2

ECHANGES

Etude pour les grandes valeurs, étude locale, en classe de seconde

par Raymond BARRA, IREM de Poitiers

Faire de l'analyse en seconde ne devrait pas consister à traiter des questions qui l'étaient auparavant en première ou terminale ; ainsi, par exemple, alors que le programme ne mentionne que "exemples d'approximation d'un nombre réel au moyen de suites", les commentaires définitifs parlent de convergence de suite, et des livres ou publications proposent des exercices vus autrefois au niveau première ou terminale ; on reste effaré devant un tel glissement de niveau.

Les exemples proposés ci-dessous ne sont pas inflationnistes même s'ils peuvent paraître tels de prime abord ; si l'étude pour les grandes valeurs de la variable exige de nouvelles techniques, en revanche elle n'exige ni définition ni mise en œuvre de concepts nouveaux ; quant à l'approximation locale d'une fonction par une fonction affine, l'essentiel est seulement de dire clairement pourquoi on tient tellement à une telle approximation, et de donner sur quelques exemples les idées simples de résolution.

Dans ses débuts, l'Analyse tourne essentiellement autour d'une seule et grande idée : "pour connaître une inconnue, on l'approche de plus en plus finement par des "grandeurs" connues" ; ainsi, pour connaître le développement décimal inconnu de $\sqrt{2}$, on encadre ce nombre par des nombres connus qui sont des décimaux ; pour connaître la pente de la tangente, on l'approche au mieux par les pentes des sécantes qui, elles, sont connues, et c'est la dérivation ; pour connaître une aire, on l'encadre par des aires connues, celles des rectangles, et c'est l'intégration. Techniquement, au début, l'Analyse exige que l'on sache comparer, donc manier les inégalités ; que l'on sache reconnaître ce qui est grand, ce qui est petit ; et que l'on sache distinguer ce qui est négligeable de ce qui ne l'est pas. Peut-être d'ailleurs devrait-on s'en tenir là pour le secondaire, et ce ne serait sans doute pas si mal. Quoi qu'il en soit, les titres du début, qui figurent au nouveau programme de la classe de seconde, permettent de faire de l'analyse au sens susdit, en n'utilisant que des "règles de calcul" vues en troisième, donc sans dépasser le niveau supposé de la seconde.

Le chapitre : *Etude pour les grandes valeurs* permet un travail technique intéressant et la donnée de "recettes" fort utiles, pas toujours explicitement écrites dans la littérature. Par exemple, soit à étudier, pour les grandes valeurs positives, la fonction f,

$$f(x) = 3x^2 + 5x + 1 .$$

Des essais calculatoires laissent prévoir que l'on a : $f(x) > 10^p$ pour tous les nombres x supérieurs à un certain nombre 10^m. Pour le prouver, on note que pour $x > 0$, $f(x)$ est la somme de trois termes positifs ; *et la somme de nombres positifs est supérieure à n'importe lequel d'entre eux ;* donc, pour $x > 0$, on a :

$$f(x) > 5x > x ;$$

donc, si l'on veut trouver un nombre B tel que pour $x > \mathrm{B}$ on ait : $f(x) > A > 0$, il suffit de prendre $\mathrm{B} = \mathrm{A}$.

Si on étudie le même problème avec la fonction f,

$$f(x) = 2x^2 - 5x ,$$

la technique précédente ne peut s'appliquer ; mais des essais ayant fait subodorer que $2x^2$ "l'emporte" sur $5x$, on écrit :

$$f(x) = 2x^2\left(1 - \frac{5}{2x}\right) ,$$

et on peut faire sentir expérimentalement que pour x très grand, le nombre entre parenthèses est voisin de 1, donc supérieur à $\frac{1}{2}$ par exemple ; en toute rigueur, pour $x > 10$, par exemple, on a :

$$2x > 20 ; \qquad \frac{1}{2x} < \frac{1}{20} ; \qquad \frac{-5}{2x} > -\frac{5}{20} ; \qquad 1 - \frac{5}{2x} > 1 - \frac{5}{20} > \frac{1}{2} ;$$

donc : $$f(x) > 2x^2 \times \frac{1}{2} = x^2 ;$$

et pour $x > 10$, $x^2 > x$ (car si $x > 10$, on a : $x^2 > 10x > x$) ; donc : $f(x) > x$ pour $x > 10$; et si l'on veut trouver un nombre B tel que pour $x > \mathrm{B}$, on ait $f(x) > \mathrm{A}$, il suffit de prendre $\mathrm{B} > \mathrm{A}$ et $\mathrm{B} > 10$.

Même chose avec

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 8 ,$$

par exemple ; ou avec des fonctions polynomes de degré supérieur à deux.

Il faut dire explicitement le principe directeur de ces techniques de majoration ou minoration ; c'est celui-ci :

Lorsque $f(x) > \mathrm{A}$ est "compliquée", on cherche une fonction g, plus simple, telle que l'on ait : $f > g$ (sur un intervalle $[a, +\infty[$), et on résout $g(x) > \mathrm{A}$; (ceci parce que, pour ce genre de problèmes, on n'est pas obligé d'exhiber, s'il existe, le plus petit des nombres B tels que $x > \mathrm{B}$ implique $f(x) > \mathrm{A}$). Dans le premier exemple, on pouvait travailler à partir de $f(x) > 3x^2$, mais c'eût été plus compliqué.

C'est ce principe qui guide encore la résolution du problème de l'étude pour les grandes valeurs positives de la fonction f,

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x + 2},$$

par exemple.

Après avoir *senti expérimentalement* que le numérateur l'emporte sur le dénominateur à cause de la présence de x^2, on cherche une fonction g telle que $f(x) > g(x)$ pour tous les x d'une demi-droite ; "pour minorer un rapport $\frac{a}{b}$, on remplace a par un nombre plus petit et b par un nombre plus grand lorsque $a > 0$ et $b > 0$".

Ici on note que, pour $x > 0$, on a :

$$2x^2 + 3x + 1 > 2x^2 ;$$

et que, pour $x > 1$, on a :

$$3x + 2 < 3x + 2x = 5x ,$$

donc :

$$f(x) > \frac{2x^2}{5x} = \frac{2x}{5}$$

pour $x > 1$;
ce qui permet de conclure facilement (on a aussi : $3x + 2 < 4x$ pour $x > 2$).

Il est certain que, d'abord, ces manipulations paraîtront difficiles à un débutant ; difficiles parce qu'inhabituelles (ce qui est inhabituel, c'est de reconnaître ce qui est grand, petit, important ou négligeable ; c'est de travailler seulement par condition suffisante ; c'est de majorer ou minorer ; c'est en somme de commencer à "faire de l'Analyse"). Mais d'un autre côté, si on ne lui propose pas de tels exercices, si on ne lui donne pas les principes et les règles simples utiles pour majorer ou minorer, l'élève, même lorsqu'il sera plus âgé, sera tout aussi maladroit et dérouté. Pour ces raisons, l'étude de ce chapitre vaut utilement, semble-t-il, n'importe quel autre thème du programme.

Le chapitre sur *l'approximation locale par une fonction affine* semble être là pour préparer à la notion de dérivée. La présentation de la dérivée dans les manuels de première n'est pas toujours très convaincante lorsqu'elle est du style suivant :

Soit f la fonction telle que $f(x) = x^2$; cherchons une valeur approchée de f(1,001) ; f(1,015) ; ou alors : la machine laisse prévoir qu'une valeur approchée de $f(1+h)$ est $1+2h$, quand h est petit ; or $h \mapsto 1+2h$ est une fonction affine, d'où l'idée de remplacer f par une fonction affine.

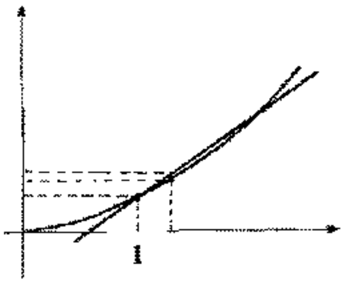
Ce début n'est pas très convaincant, car pourquoi chercher une valeur approchée de $(1{,}015)^2$ alors qu'il est très facile d'avoir l'exacte ? Il serait certainement plus convaincant de dire : calculer $f(1)$, $f(0{,}0001)$, c'est facile ; mais ça ne l'est plus si x est égal à $1+(\sqrt{6318}+\sqrt{178\,125}).10^{-8}$, par exemple ; alors que serait-ce s'il fallait calculer $g(x)$ pour cet x là, avec :

$$g(x) = 5x^4 + 10x^3 + 2x \quad ?$$

Ou de poser la question : comment la machine s'y prend-elle pour donner $(1{,}000\,85)^2$? etc.

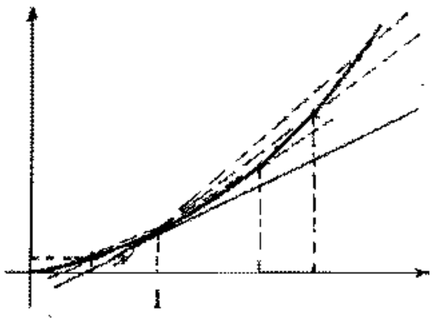
On comprendrait peut-être mieux pourquoi on a envie de trouver une fonction affine qui approche f autour du point 1, et donc que ce problème est loin d'être gratuit comme le laisse croire la recherche d'une fonction affine à l'aide de la machine.

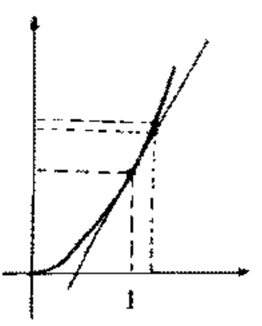
Pourquoi ne pas dire clairement que les fonctions affines sont parmi les plus "simples", et qu'alors, pour calculer plus facilement les valeurs d'une fonction autour d'un point, l'idée (merveilleuse) est de remplacer localement cette fonction par une fonction affine qui lui est très voisine ? (Graphiquement, remplacer la courbe par une droite passant par le point, c'est-à-dire par une sécante.)



Mais quelle sécante prendre ?

Graphiquement, ou par calculs, on peut se convaincre que les sécantes approchent d'autant mieux la courbe qu'elles coupent cette courbe en des points d'abscisses d'autant plus proches de 1 ; et admettre que celle qui donne la meilleure approximation est la tangente.





Pour la fonction $x \mapsto x^2$, la pente d'une sécante passant par les points $A(1,1)$ et $M(x,f(x))$ est $1+x$ (taux de variation entre 1 et x). Lorsque x est proche de 1, $1+x$ est proche de 2 (tout élève peut comprendre ça) ; et $1+x$ peut être aussi proche de 2 que l'on veut pourvu que x soit bien choisi ; donc la tangente est la droite passant par A et de coefficient directeur 2 ; f est approchée par la fonction affine g telle que $g(x) = 2x - 1$. D'où des calculs plus simples et suffisamment approchés, auxquels on peut se livrer pour vérification.

Il est inutile, voire nuisible, de définir les mots *tangente, limite*, etc. ; mais il semble utile de les employer avec leur sens naïf et primitif pour bien montrer pourquoi il y a problème et comment on le résout. *C'est là l'essentiel.*

Un autre avantage de cette présentation est que l'élève sent que la méthode peut s'appliquer à d'autres fonctions ; par exemple si $f(x) = \sqrt{1+x}$, la recherche de la fonction affine approximant f au point 0 passe par la recherche de la limite du taux de variation de f entre 0 et x ; or ce taux est $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$; et lorsque x est proche de zéro, ce taux est proche de $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ est la limite ; inutile d'en dire plus pour l'instant sur le mot *limite.* Noter que les mots *tangente, infiniment proche,* voire *limite,* figurent au vocabulaire des collègues de physique de la classe de seconde.