliers. Mais il est bien connu qu'un grand nombre de barrières se retrouvent chez presque tous ceux qui apprennent : ce sont les *obstacles*.

En première analyse, la compréhension semble atteinte en surmontant brusquement une difficulté, et en instituant un nouvel état stable de connaissances. Mais les recherches expérimentales ont révélé que l'"étudiant" affronte, à chaque stade, un grand nombre de mini-obstacles qui, pris isolément, peuvent sembler dérisoires. C'est leur accumulation qui crée une sérieuse barrière.

Pour illustrer ceci, je me servirai d'une métaphore de Claude Duneton, ce professeur d'anglais dans des classes de transition, qui apporte son témoignage d'enseignant dans son livre *Je suis comme une truie qui doute* (Ed. Le Seuil 1973) :

On oublie aussi que les gosses c'est comme les pots de confiture. Vous savez, ceux qui se dévissent : souvent on essaye de toutes ses forces, on se crispe, on s'écorche la paume... Le truc a l'air bloqué. Et puis tout à coup, alors qu'on capitule, une légère pression des doigts, en tournant, et le couvercle vient tout seul !

Approfondissons un peu cette comparaison. S'il n'y avait qu'un seul obstacle à l'ouverture du pot, il suffirait de réfléchir et de découvrir la manœuvre unique qui s'attaque à cette seule cause. Malheureusement, le couvercle est coincé par une profusion d'aspérités. Ici le métal est tordu, là il est rouillé. La fermeture sous vide provoque une décompression qui aggrave les frictions. Lorsqu'on s'énerve sur le truc, on détruit parfois certains de ces obstacles. Mais souvent aussi, on en crée d'autres, par exemple par des torsions énergiques dans le mauvais sens. Cependant, quelques bulles minuscules pénètrent dans le récipient, à notre insu puisque ce petit progrès n'est pas immédiatement récompensé. Mais le phénomène se reproduit et l'échauffement du récipient provoque le "miracle", qui s'accomplit au moment où on ne l'attend plus.

Un élève qui doit assimiler une notion nouvelle doit surmonter simultanément beaucoup de petits obstacles. L'intervention du maître détruit certains d'entre eux (sans qu'il soit exclu qu'il en crée de nouveaux), mais le progrès n'est pas toujours perçu, car le "couvercle ne se dévisse pas". L'élève se désole : "Je n'y comprends rien !" sans soupçonner qu'il a peut-être progressé. Il faut souvent une longue maturation, et beaucoup de progrès inconscients et inopérants, accomplis éventuellement beaucoup plus tard, pour que l'eurêka jaillisse brusquement. La récompense vient de ce que l'élève peut désormais faire face à des situations qu'il ne maîtrisait pas avant. Mais ce succès stoppe pour longtemps la recherche d'une meilleure compréhension qui n'interviendra qu'à la suite d'un nouveau conflit.

On notera que l'enseignant se trouve dans une situation analogue. S'il savait avec précision ce que ses élèves ne comprennent pas, il lui suffirait de faire un effort de clarté sur ce point. Mais lui aussi doit vaincre de nombreuses difficultés pédagogiques, sans qu'il sache exactement lesquelles. Et c'est généralement au moment où il s'y attend le moins qu'il constate que la phrase triviale qu'il vient de prononcer se montre étonnamment efficace.

Un des objectifs de notre didactique des mathématiques est de détecter les obstacles, et d'apporter la preuve expérimentale de leur existence.

En fait, nous en avons identifié beaucoup, au cours d'expériences récentes ; souvent nous ne soupçonnions pas leur importance. Inversement, on a pu prouver que l'enseignant se préoccupait de beaucoup de difficultés qu'il éprouvait personnellement sans se douter que ce n'étaient pas des obstacles pour ses élèves !

(Par exemple, l'idée d'introduire les filtres dans l'enseignement de l'analyse dans l'enseignement secondaire (cf. Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 302) répondait à des soucis d'exposition, qui gênaient les professeurs, et non à des difficultés à comprendre la notion de limite).

La didactique a d'ores et déjà balisé des domaines importants de l'apprentissage mathématique, notamment en ce qui concerne les premiers apprentissages du calcul, sur lesquels on a accumulé beaucoup d'informations, bien vérifiées.

Un autre aspect de la compréhension fait intervenir la *notion de schème* introduite par Jean Piaget.

Un schème est un système structuré d'associations d'idées (ou d'actions) qui relie les divers aspects d'un concept.

Par exemple, pour comprendre ce qu'est un parallélogramme, il ne suffit pas de connaître une définition et quatre théorèmes. Il faut se tisser un réseau de souvenirs et de réflexes, qui permettront de prendre des initiatives dans des circonstances variées. "Parallélogramme articulé, aplati, résultante, translation, symétrie, vecteurs équipollents", font partie de ce schème, ainsi qu'un jeu d'exemples et de contre-exemples. Ce n'est qu'en présence d'un tel équipement intellectuel qu'un élève peut faire intervenir un parallélogramme dans un problème.

A chaque étape, on ne dispose que d'un schème provisoire, comportant éventuellement des idées ambiguës ou même fausses. Le schème évolue en s'enrichissant d'informations nouvelles. Mais de temps en temps, lorsqu'on se heurte à des circonstances inhabituelles, le schème défectueux éclate, selon un type de bouleversement que Piaget a étudié sous le nom d'*équilibration*.

Pour compléter cette liste des principaux "objets" auxquels s'intéresse la didactique expérimentale, il faudrait signaler l'importance de la notion des *"situations didactiques"*. Ce sont des confrontations de l'élève avec un ou plusieurs "personnages" obéissant à des finalités spécifiques (tels que des questions mathématiques, un ou des enseignants, d'autres élèves, des textes, etc.). Une analyse des rapports entretenus entre ces divers intervenants est un des objectifs de nos recherches.

VI. Exemples de travaux récents. La nécessité de ne pas allonger cette conférence m'obligera à choisir des exemples qui me dispenseront de les décrire en détail. Ils sont publiés dans des revues accessibles ; le lecteur intéressé pourra donc se référer aux articles cités.

Deux travaux illustrent particulièrement l'étude contemporaine des situations didactiques :

A. Mmes Schubauer-Leoni et Perret-Clermont (Genève) ont montré comment s'accélère la compréhension de la notion de volume (chez des enfants de 7-8 ans), lorsqu'on "organise" des conflits entre des élèves de niveaux différents. Elles proposent une tâche de partage équitable d'orangeade, entre des élèves disposant de verres de formes (et surtout de sections) variées. Les expérimentateurs ont constaté des progrès rapides chez les élèves qui n'avaient pas franchi le stade de la "conservation du volume", sans que les sujets plus avancés subissent la moindre régression (cf. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 1-3 (1980)).

B. Nicolas Balacheff (Grenoble) a réalisé toute une série de belles expériences, qui illustrent la génèse de l'idée de preuve chez les élèves de 6^{e} (resp. 4^{e}). Il fallait dissocier la démonstration rituelle, exigée par le professeur et les programmes (et dont la nécessité n'est pas toujours comprise), de la preuve administrée pour convaincre un interlocuteur. L'expérimentateur a créé des situations didactiques originales, qui conduisent les élèves étudiés à échanger par écrit des arguments avec d'autres camarades. (Pré-publication, que l'on peut se procurer à l'IREM de Grenoble)

C. Aline Robert (Paris VI) a publié dans le n° 330 du Bulletin de l'A.P.M.E.P. des travaux "sur l'acquisition du concept de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur" (cf. aussi les travaux de Bernard Cornu, à Grenoble).

La notion de suite commence à s'acquérir très tôt (parfois même vers 8-9 ans) ; en tout cas, une préparation débute bien avant qu'on y fasse allusion en classe. Et l'élève aborde cette étude avec une imagerie spontanée, avec des ébauches de schèmes. On se rendra compte de la complexité de la notion en se reportant à un de mes articles, paru dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 302.

Aline Robert se propose d'étudier ce que sont devenues ces représentations plus ou moins spontanées chez des étudiants déjà bacheliers. Elle leur soumet un questionnaire dont les premières questions sont :

1. Si vous aviez à expliquer ce qu'est une suite convergente à un élève de 14-15 ans, que diriez-vous et quels dessins feriez-vous ?
2. Comment modifieriez-vous vos explications si l'élève est plus jeune ?

Grâce à ce questionnement astucieux, elle évite de ne récolter que les définitions apprises par cœur et oblige celui qui répond à formuler une explication personnelle. Dans les 1380 copies émanant d'étudiants de faculté (du DEUG à la maîtrise) et de diverses classes préparatoires, elle obtient des informations sur les associations d'idées que suscite le mot "convergence".

En particulier, elle voit émerger chez les plus jeunes l'image prépondérante de la *suite monotone décroissante.* C'est une représentation trop restrictive, mais provisoirement efficace. (Et comme les exemples généralement proposés à titre d'exercices répondent souvent à cette image, elle permet d'obtenir des résultats exacts à un examen ou une interrogation.)

Le travail étudie aussi la persistance de ces images. En fait, elles disparaissent à peu près des copies des étudiants de 4e année. Il est dommage que l'expérimentatrice ne puisse pas en tirer de conclusion théorique.

En effet, la disparition de ces modèles en fin d'études peut être interprétée de deux façons.

Ou bien (et c'est la conception génétique) la mise en place de la notion correcte de suite convergente exige plusieurs années de maturation.

Ou bien (et c'est le point de vue traditionnel) il existe des élèves "doués" qui comprennent tout cela du premier coup, et les autres étudiants sont éliminés peu à peu, par échec aux examens successifs. En 4e année ne resteraient que ces étudiants plus doués.

Cependant, il est possible de monter un dispositif expérimental qui éliminerait ce risque d'artefact et permettrait de trancher entre ces deux interprétations possibles.

VII. **Obstacles paramathématiques.** Pour terminer, je voudrais signaler que de nombreux obstacles ne tiennent pas au contenu mathématique lui-même.

Par exemple, à côté des difficultés du *langage technique des mathématiques*, on rencontre beaucoup de difficultés liées au *langage technique de l'enseignement des mathématiques*. Des mots comme "comparer, prouver, conclure, déduire, problème, solution, symbole, rigoureux, etc.", qui ne sont pas définis dans les traités, sont souvent compris de façons diverses par des élèves. Ce sont là des aspérités qui empêchent de "dévisser bien des couvercles".

De même, l'habitude de réagir devant une contradiction, et à revenir en arrière pour mettre en cause ce que l'on a formulé précédemment, est une aptitude fondamentale que nos élèves acquièrent lentement. Citons aussi la capacité de juger soi-même de la correction d'un raisonnement, sans avoir à se référer à l'autorité de l'enseignant, autrement dit l'auto-correction et l'auto-évaluation, qui se développent peu à peu chez nos élèves. Tous ces phénomènes, qui se situent *autour* des mathématiques, ont été étudiés récemment d'une manière expérimentale.

Mais, bien entendu, cette conférence ne pouvant être qu'un bref survol de ce qu'on étudie en didactique expérimentale des mathématiques, je souhaite que ce soit là un point de départ, qui incite de nombreux enseignants à s'informer davantage.