Journées Nationales d'Amiens (suite)

Les mathématiques comme science expérimentale*

par Rudolph BKOUCHE, IREM de Lille

"Dans toute expérimentation, il y a un résidu abstrait, et dans toute abstraction (mathématique) il y a un résidu intuitif. Ils suffisent pour nous faire comprendre que la distinction entre l'abstrait et l'expérimental, si l'on remonte assez haut, s'estompe et disparaît : ce sont les deux béquilles de notre effort de compréhension du monde. Elles ont le même fondement et concourent aux mêmes fins, quelquefois par des voies communes et quelquefois par des voies opposées. Nous résumerons ces conclusions en ces termes : la distinction entre l'abstrait et le concret n'est que de tendance, non d'essence."

F. Gonseth : *Les fondements des mathématiques.*

"Nulle part, le monde de la théorie et le monde de l'expérience ne sont séparés d'avance ; il n'est aucun secteur de la connaissance où les intentions correspondantes ne trouvent à s'exercer conjointement ou alternativement."

F. Gonseth : *La géométrie et le problème de l'espace.*

Lorsqu'on dit que les mathématiques sont une science expérimentale, ou que l'on parle du caractère expérimental des mathématiques, on porte un jugement tout autant sur les sciences expérimentales que sur les mathématiques. Les sciences expérimentales ne se réduisent pas à une accumulation de faits empiriques, elles sont organisation de faits au sein d'une théorie ; la notion même de fait ne relève pas de la simple observation, mais d'une observation à l'intérieur d'une théorie [1] ; il est aujourd'hui admis que toute expérimentation scientifique présuppose une théorie qui lui donne un sens à la fois dans son objet, dans sa méthode et dans la lecture de ses résultats ; en ce sens une expérimentation est aussi *abstraite* qu'un raisonnement ; la distinction elle-même n'est pas aussi simple qu'on la penserait *a priori* à moins de s'arrêter à la distinction simpliste du tournevis d'un côté, de la déduction formelle de l'autre.

* Conférence prononcée lors des Journées 81, à Amiens.

Les sciences expérimentales se fondent sur deux principes :
— d'une part, l'origine empirique des objets étudiés et des concepts ainsi mis en jeu ;
— la méthode (ou les méthodes) d'autre part, qui participe à la fois de l'observation empirique et du raisonnement rationnel.

C'est l'articulation de l'empirique et du rationnel qui constitue la science expérimentale, et c'est cette articulation que l'on va tenter d'expliciter à travers diverses pratiques mathématiques, essentiellement en comparant deux domaines de l'activité scientifique qui se renvoient constamment l'un à l'autre, qui se définissent constamment en référence l'un par rapport à l'autre, je veux parler des mathématiques et de la physique.

Pour commencer, je parlerai de deux démonstrations classiques, l'une concernant la proposition 4 du livre I des *Eléments* d'Euclide qui énonce le deuxième cas d'égalité des triangles, l'autre concernant l'équilibre du *Pont de Wheatstone*.

Proposition : *Si deux triangles* ABC, DEF *ont les deux côtés* AB, AC *respectivement égaux aux deux côtés* DE, DF *et si les angles* $\widehat{BAC}$, $\widehat{EDF}$, *compris entre les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases* BC, EF *égales ; les triangles seront égaux, et les angles restants, opposés aux côtés égaux* $\widehat{ABC}$ *et* $\widehat{DEF}$, $\widehat{ACB}$ *et* $\widehat{DFE}$, *seront égaux chacun à chacun.*

Appliquons, en effet, le triangle ABC sur le triangle DEF, et pour cela, plaçons le point A sur le point D, et la ligne AB sur la ligne DE. Le point B coïncidera avec E, puisque AB = DE. Ensuite AB étant placé sur DE, et l'angle $\widehat{BAC}$ étant égal à $\widehat{EDF}$, AC prendra la direction de DF, et puisque AC = DF, le point C tombera sur le point F. Donc puisque B coïncide avec E et C avec F, BC coïncidera avec EF ; car, s'il en était autrement, ces deux droites, qui ont mêmes extrémités, renfermeraient entre elles un espace, ce qui est impossible. Donc on a

$$BC = EF \qquad \text{triangle } ABC = \text{triangle } DEF$$
$$\text{angle } \widehat{ABC} = \text{angle } \widehat{DEF} \qquad \text{angle } \widehat{ACB} = \text{angle } \widehat{DFE}$$

La traduction que nous donnons ci-dessus est celle de J. Houël publiée dans [2].

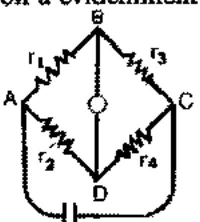
La démonstration repose essentiellement sur l'axiome suivant :

Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles (axiome 4 ou 8 suivant les éditions).

Cet axiome repose sur la considération *physique* de la coïncidence, c'est-à-dire du mouvement, et ici le mouvement est le mouvement d'un corps solide. Il y a ainsi à la base du raisonnement euclidien la relation corps solide / mouvement du solide, le solide étant un corps qui reste indéformable pendant le mouvement, et le mouvement un changement qui conserve la forme du solide, et sa grandeur (on dirait aujourd'hui que la distance est un invariant du mouvement, et le mouvement une transformation qui conserve la distance, mais cette formulation à la *Erlangen*, si elle précise pour nous ce que dit Euclide, est néanmoins un anachronisme ; traduction *moderne* d'Euclide, elle en est cependant différente). Il ne s'agit en rien d'un cercle vicieux, le solide défini par le mouvement et le mouvement par le solide, mais de la mise en relation de deux *choses* issues de l'expérience, cette mise en relation ayant elle-même un caractère empirique (ce qui ne signifie pas qu'elle soit seulement d'ordre empirique).

La démonstration de la proposition 4 s'appuyant sur l'axiome énoncé ci-dessus est en quelque sorte une déduction fondée expérimentalement, on ne peut y séparer le caractère formel de la déduction (c'est-à-dire la suite logique des assertions) de sa signification, celle-ci renvoyant à des notions d'ordre empirique.

Considérons maintenant le pont de Wheatstone, il s'agit d'un montage électrique (voir figure) ; on dit que le pont est en équilibre si aucun courant électrique ne passe dans le fil BD ; la condition d'équilibre s'établit de la façon suivante : notons r_1, r_2, r_3, r_4 les résistances des sections de fil AB, AD, BC, BD et notons i_1, i_2, i_3, i_4 les intensités des courants électriques les parcourant respectivement, à l'équilibre on a évidemment



$$i_1 = i_3 \qquad \text{et} \qquad i_2 = i_4$$

et la loi d'Ohm permet d'écrire les relations

$$r_1 i_1 = r_2 i_2 \qquad \text{et} \qquad r_3 i_3 = r_4 i_4$$

ce qui donne la relation d'équilibre

$$r_1 r_4 = r_2 r_3$$

Ici la démonstration est formelle en ce sens que, les équations de l'équilibre une fois écrites, la condition d'équilibre s'établit par un calcul qui *oublie* la définition des grandeurs considérées, calcul indépendant de leur signification. En un sens la méthode de démonstration est plus *abstraite* que celle de la proposition d'Euclide.

Il y a bien entendu le *montage expérimental* et les *grandeurs empiriques* : différence de potentiel, intensité de courant électrique, résistance, mais ces grandeurs sont d'une complexité (et d'une abstraction !) bien plus grandes que les grandeurs géométriques de la proposition d'Euclide ; elles sont construites à travers un système à la fois d'ordre expérimental et théorique : l'électrocinétique, et l'axiome qui les relie : la loi d'Ohm, les définit tout autant (nous reviendrons plus loin sur la définition des grandeurs). Et le caractère expérimental s'accompagne, en ce qui concerne la démonstration de la condition d'équilibre, d'une *formalisation* qui n'apparaissait pas dans la démonstration euclidienne.

Ceci dit, la question se pose (peut-être de mauvaise foi aux yeux de certains, mais qui à mes yeux contient tout le problème du lien mathématique/physique) :

Pourquoi la proposition 4 du livre I des *Eléments* est-elle considérée comme faisant partie des mathématiques alors que la proposition qui énonce la condition d'équilibre du pont de Wheatstone fait partie de la physique ?

On peut répondre que la géométrie est une science mathématique et que l'électrocinétique est une science physique, ce qui n'est qu'une façon de repousser la question : pourquoi la géométrie est-elle une science mathématique et l'électrocinétique une science physique, ou plutôt en quoi sont-elles différentes (ce qui est corrélatif de la question : en quoi sont-elles ressemblantes) ?

Il y a une réponse simple, qui est peut-être la seule réponse objective, puisque fondée sur un critère à l'apparence irréprochable, bien que d'origine empirique : la proposition 4 du livre I est enseignée dans le cours de mathématique (du moins était enseignée avant l'irruption des *mathématiques modernes*), l'équilibre du pont de Wheatstone est étudié dans le cours de physique ; et l'on sait combien ces distinctions ont d'importance dans l'institution scolaire et donc dans les conceptions idéologiques de ceux qui en font partie : élèves et enseignants.

Evidemment un critique de mauvaise foi demanderait pourquoi cette division institutionnelle, remettant en cause une légitimité pourtant bien acceptée.

Enfin, dernière réponse bien plus élaborée et qui veut s'appuyer sur ce qui fait justement le caractère d'une science expérimentale : l'expérimentation, et qui se retrouve dans l'institution enseignante à travers ce qu'on appelle les *travaux pratiques*.

En physique, on fait des expériences, on vérifie ainsi, avec un montage convenable, que l'équilibre du pont de Wheatstone (c'est-à-dire l'intensité nulle dans la section de fil BD, ce qui se *voit* en lisant la graduation de l'ampèremètre) est obtenu lorsque la relation $r_1r_4 = r_2r_3$ est satisfaite ; le montage consiste à prendre les résistances r_1, r_2, r_3 fixes et la résistance r_4 variable ; on fait varier r_4 jusqu'à l'équilibre, ce qui prouve la *vérité* de la relation *théorique* (autrement dit l'adéquation de la théorie à l'expérience).

Par contre, c'est bien connu, on ne fait pas de travaux pratiques en mathématiques pour vérifier la proposition 4 du livre I des *Eléments* ; cependant, à supposer qu'on veuille faire l'expérience correspondante, la démarche serait la même que celle de la démonstration ; la constatation de l'égalité des triangles n'est que l'explicitation de l'axiome *expérimental* reliant l'égalité des grandeurs géométriques et la coïncidence, explicitation qui consiste à remarquer que, lorsque les points B, E d'une part, les points C, F d'autre part coïncident, alors les droites BE et CF coïncident, ce qui renvoie aux postulats euclidiens énonçant les relations entre droites et points, postulats d'origine empirique ou plutôt instrumentale (cf. ci-dessous).

Mais que fait-on lorsqu'on vérifie expérimentalement l'équilibre du pont de Wheatstone, lorsqu'on sait que les appareils de mesures électriques sont construits à partir des lois qu'ils permettent de vérifier ? L'expérience qui consisterait à vérifier la loi d'Ohm avec un voltmètre est en un certain sens tautologique puisque le voltmètre lui-même est construit à partir de la loi d'Ohm. En un sens, une expérience vérifie bien plus une cohérence qu'une vérité.

Ceci pose, autant en géométrie qu'en électrocinétique, le problème du rapport entre la grandeur et sa réalisation instrumentale.

Si la grandeur ne peut être définie indépendamment des conditions de sa réalisation, elle n'est pas non plus simple représentation de cette réalisation ; on ne construit pas des instruments a priori : et leur construction reste liée à un projet théorique :

Les instruments ne sont que des théories matérialisées. Il en sort des phénomènes qui portent de toutes parts la marque théorique [3].

Pour revenir à la géométrie et de façon précise aux *Eléments*, la droite étant définie à partir d'une vague notion de régularité :

La ligne droite est celle qui est située semblablement par rapport à tous ses points,

les postulats de la droite s'énoncent :

1 — On peut mener une ligne droite d'un point quelconque à un autre point.

2 — On peut prolonger indéfiniment, suivant sa direction, une ligne droite finie

augmentée dans certaines éditions du postulat suivant :

6 — Deux droites ne peuvent entourer un espace.

qui assure l'unicité de la droite passant par deux points.

Ces postulats affirment la possibilité d'une construction géométrique (ici le tracé d'une droite avec une règle), même lorsque celle-ci s'avère matériellement impossible.

Mais en même temps que l'instrument permet de définir la droite, c'est la définition de la droite qui détermine l'instrument ; qu'on se rappelle la vérification de la rectitude d'une règle donnée dans les livres de géométrie élémentaire (par exemple Lebossé-Hemery, classe de cinquième, édition de 1945) qui consiste à retourner la règle pour vérifier si les deux lignes ainsi tracées coïncident dès qu'elles ont deux points communs.

C'est cette intervention de l'instrument, qu'elle soit effective ou non, intervention à la fois d'ordre pratique et d'ordre théorique, qui définit, en partie, le caractère expérimental de la géométrie élémentaire (il ne s'agit pas seulement d'observer des figures, mais de les construire, les construire pour les étudier et les étudier pour les construire ; rappelons que la première proposition des *Eléments* est une construction) ; la géométrie euclidienne est ainsi étude des figures et la déduction est fondée sur l'intuition géométrique, déduction qui met en jeu à la fois la logique formelle et l'expérimentation, déduction expérimentale comme je l'ai dit à propos de la proposition 4 du livre I [4].

Ce caractère expérimental relie la géométrie à la mécanique, en ce sens que la réalisation des figures est liée à la technique instrumentale, autrement dit la géométrie est subordonnée à la mécanique (voire à la mécanique pratique), autant que la mécanique comme science est dépendante de la géométrie sous-jacente. Ce rapport entre géométrie et mécanique est décrit par Newton dans la préface de [5] :

"Geometry does not teach us to draw these lines, but requires them to be drawn, for it requires that the learner should first be taught to describe these accurately before he enters upon geometry, then it shows how by these operations problems may be solved. To describe right lines and circles are problems, but not geometrical problems. The solution of these problems is required from mechanics, and by geometry these use of them, when so solved is shown... Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but the part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring".*

En électrocinétique, la réalisation instrumentale est plus complexe, d'abord parce que l'objet est perçu à travers la médiation du montage et n'est défini que dans la mesure où il est supporté par la théorie (en un certain sens il y a moins d'empirisme en électrocinétique que dans la géométrie élémentaire) ; un montage électrique n'est pas un simple système de fils assorti d'un appareil nommé générateur et de quelques instruments de mesures, il est le moyen de *réaliser* ces grandeurs qu'on appelle différence de potentiel, courant électrique, résistance, et le fondement théorique qui sous-tend le montage a une importance relative bien plus grande qu'en géométrie, importance relative qui se définit moins par rapport à la théorie que par rapport au sujet raisonnant et expérimentant.

Ce qui distingue les deux propositions considérées ici (proposition du livre I des *Eléments*, équilibre du pont de Wheatstone), c'est peut-être plus la position du sujet par rapport aux deux théories mises en jeu (la géométrie élémentaire et l'électrocinétique) que les théories elles-mêmes. Toute classification des sciences est subjective, en ce sens qu'elle est l'expression d'une prise de position du sujet (sujet individuel ou sujet collectif) par rapport à ces sciences ; elle n'est pas objective en ce sens qu'elle n'est pas indépendante du sujet qui la fabrique ; je dirai que loin d'avoir le caractère scientifique que certains voudraient, elle est d'abord l'expression d'une idéologie.

---

* La géométrie ne nous apprend pas à tracer des lignes, elle les suppose tracées ; il est donc nécessaire qu'avant de commencer la géométrie, on apprenne comment tracer des lignes de façon précise ; on peut alors voir comment ces opérations permettent de résoudre les problèmes. Les constructions de lignes droites et de cercles sont des problèmes, mais non des problèmes de géométrie. La solution de ces problèmes relève de la mécanique et, ceux-ci résolus, la géométrie en montre l'usage... Ainsi, la géométrie est fondée sur la mécanique pratique et n'est rien d'autre que cette partie de la mécanique universelle qui précisément se préoccupe de l'art de mesurer.

Si nous revenons aux méthodes de démonstration ci-dessus, elles ne sont ni l'une ni l'autre caractéristiques des mathématiques ou de la physique ; on rencontre des démonstrations analogues à celles de la proposition euclidienne (déduction expérimentale), par exemple en optique géométrique avec les démonstrations des diverses formules reliant la position de l'objet et de l'image, ou des formules de grandissement ou de grossissement (mais il est vrai qu'il s'agit encore de géométrie, les figures étant *matérialisées* par les trajets lumineux, réels ou virtuels) et en mécanique (voire en géométrie non-euclidienne [6]). Par contre, les méthodes analytiques en géométrie sont proches de celles qui déterminent la condition d'équilibre du pont de Wheatstonne, en ce sens qu'après l'explicitation des relations *données* entre les grandeurs considérées, les conséquences s'obtiennent par un calcul formel indépendant de la signification de ces grandeurs.

Quant à l'aspect expérimental, loin d'être simple constatation empirique, il est lecture de l'observation à travers une théorie (électrocinétique, géométrie, ou autre...), ce que Hermann Weyl exprime dans [7] :

"We cannot merely test a single law detached from this theoretical fabric ! The connection beween direct experience and the objective element behind it, which reason seeks to grasp conceptually in a theory, is not so simple that every single statement of the theory has a meaning which may be verified by direct intuition *".

A ce stade de la discussion, on s'aperçoit que l'on a perdu en clarté, que la distinction théorique / expérimental est trop complexe pour être enfermée dans des définitions précises, et que la distinction entre mathématique et physique est plus obscure qu'on ne le pensait a priori ; on est bien loin de cette scolastique scolaire qui fabrique ces distinctions par la place dans l'emploi du temps ou le lieu géographique (scolastique que je ne considère pas comme dénuée de signification et qui constitue souvent une première approche !!!).

Il est vrai que le contradicteur pourra opposer, et avec raison me semble-t-il, la mauvaise foi de ce discours.

Si c'est l'objet qui définit une science, la distinction entre les différentes sciences est simple, elle se fait en référence à l'objet et rien n'interdit de décider à l'avance que tel objet appartient aux mathématiques, tel autre relève des sciences physiques. Et pour ce qui est de la géométrie, la situation est claire si l'on se réfère à la distinction explicitée par Einstein entre *géométrie pratique* et *géométrie axiomatique pure*, la première étant manifestement une science dérivée de l'expérience, la seconde seule relevant du domaine mathématique [8].

* Nous ne pouvons simplement tester une loi isolée de sa construction théorique ! Le lien entre l'expérience directe et l'élément objectif correspondant, que la raison cherche à intégrer dans une théorie, n'est pas aussi simple qu'on puisse préciser que chaque énoncé isolé de la théorie ait un sens directement vérifiable par l'intuition.

Mais cette distinction étant faite, et la sécurité retrouvée, où donc se situent les *Eléments* d'Euclide ? La réponse (si réponse il y a) n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire, si tant est même que la question ait un sens. L'histoire de la géométrie nous apprend que la distinction explicitée par Einstein est relativement récente, conséquence de la découverte des géométries non-euclidiennes au XIXéme siècle, et cette découverte repose autant sur des considérations d'ordre physique que sur le développement proprement mathématique [9]. Et l'intérêt de cette distinction, puisque distinction il y a, réside moins dans sa formulation que dans la recherche des connexions entre ces deux formes de géométrie, probléme central de la géométrie du XIXème siècle et qui trouvera son aboutissement dans la théorie de la Relativité Générale considérée par certains comme *la géométrisation de la physique*. Mais alors, cet Einstein, il était physicien ou mathématicien ?

La distinction explicitée par Einstein n'est pas une donnée a priori, elle se comprend à travers une pratique géométrique dans laquelle l'expérimental et le théorique s'enchevêtrent, et ce double aspect de la géométrie est fondamental lorsqu'il s'agit d'enseignement. J'évoquerai ici la théorie des symétries des figures et le rôle qu'elle peut jouer dans l'enseignement, à la fois dans son aspect expérimental (qu'il ne faut pas confondre avec la simple manipulation) et dans son aspect purement théorique ; l'un des résultats les plus profonds de cette théorie, bien qu'il soit *élémentaire*, est l'existence de cinq polyèdres réguliers et cinq seulement ; on connaît plusieurs démonstrations de ce résultat déjà connu de Platon, depuis la démonstration donnée par Euclide dans le livre XIII des *Eléments* jusqu'à celles qui utilisent les méthodes de l'algèbre linéaire ; j'ai entendu, au cours d'une réunion irémique, quelqu'un proposer comme activité de *bricolage* pour les élèves (et ici le terme "bricolage" s'oppose au terme "théorique") la détermination de ces cinq polyèdres et il se trouve que ce bricolage n'était autre que la démonstration d'Euclide ; alors faut-il conclure qu'Euclide était un bricoleur, ou au contraire que ce bricolage (si bricolage il y a), loin d'être simple manipulation, s'appuie déjà sur du théorique, aussi élémentaire soit-il ? Ce qui pose le problème de la place du théorique dans l'enseignement ; le théorique se réduit-il, comme on l'entend souvent dire sous l'influence de l'idéologie des trop fameuses *mathématiques modernes*, à l'axiomatique et au formalisme, ce qui exclut du domaine mathématique plus de deux mille ans d'histoire des mathématiques (!), ou bien le théorique apparaît-il dès qu'il y a organisation des connaissances, construction de lignes directrices permettant d'ordonner des connaissances, et dans ce cas il faut dépasser la sempiternelle dichotomie de la pratique et de la théorie, voire même la sécurisante dichotomie du sensible et de l'intelligible ?

Mais ici, le contradicteur dénoncera la mauvaise foi du discours ; facile, trop facile de parler du caractère expérimental de la géométrie élémentaire, facile parce que la géométrie élémentaire a ce caractère ambigu qui la place à l'intersection de la géométrie pratique et de la géométrie axiomatique pure. Et il a peut-être raison, ce contradicteur qui refuse de laisser s'engluer la science dans les pièges de l'ambiguïté ; la science n'est-elle pas la voie qui mène à la clarté, à l'ordre universel dans lequel chaque chose a une place bien définie ? Et puis, cette géométrie élémentaire si ambiguë n'a-t-elle pas disparu d'un enseignement enfin moderne !!!

Eh bien, quittons la géométrie élémentaire et ses ambiguïtés pour regarder vers ces disciplines *abstraites* que sont l'arithmétique et l'analyse mathématique ; ici l'empirisme n'a plus cours et les objets étudiés sont construits par l'esprit humain, sans référence à aucune réalité. Pourquoi pas ?

Je rappellerai d'abord une propriété arithmétique bien connue que l'on appelle la preuve par 9 et qui revient, en langage moderne, à calculer modulo 9 ; le principe est bien connu : le reste de la division par 9 d'un nombre est égal au reste de la division par 9 de la somme de ses chiffres, ce nombre étant écrit dans le système décimal, et la vérification en est simple.

Soit par exemple le nombre 5323 ; alors je peux écrire :

$$\begin{aligned} 5323 &= 5 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \\ &= 5 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 2 \times (9 + 1) + 3 \\ &= 9 \times (\ldots) + 5 + 3 + 2 + 3 = 9(\ldots) + 13 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$13 = 1 \times 10 + 3 = 1 \times (9 + 1) + 3 = 9 + 1 + 3 = 9 + 4$$

ce qui montre que le reste de la division de 5323 par 9 est égale à 4, reste de la division par 9 de la somme de ses chiffres.

Mais ceci n'est pas une démonstration, dira-t-on ; il s'agit tout au plus d'une simple vérification sur un nombre particulier, ici 5323, alors que le théorème arithmétique annonce une propriété universelle. Oui, mais le schéma de la démonstration est le même ; de la vérification empirique sur un nombre particulier à la démonstration générale, il y a une différence fondamentale, le passage du numérique *concret* au littéral *abstrait*, mais le principe est le même. Je laisse au lecteur le soin d'écrire explicitement la démonstration générale.

J'indiquerai un autre exemple de propriété arithmétique : dans un ancien Bulletin A.P.M.E.P., on énonce la proposition suivante : dans le système décimal, les nombres a et a^5 ont le même chiffre des unités.

On peut évidemment vérifier *empiriquement* la propriété en calculant quelques puissances cinquièmes, ce qui est contraire à la nature paresseuse de l'être humain. Plus astucieuse est la méthode qui consiste à remarquer que le chiffre des unités de a^5 est le même que celui de la puissance cinquième du chiffre des unités de a ; il suffit alors de calculer les puissances cinquièmes des nombres de 0 à 9. Enfin, troisième méthode plus élaborée : le petit théorème de Fermat affirme que $a^5 - a$ est un multiple de 5 ; d'autre part a^5 et a ont même parité, ce qui implique que $a^5 - a$ est un multiple de 10, et la propriété annoncée.

De ces trois méthodes, la première, empirique et fastidieuse, est de peu d'intérêt ; la simple constatation ne signifie rien si l'on n'a pas en vue quelque propriété à découvrir ou à vérifier, ce qu'on appelle en langage commun une arrière-pensée ; elle ne renseigne que sur ce qui a été effectivement calculé et l'arrière-pensée consiste en l'extrapolation au cas général. La seconde méthode est élémentaire en ce sens qu'elle ne fait appel qu'à la connaissance des opérations arithmétiques et de l'écriture décimale, à l'exclusion de toute théorie de la divisibilité ; elle s'achève par une étude cas par cas, méthode qui laisse toujours le mathématicien insatisfait car elle ne fait pas apparaître la *raison des choses*, c'est-à-dire ce qui les rend nécessaires ; dans ces conditions, s'agit-il d'une démonstration de type expérimental à la façon de celle de la proposition 4 du livre I des *Eléments* d'Euclide, s'agit-il au contraire d'une démonstration *purement théorique* (c'est-à-dire ne faisant appel à aucun élément d'ordre empirique) ? La question posée est celle de la nature des nombres ; la notion de nombre a-t-elle une origine empirique, ou bien est-elle une construction intellectuelle de l'esprit humain, et dans ce cas quelle est la part de l'empirique dans cette construction ? Nous y reviendrons. La troisième méthode, quant à elle, s'appuie sur une arithmétique plus élaborée (la théorie de la divisibilité) et explique mieux *la raison des choses*, mais la signification de celle-ci n'est-elle pas dans ce qu'on aurait appelé jadis la *métaphysique* de l'arithmétique (et j'emploie à dessein un terme aujourd'hui abhorré par l'idéologie scientiste contemporaine) ? Cette métaphysique elle-même évolue en même temps que les méthodes ; aujourd'hui par exemple le petit théorème de Fermat n'est qu'une propriété élémentaire de la théorie des corps finis (le groupe des éléments inversibles du corps à p éléments est d'ordre $p-1$), alors que les démonstrations plus anciennes qui relèvent aussi de la théorie de la divisibilité s'expriment sous une toute autre forme. Mais c'est la même chose, objectera-t-on ! Je ne pense pas que ce soit si simple et je renvoie aux deux éditions différentes d'un volume de la collection *Que sais-je ?* intitulé *Les Nombres Premiers,* la première édition rédigée par Emile Borel en 1953, la seconde rédigée par Jean Itard en 1969. Il ne s'agit nullement de hiérarchiser, de décider quelle est la meilleure méthode, voire la plus profonde, même si la seconde version est d'accès plus facile pour le mathématicien formé à l'école d'aujourd'hui ; il s'agit de savoir quelle différence de conception (de métaphysique !) se dégage de la comparaison de ces deux éditions qui racontent en principe la même chose, l'une suivant l'empirisme mathématique de Borel, l'autre plus proche du discours formaliste des mathématiques contemporaines.

Et la démarche qui consiste à passer de l'empirisme primaire à la démonstration, qui place la proposition dans un contexte théorique, n'a-t-elle pas une ressemblance avec la démarche de la physique où l'on passe de l'observation à cette physique rationnelle que constitue la physique mathématique ?

De toutes façons, comme on l'a déjà dit, la question est celle de la nature des nombres, et par conséquent de l'origine arithmétique et de la théorie de la divisibilité ; de même que la géométrie élémentaire s'appuie sur une donnée empirique : le corps solide, l'arithmétique s'appuie-t-elle sur une donnée empirique ? Le fait que l'arithmétique (et pas seulement le comptage) intervienne dans la représentation du réel est-il volontarisme de l'intelligence humaine dans son effort de compréhension de la réalité extérieure, ou bien le nombre est-il né, comme toute connaissance d'origine empirique, du heurt entre le sujet humain et la réalité extérieure ?

J'évoquerai ici un autre théorème de la théorie de la divisibilité : le théorème chinois, découvert il y a plusieurs siècles à propos du problème du calendrier qui consiste à déterminer les dates de coïncidences d'événements qui se reproduisent avec des périodicités différentes, et qu'on pourrait poser de la façon suivante : le 15 novembre 1783, c'était quel jour de la semaine ? et le 18 février 1896 ? Ce théorème intervient aussi dans la théorie des engrenages et dans la méthode des coïncidences en physique (par exemple la stroboscopie) ; on peut l'énoncer de la façon suivante :

Soient $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des nombres premiers entre eux deux à deux ; on veut déterminer les nombres tels que pour tout i, le reste par p_i soit un nombre donné a_i ; on montre qu'il existe un tel nombre et un seul qui soit plus petit que le p.p.c.m. des p_i et que les autres s'obtiennent en lui ajoutant un multiple quelconque du p.p.c.m.

On peut étudier le théorème chinois d'une façon *expérimentale* à partir du problème du calendrier, ou de la théorie des engrenages ; on peut faire aussi l'exercice suivant (avant toute démonstration) : étant donné un texte pas trop long, on détermine, en formant des paquets de lettres, les restes par 4, 3, 5 du nombre total de lettres ; la méthode mise en œuvre consiste à comparer des progressions arithmétiques de raisons respectives 4, 3, 5 ; dans ce cas on remarque que la connaissance de la parité (définie par le reste par 4) et du reste par 5 détermine le chiffre des unités du nombre cherché dans le système décimal, ce qui définit une progression arithmétique de raison 10, et on regarde les restes par 4 et 3 des nombres ainsi obtenus ; le nombre de lettres est défini modulo 60, ce qui donne une indication suffisante si l'on connaît l'ordre de grandeur ; la méthode ainsi définie comporte à la fois une observation des nombres obtenus, mais cette observation se structure à travers un raisonnement déductif que l'on peut encore qualifier de type expérimental.

Tout ceci fait apparaître un aspect expérimental de l'arithmétique et l'on peut considérer celle-ci comme une physique des nombres, au même titre que l'on peut considérer la géométrie élémentaire comme la physique des figures spatiales ; évidemment, ceci est moins une affirmation scientifique qu'une prise de position épistémologique, mais je ne crois pas que, quelle que soit la conception épistémologique que l'on professe, on puisse aller plus loin qu'une prise de position. Ceci dit, je pense que l'on peut accepter qu'une première approche de l'arithmétique s'appuie sur le donné empirique issu de la pratique du comptage (ceci ne signifie pas que ce donné empirique soit exempt de toute théorisation, aussi embryonnaire soit-elle !) ; il y a un constat expérimental des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition et de la multiplication, constat qui précède les justifications théoriques et celles-ci naissent de la nécessité de validation générale de tels constats.

On pourra dire évidemment qu'il s'agit d'arithmétique élémentaire, d'un numérique non élaboré, ce qui est évidemment déplacer le problème. Trop facile de placer l'observation empirique au début et la théorie sophistiquée à la fin du processus. Et l'arithmétique supérieure n'emprunte-t-elle pas à ce fond empirique de l'arithmétique, que ce soit à travers l'étude des nombres premiers (et je renvoie ici à l'ouvrage cité de E. Borel et aux méthodes statistiques dont il parle), ou à travers la moderne théorie de la divisibilité où les corps de nombres jouent le rôle de matériel expérimental ? Mais ici, c'est le concept même de matériel expérimental qui est en jeu et nous y reviendrons.

Après cette incursion dans le domaine de l'arithmétique, nous pourrions continuer à travers l'analyse ou le calcul des probabilités ; ce n'est pas ici le lieu d'une étude exhaustive ; on pourrait signaler cependant que le calcul différentiel et la physique mathématique sont nés en même temps et se sont nourris l'un l'autre.

Pour prendre un exemple, peut-être trop connu mais cependant significatif, le concept de dérivée et celui de vitesse instantanée sont trop liés pour qu'on puisse distinguer a priori une notion de vitesse instantanée qui relèverait de la physique expérimentale et une notion de dérivée qui en serait la formulation mathématique, ou que l'on considère au contraire la notion de vitesse instantanée comme une *application* de la notion de dérivée, une représentation concrète en quelque sorte. La dialectique qui relie ces deux concepts est plus fine que la dichotomie habituelle de l'abstrait et du concret, ou si l'on préfère de la théorie et de la pratique ; vouloir définir une antériorité de la notion de vitesse instantanée sur celle de dérivée, ou de la dérivée sur la vitesse instantanée, n'a aucun sens autre qu'un volontarisme rationalisant et sécurisant, en particulier lorsqu'il s'agit d'enseignement où les tentatives unitaristes ne servent en fait qu'à cacher les significations. Je renvoie ici au texte de Feynmann sur la vitesse dans son cours de *Mécanique* [10] qui reprend, en un certain sens, le texte de Newton dans les *Principia* [11] ; s'agit-il de mathématiques ou de physique, d'expérimental ou de théorique ? Toute réponse ne serait qu'artifice.

De même, si la physique déterministe s'est appuyée sur la théorie des équations différentielles, il ne s'agit ni de considérer la théorie des équations différentielles comme l'émanation de quelque phénomène *concret* dont la loi s'exprimerait par une équation différentielle, ni de considérer cette même physique déterministe comme une simple application de la théorie des équations différentielles. Physique déterministe et théorie des équations différentielles se relient à travers des significations qui interfèrent entre elles ; c'est en particulier le cas des théorèmes d'existence ; pour le physicien-mathématicien du XVIIIème siècle, les équations différentielles ont des solutions parce que les phénomènes qu'elles représentent ont une existence. C'est la réalité de cette existence qui a amené à poser le problème de la définition de la solution lorsque celle-ci n'est plus calculable ; c'est l'objet de la fameuse controverse entre Euler, Bernoulli, d'Alembert à propos de l'équation des cordes vibrantes [12] (on y discute en particulier du sens de la représentation d'une solution comme somme de fonctions trigonométriques), controverse qui relève autant de la physique des ondes que de l'analyse mathématique, controverse qui débouche sur l'utilisation des séries trigonométriques telle qu'elle sera systématisée par Fourier [13]. Mais la représentation des solutions d'équations différentielles par des séries trigonométriques implique une redéfinition de la notion de fonction, la définition *calculatoire* telle qu'elle est énoncée par Euler [14]

Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes

n'étant plus adéquate. Cette nécessaire redéfinition de la notion de fonction afin de permettre aux équations qui *doivent* avoir des solutions, d'en avoir effectivement se pose ainsi moins pour des raisons *ontologiques* que pour justifier une existence admise *a priori*. Dans un autre domaine, le théorème de Girard-d'Alembert exprime moins l'existence des racines d'un polynome à coefficients réels que le fait que ces racines peuvent s'écrire sous la forme $a + bi$, où i est une racine carrée de -1. Rappelons aussi le principe de Dirichlet sur l'existence et l'unicité d'une fonction harmonique définie dans un domaine et prenant des valeurs données sur la frontière, et que Riemann justifiait par des arguments relevant de la théorie de l'électricité ; en un certain sens, la démonstration *rigoureuse* du principe de Dirichlet, en même temps qu'elle résolvait une question d'analyse pure, confortait l'adéquation de l'analyse mathématique avec la théorie du potentiel du physicien-mathématicien.

C'est encore Riemann, qui se montre tout autant physicien que mathématicien, qui fondait la géométrie différentielle moderne en écrivant l'un des textes les plus intuitifs et les plus abstraits jamais écrits. *Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie* [15], dans lequel il proposait un élargissement de l'intuition spatiale usuelle bien plus qu'une construction formelle au sens des mathématiques d'aujourd'hui, et c'est parce que ce texte s'appuyait sur un fond empirique qu'il a permis l'intervention efficace de la géométrie différentielle dans la physique mathématique [16].

Après ces remarques diverses sur l'origine expérimentale, voire empirique, de certains concepts mathématiques qui renvoient l'élaboration de ceux-ci à des pratiques proches de celles des sciences de la nature, il est peut-être temps, pour montrer l'aspect contradictoire de tout discours sur les mérites respectifs de l'empirique et du rationnel, de regarder du côté de la physique *science expérimentale* et de rappeler que les grandes constructions de la physique moderne ne sont pas nées de l'expérience; elles ont parfois même pris le contre-pied de l'observation immédiate.

Rien n'est plus éloigné de l'observation que le discours copernicien [17] ; bien au contraire, c'est par des raisonnements purement spéculatifs que Copernic décide, contre l'évidence empirique, que c'est la terre qui tourne autour du soleil; les raisons esthétiques (l'harmonie du monde) sont peut-être même les plus importantes, et l'argument que développe Copernic en faveur de la rotation quotidienne de la terre sur elle-même est bien spécieux qui dit, en réponse à ceux qui objectent que si la terre tournait la force centrifuge ferait éclater la terre, que si c'était le monde céleste qui tournait autour de la terre, il éclaterait sous l'action d'une force centrifuge encore plus grande. Que la science moderne soit née de tels raisonnements n'est pas un fait innocent, et cela renvoie à l'anarchisme épistémologique de Feyerabend [18] ; au fond, la méthode scientifique est peut-être le meilleur exemple d'opportunisme, opportunisme exemplaire en ce sens qu'il réussit, mais l'opportunisme implique une participation effective du sujet à l'élaboration de la connaissance (ce qui est, on s'en doute, loin d'être le cas de l'élève en situation scolaire), et cette participation s'exprime à travers le *vouloir* du sujet ; on n'est pas opportuniste par devoir, mais par désir.

Et lorsque se développent au XXème siècle les théories de la relativité d'une part, de la mécanique quantique d'autre part, l'empirisme est bien loin, ou bien c'est un empirisme fabriqué à travers une expérimentation qui n'est que la machine à vérifier la théorie, la théorie matérialisée chère à Bachelard. Et il est vrai qu'à travers les expériences sophistiquées de la physique moderne, on ne peut lire que ce qui a été préparé. C'est encore une fois la loi d'Ohm vérifiée avec un voltmètre dont le principe de construction est la loi d'Ohm. Et même lorsque la théorie explique une observation qui lui est antérieure, l'explication est d'abord intégration de l'observation dans un système théorique ; je donnerai ici comme exemple l'explication de l'avance du périhélie de Mercure par la Relativité Générale, explication qui m'a toujours laissè pantois tant le fait que l'on trouve, à travers une modélisation plus ou moins sophistiquée, les 43'' attendues, me semble inexplicable. Mais ce n'est pas ici le lieu de parler d'épistémologie de la physique; il fallait seulement dire, après l'empirisme mathématique développé dans la première partie, que la physique *science rationnelle* est plus éloignée de l'observation qu'on ne le pense, et que ce qu'on appelle expérimentation est bien plus une préparation du réel à intégrer le champ théorique qu'une vérification de l'adéquation de la théorie au réel. (Mais alors, c'est quoi le réel ? Ceci est une histoire bien compliquée !)

Il ne faudrait pas conclure de cette accumulation de mauvaise foi que constitue le discours qui précède qu'on puisse prétendre à l'idée d'une mathématique science expérimentale s'opposant à une physique de plus en plus abstraite. On pourrait imaginer dans l'avenir des journées de *l'Union des Physiciens* sur le thème : *La physique est-elle une science expérimentale ?* où quelque physicien montrerait que la physique plonge ses racines dans l'observation empirique et que les théories les plus abstraites en sont toutes plus ou moins issues. Mais tel n'est pas l'objet de mon propos ; je ne pense pas plus la physique comme pure théorie dégagée de tout empirisme que les mathématiques comme science née de l'observation empirique ; je ne pense d'ailleurs pas le point de vue opposé, savoir la physique empirique et les mathématiques pure rationalité.

En fait, la question qui se pose est bien plus de savoir en quoi les mathématiques et la physique sont différentes (ou ce qui est corrélatif : en quoi elles sont semblables). Et c'est au fond les traditionnelles dichotomies de l'abstrait et du concret, ou de la théorie et la pratique, ou encore de la connaissance rationnelle et de la connaissance empirique, qui sont à remettre en cause ; si ces distinctions sont d'abord simplifications sécurisantes pour l'esprit humain à la recherche d'une pensée stable, rien ne prouve leur pertinence dans l'élaboration de la connaissance scientifique et c'est peut-être pour obscurcir de prétendues idées claires que j'écris ce texte.

Et, pour revenir à l'introduction de ce texte, disons que parler du caractère expérimental des mathématiques, c'est parler bien moins des mathématiques que de ce que l'on entend par caractère expérimental.

Et ici, c'est encore le contradicteur qui intervient : le discours qui précède porte toujours sur cette part de l'activité mathématique qui intervient dans le rapport à la réalité, celle qui s'est constituée en liaison avec la physique ; mais que dire de cette mathématique remodelée que l'on trouve aujourd'hui à travers la formalisation et l'axiomatique ? Cette mathématique, à supposer qu'elle ait une origine empirique, ce qui reste à montrer, se construit d'une manière purement déductive sans aucune autre contrainte que sa logique interne. Et si cette mathématique est une science expérimentale, c'est d'une expérimentation interne qu'il faudrait parler, sans référence à une quelconque réalité extérieure.

Et nous renvoyons à Hilbert qui écrit [19] :

Comme toute autre science, la mathématique ne peut pas être construite sur la seule logique. Une donnée est indispensable, composée d'objets concrets résultant d'une expérience antérieure à la pensée... En mathématiques, les objets que nous examinons sont des signes qui pour nous sont clairs et reconnaissables.

Mais le texte hilbertien peut être lu de multiples façons ; ces signes qui sont les objets de la mathématique hilbertienne, que sont-ils ? Renvoient-ils à des significations qui leur sont extérieures, et les règles auxquelles ils obéissent sont-elles seulement les règles de la syntaxe qui les ordonne et les structure ?

En un certain sens, c'est la manipulation sur les signes conformément aux règles syntactiques définies *a priori* qui fonde le caractère expérimental des mathématiques ; le signe est l'objet de l'expérience et le pas est vite franchi qui dit que tout ce qui est au-delà du signe et de la syntaxe ne relève plus du domaine des mathématiques, soit que cela soit renvoyé à un autre domaine de la science, soit que cela soit relégué vers l'enfer de la métaphysique. Ce point de vue extrême est par exemple développé par Pierre Raymond [20] à partir d'une lecture *à la lettre* de Hilbert, le formalisme étant à lui-même sa propre signification. Cette attitude que l'on peut considérer si l'on veut comme une perversion du formalisme hilbertien est d'abord ignorance de la réalité de l'activité mathématique.

Nicolas Bourbaki, représentant de la pensée formaliste en France, le sait bien qui, après avoir écrit au début de la préface de ses *Eléments de Mathématiques*

Le traité prend les mathématiques à leur début et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière...

reconnaît, dans cette même préface, qu'il faut avoir une culture mathématique minimale pour comprendre la signification de l'ouvrage, y compris d'ailleurs le point de vue formaliste.

Cette expérimentation sur le signe que propose Hilbert dépasse le point de vue formel en accordant au signe une signification ; il suffit de lire la préface d'un ouvrage de Hilbert écrit en collaboration avec Cohn-Vossen [21], ouvrage que je considère, pour la compréhension de la pensée hilbertienne dans toutes ses dimensions, comme aussi important que les *Fondements de la géométrie*, et dont je citerai le texte suivant :

*In mathematics, as in any scientific research, we find two tendancies present. On the one hand, the tendancy toward abstraction seeks to crystallise the logical relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendancy toward intuitive understanding fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live rapport with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations**.

Et il est vrai que, même réduite à une manipulation cohérente des signes mathématiques, l'activité du mathématicien se réfère toujours aux diverses représentations qu'il associe à ces signes (il serait peut-être plus juste de dire que les signes sont les symboles de ces représentations !). Et c'est à travers de telles représentations que son activité a un caractère expérimental. Pour revenir à un domaine dont nous avons déjà parlé, l'arithmétique, les corps de nombres ne sont pas de simples définitions formelles et l'arithmétique ne se réduit pas à des manipulations formelles

* Dans les mathématiques comme dans tout autre champ de recherche scientifique, nous trouvons deux tendances. D'une part, la tendance vers l'abstraction cherche à cristalliser les relations logiques inhérentes sous le labyrinthe du matériel étudié et à réorganiser ce matériel d'une manière systématique et ordonnée. D'autre part, la tendance vers la compréhension intuitive fournit une prise plus immédiate des objets étudiés et un vivant rapport qui, pour ainsi dire, force la signification concrète de ces relations.

sur ces nouveaux objets ; ceux-ci ont été fabriqués à partir des problèmes posés par la résolution des équations diophantiennes et la théorie de la divisibilité ; je rappellerai, pour exemple, la démonstration du grand théorème de Fermat dans le cas $n=3$: l'équation $x^3+y^3=z^3$ n'a pas d'autres solutions en nombres entiers que les solutions triviales (l'un des nombres x, y, z est nul, les autres étant égaux à $+1$ ou -1). La méthode de démonstration fait intervenir explicitement l'arithmétique du corps $\mathbb{Q}(j)$ où j est une racine cubique de l'unité. Les corps des nombres deviennent ainsi objet d'études et *matériel expérimental* dans l'élaboration de la théorie des nombres algébriques.

De même, et c'est le prolongement de la problématique géométrique de Riemann, la géométrie différentielle, à travers toutes ses démarches formelles (et il n'est pas question de nier la nécessité théorique de telles démarches) se présente comme un prolongement de l'intuition spatiale ; certains des termes utilisés en géométrie (par exemple *fibres, feuilletages*...) sont lourds de signification intuitive, y compris dans les méthodes de démonstration, méthodes de démonstration qui se présentent parfois comme une forme de déduction expérimentale à la mode euclidienne (cf. ci-dessus).

On peut maintenant comparer expérimentation en mathématiques et expérimentation en physique. Une expérience électromagnétique ne consiste pas en une manipulation de systèmes de fils et d'appareils plus ou moins complexes munis de boutons divers sur lesquels il faut quelquefois appuyer ; son objet est l'étude des phénomènes qui apparaissent à travers le montage expérimental, et ce sont ces phénomènes que la théorie veut représenter, non le montage expérimental. Et plus la science physique devient complexe, plus l'expérimentation devient sophistiquée et le montage expérimental n'est plus que la médiation entre le physicien et le phénomène. Une chambre à bulles n'a jamais montré des particules élémentaires, seulement une trace provoquée par ionisation que la théorie met sur le compte du mouvement des particules élémentaires, et ce d'une façon tellement complexe que les divers clichés photographiques doivent être déchiffrés avant d'être exploitables. Le signe de la mathématique hilbertienne est de même le médiateur entre le mathématicien et l'objet qu'il étudie. Mais, alors, qu'est-ce que l'objet dans les sciences mathématiques ? Vaste problème que je ne saurais aborder ici, tant la réponse dépend d'une prise de position épistémologique, voire idéologique, donc nécessairement subjective (ce qui n'en diminue en rien la valeur, au contraire).

Les mathématiques mettent en jeu des concepts issus à travers des cheminements plus ou moins longs de l'expérience, que ces concepts prolongent le sensible ou qu'ils en prennent le contre-pied, mais cela est aussi vrai de la physique. C'est à travers le sensible que l'on peut atteindre le non-sensible, même et surtout s'il s'agit d'aller à l'encontre du sensible : on ne peut comprendre par exemple la mécanique quantique que contre la mécanique classique, à moins de réduire la mécanique quantique à n'être qu'un jeu formel d'observables. Mais le sensible lui-même n'a pas de sens et c'est le théorique qui permet de lui en donner un (et ici le sens est celui défini par le sujet ; d'une certaine façon le théorique est action du sujet sur le sensible) ; c'est cette interaction du sensible et du théorique qui constitue ce que nous appelons la connaissance scientifique. Et c'est à ce niveau que se pose le problème fondamental de l'enseignement, l'explicitation de cette interaction, c'est-à-dire de la signification des concepts mis en jeu, signification qui se définit à la fois par rapport à la science constituée et par rapport à l'élève ; et à ce titre, la signification a bien plus d'importance que les difficultés techniques ; d'abord parce que c'est à travers la signification que l'on appréhende les difficultés techniques avant même de les résoudre, ensuite parce que sans la signification, la résolution des difficultés techniques reste formelle et n'apparaît que comme une suite de recettes à savoir bien utiliser, ce qui renvoie à l'opportunisme scolaire dont je parle dans le texte cité de *La Rigueur et le Calcul* [22].

La mise en évidence du caractère expérimental des mathématiques dans l'enseignement sous ses divers aspects est peut-être un des moyens de retrouver la signification dans l'enseignement ; ce peut être aussi un gadget formel, c'est-à-dire sans autre signification que d'être une nouvelle forme de discours scolaire ; je pense ici à la tradition des *Travaux Pratiques* de la physique qui peuvent être tout aussi *abstraits* que la formalisation à la mode d'un certain enseignement des mathématiques.

Mais ce retour à la signification dans l'enseignement, c'est-à-dire *la signification du savoir*, nécessite, on l'a dit, une remise en cause de nos dichotomies habituelles du concret et de l'abstrait, de la pratique et de la théorie et autres distinctions analogues, qui à défaut de pertinence sont au moins rassurantes. En ce sens, le problème est moins de clarifier que de se débarrasser d'un certain nombre d'idées claires qui n'en finissent pas de nous aveugler.

Notes bibliographiques

1. **H. Poincaré :** *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion Paris 1902/1968 Ch. IX.
2. **J. Houël :** *Essai critique sur les Principes Fondamentaux de la Géométrie Elémentaire*. Gauthier-Villars. Paris 1867.
3. **G. Bachelard :** *Le Nouvel Esprit Scientifique*. PUF. Paris 1934/1973. Introduction.
4. **R. Bkouche :** Euclide, Klein, Hilbert et les autres in *La Rigueur et le Calcul*, édité par le groupe Epistémologie Inter-IREM. Cedic. Paris 1982

5. **I. Newton** : *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Préface. 1686. Réédition University of California Press. Berkeley Los Angeles. London 1962

6. **N.I. Lobatchevsky** : *Etude géométrique sur la théorie des parallèles*. Traduit par J. Houël. Mémoire de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de l'Université de Bordeaux. Tome 4 1866.

7. **H. Weyl** : *Space. Time. Matter* (1918). Ch I. Dover Publication. New York 1952.

8. **A. Einstein** : La Géométrie et l'expérience (1921) in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*. Gauthier-Villars 1972.

9. **R. Bkouche** : op. cité. Ch III

10. **Feynman** : *Cours de Physique*. Mécanique I, Ch 8. Interéditions. Paris 1979.

11. **I. Newton** : op. cité. Book I. Section I.

12. **D. Alembert** : Mémoires Académie des Sciences Royales de Berlin. 1747.
D. Bernoulli : ibid 1763
L. Euler : ibid 1765

13. **J. Fourier** : *Théorie analytiques de la chaleur*. Firmin-Didot. Paris 1822, et Gauthier Villars. Paris 1888.

14. **L. Euler** : *Introduction à l'analyse infinitésimale*. Bachelier. Paris 1835.

15. **B. Riemann** : Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (1854). In *Oeuvres mathématiques*. Blanchard. Paris. 1968.

16. **R. Bkouche** : op. cité. Ch III et IV.

17. **N. Copernic** : *Des révolutions des orbes célestes* (1543). Blanchard. Paris 1970.

18. **P. Feyerabend** : *Contre la Méthode*. Seuil/Science Ouverte. Paris 1979.

19. **D. Hilbert** : *Les fondements de la géométrie* (1899). Edition critique par Paul Rossier. Dunod. Paris 1971. Appendice IX.

20. **P. Raymond** : *Le passage au Matérialisme*. Maspéro 1973.

21. **Hilbert-Cohn-Vossen** : *Geometry and Imagination* (1932). Chelsea New-York. 1952.

22. **R. Bkouche** : op. cité. Post-scriptum.