1

ETUDES

Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite

par Bernard CORNU, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Laboratoire de Mathématiques Pures

Dans cet article, nous proposons un parcours rapide de l'histoire de la notion de limite. Ce parcours est forcément incomplet et partial : nous avons procédé à des choix, nous avons voulu privilégier certaines étapes, certains débats. A l'origine de ce travail, il y a d'autres travaux portant sur l'acquisition de la notion de limite par les élèves et les étudiants de notre temps. Les difficultés qu'ils éprouvent, les obstacles qu'ils rencontrent, les représentations spontanées nombreuses qu'ils ont de cette notion rappellent étrangement certains obstacles rencontrés dans l'histoire de la notion de limite ; et pourtant cette histoire a été construite par des mathématiciens éminents ! Nous avons donc voulu suivre cette histoire en nous arrêtant plus particulièrement sur les obstacles fondamentaux qui ont jalonné l'élaboration du concept de limite et sur la façon dont ces obstacles ont pu être surmontés... ou contournés. Il ne s'agit pas de dire qu'il est normal que les étudiants butent sur telle difficulté sous prétexte que de grands mathématiciens ont buté eux aussi, car les conditions dans lesquelles se fait aujourd'hui l'apprentissage ne sont pas celles dans lesquelles ces mathématiciens se trouvaient. Il s'agit plutôt ici de donner les éléments qui permettront de repérer, dans l'acquisition de la notion de limite, des obstacles épistémologiques importants. Peut-être cela pourra-t-il contribuer à une évolution de nos pratiques d'enseignants !

1. On ne peut pas parler de l'histoire de la notion de limite sans évoquer les paradoxes de ZENON D'ELEE (495-430 av. J.-C.), et plus particulièrement le plus célèbre : celui d'Achille et de la tortue. Achille ne pourra jamais dépasser une tortue partie avant lui, car il devra d'abord rejoindre l'endroit où elle était lorsqu'il est parti ; mais pendant ce temps, elle a avancé jusqu'en un autre point, qu'Achille doit à nouveau atteindre ; pendant ce temps, la tortue a encore avancé..., etc. Il y aura ainsi une infinité d'étapes avant qu'Achille puisse rattraper la tortue ; cela semble impossible à réaliser en un temps fini. Les trois autres paradoxes sont du type : "On ne peut traverser un nombre infini de points en un temps fini".

ARISTOTE (384-322 av. J.-C.) a tenté, sans succès, d'expliquer ces paradoxes. Il situait le paradoxe dans la tentative de partage d'une ligne en points. Il semble que Zénon ait justement voulu montrer qu'on ne pouvait considérer une ligne comme constituée de points juxtaposés. Pour Aristote, on peut indéfiniment partager en deux une quantité ("dichotomie"), et donc l'illimité existe potentiellement, mais n'est jamais atteint (Bergson tentera de réfuter les paradoxes de façon analogue, en distinguant entre la division à l'infini conceptuelle et la division à l'infini réelle).

La notion de limite apparaît ici de façon sous-jacente, portant à la fois sur le partage à l'infini de l'espace, et du temps.

A la même époque, HIPPOCRATE DE CHIOS (430 av. J.-C.) utilise un procédé de passage à la limite pour prouver que le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport des carrés de leurs diamètres. Il inscrit dans les deux cercles des polygones réguliers semblables, et, en augmentant indéfiniment le nombre de côtés, il recouvre les deux cercles. A chaque étape, le rapport des aires des polygones inscrits est égal au rapport des carrés des rayons des cercles ; il en résulte que, "à la limite", il en est de même des aires des cercles. Ce passage à la limite, très peu explicité, sera précisé un siècle plus tard, sous la forme de la méthode d'exhaustion, due à EUDOXE DE CNIDE (408-355 av. J.-C.), sur laquelle nous allons nous arrêter un peu. Les Grecs sont extrêmement méfiants vis-à-vis de l'infini, et le "passage à la limite" d'Hippocrate de Chios ne les satisfait pas. La méthode d'exhaustion se veut beaucoup plus rigoureuse. Elle est basée sur le *Principe d'Eudoxe* (Euclide, *Eléments*, livre X, proposition 1) :

"Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées".

On pourrait, avec les concepts modernes, traduire ainsi cette proposition : soient a et ϵ deux nombres réels positifs. Soient

$$a_1 < \frac{1}{2}a\ ,\quad a_2 < \frac{1}{2}a_1\ ,\ \ldots\quad a_n < \frac{1}{2}a_{n-1}\ ,\ \ldots$$

Il existe alors N tel que $a_N < \epsilon$. Ceci résulte du principe d'Archimède : il existe un entier M tel que $M\epsilon > a$. On pose $N = M-1$, d'où $(N+1)\epsilon > a$; dans cette inégalité, on enlève ϵ au membre de gauche et on divise le membre de droite par 2, N fois.

Mais il faut noter que cette "traduction" reflète mal la pensée des anciens : ils ne faisaient référence qu'à des grandeurs, et non à des nombres, et ils ne pouvaient pas faire d'opérations sur ces grandeurs. Nous avons ici traduit le raisonnement en termes numériques, en faisant largement intervenir les opérations sur les nombres.

Du principe d'Eudoxe on déduit le principe d'*exhaustion* :

Soit un cercle C et un nombre $\epsilon>0$; il existe un polygone régulier P inscrit dans C dont l'aire $a(P)$ approche l'aire du cercle $a(C)$ à moins de ϵ : $a(C)-a(P)<\epsilon$.

En effet, soit P_1 un carré inscrit dans C , et soit P_n le polygone régulier inscrit dans C obtenu à partir de P_{n-1} en doublant le nombre de côtés. Posons $M_n=a(C)-a(P_n)$. On voit facilement que $M_{n+1}<\frac{1}{2}M_n$; on conclut alors grâce au principe d'Eudoxe.

La proposition sur le rapport des aires de deux cercles : "les cercles sont entr'eux comme les carrés de leurs diamètres" (Euclide, *Eléments*, livre XII, proposition 2) se démontre alors à l'aide d'une "Reductio ad absurdum", méthode très employée dans la géométrie grecque : soit C_1 le cercle de rayon r_1 , et C_2 le cercle de rayon r_2 . Posons $A_1=a(C_1)$, $A_2=a(C_2)$. Alors on a :

$$\text{ou bien } \frac{A_1}{A_2}<\frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \text{ou bien } \frac{A_1}{A_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \text{ou bien } \frac{A_1}{A_2}>\frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Dans le premier cas, on a :

$$A_2 > \frac{A_1 r_2^2}{r_1^2}=S\ ; \quad \text{soit } \epsilon=A_2-S>0\ .$$

Il existe un polygone P_2 inscrit dans C_2 tel que : $A_2-a(P_2)<\epsilon$, donc $a(P_2)>S$. Mais soit P_1 le polygone semblable à P_2 , inscrit dans C_1 . On a :

$$\frac{a(P_1)}{a(P_2)}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{A_1}{S}\ , \quad \text{donc } \frac{S}{a(P_2)}=\frac{A_1}{a(P_1)}>1$$

et par conséquent $S>a(P_2)$.

On a mis en évidence une contradiction. On fait de même si $\frac{A_1}{A_2}>\frac{r_1^2}{r_2^2}$. D'où le résultat.

Ainsi retranscrits, ces énoncés et ces démonstrations pourraient laisser penser qu'Euclide possédait le concept de limite. Il n'en est rien, car il manque l'unification qu'apportera le passage au domaine numérique. La méthode d'exhaustion est avant tout une méthode géométrique, qui a permis aux Grecs d'éviter le recours à l'infini dans les démonstrations. Cette méthode est encore à l'honneur chez d'Alembert (*Encyclopédie*, article "exhaustion") :

"La méthode d'exhaustion est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune autre grandeur assignable, et en employant, pour le démontrer, la réduction à l'absurde..."

"... On permet à ceux qui nient l'égalité supposée, de déterminer une différence à volonté, et on leur démontre que la différence qui existerait entre ces grandeurs (en cas qu'il y en eut) serait plus petite que la différence assignée, et qu'ainsi cette différence ayant pu être supposée d'une petitesse qui, pour ainsi dire, épuisât toute grandeur assignable, c'est une nécessité de convenir que la différence entre ces grandeurs s'évanouit véritablement...".

On trouve dans la géométrie grecque beaucoup d'autres exemples d'exhaustion (toujours liée à la "réduction à l'absurde"), pour éviter des passages à la limite, en particulier dans le calcul des rapports des volumes de deux cylindres, de deux pyramides, d'un cône et d'un cylindre, de deux sphères, etc. Aristote fait observer que les mathématiciens n'utilisent jamais des grandeurs infiniment grandes ou infiniment petites, mais se contentent de grandeurs qu'on peut rendre aussi grandes ou aussi petites qu'on veut.

ARCHIMEDE (287-212 av. J.-C.) utilise l'exhaustion pour résoudre de nombreux problèmes non triviaux : il calcule des aires et des volumes (sphère, ellipse, sections de paraboles, spirale,...). Bien souvent, il emploie avec virtuosité des méthodes astucieuses de découpage, d'équilibre, de levier. Il n'hésite pas à employer des méthodes qu'il qualifie de peu rigoureuses pour trouver des résultats nouveaux, par exemple l'aire d'une section de parabole à partir d'arguments physiques comme le centre de gravité et le principe du levier. Mais il distingue les méthodes de recherche et la preuve géométrique ; il utilise souvent l'exhaustion pour rédiger ses démonstrations.

2. Il est intéressant, dans notre parcours de l'histoire de la notion de limite, de nous arrêter un peu sur la façon dont CAVALIERI (1598-1647) aborde le problème du calcul des aires et des volumes. Avant lui, Kepler décomposait les figures (qu'elles soient planes ou dans l'espace) en figures élémentaires infinitésimales "indivisibles", et en ajoutait ensuite les aires ou les volumes. Cavalieri compare les éléments indivisibles de deux figures, et ces indivisibles sont toujours de dimension inférieure à celle des figures : une surface est formée de segments parallèles équidistants, un volume est formé de morceaux de plans parallèles et équidistants (comme un livre est formé de ses pages). Il ne s'agit pas pour lui d'une réflexion théorique, mais d'un procédé pour obtenir des énoncés opératoires permettant de calculer sur des exemples variés. Sa méthode repose sur la proposition suivante : "Si deux solides ont même hauteur, et si les sections par des plans parallèles à la base et à égale distance d'elle sont toujours dans un même rapport, alors les volumes des solides sont aussi dans ce rapport". Par exemple, si deux pyramides triangulaires ont même hauteur et même aire à la base, alors par similitude elles ont même section à même hauteur, et donc même volume. De même, en comparant un cône à base circulaire de rayon r avec la pyramide de même hauteur dont la base est un carré de côté 1, Cavalieri obtient le volume de ce cône.

Le calcul de la somme de séries est un autre pôle d'attraction pour les mathématiciens. Sans qu'on parle de limite, on résout une grande variété de problèmes, qui aboutissent à des exemples de séries dont on calcule la somme : Archimède a calculé la somme de la série de terme général $1/4^n$; ORESME (1323-1382) calcule $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots$ et la somme de la série de terme général $\frac{3^n}{4^n}$; il obtient la divergence de la série harmonique en montrant que $s_{2n}-s_n$ est plus grand que $\frac{1}{2}$. Au XVII^e^ siècle, les séries interviennent massivement. GREGOIRE DE SAINT-VINCENT (1584-1667), mathématicien belge, reprend les méthodes de dichotomie, en permettant à la subdivision de continuer "ad infinitum". Il fait ainsi le lien avec les séries, et, en particulier, il est le premier à appliquer les séries aux paradoxes de Zénon : il résout le problème de la rencontre d'Achille et de la tortue. Il utilise le mot "terminus" pour parler de la limite, et pour lui, ce "terminus" est vu comme un obstacle, un mur, qu'il est impossible d'atteindre et de dépasser. MENGOLI (1626-1686) calcule la somme de la série harmonique alternée. GREGORY (1638-1675) commence à développer certaines fonctions en série ; il introduit le terme "converge" qu'il emprunte à l'optique. MERCATOR et NEWTON obtiennent l'égalité

$$\mathrm{Log}(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots$$

Mais ce qui intéresse alors les mathématiciens est beaucoup plus le calcul des sommes de séries qu'une réflexion sur la convergence ou la divergence.

Des procédés de limite sont utilisés dans des problèmes de maximum et de minimum. Voyons par exemple ce que fait FERMAT (1601-1665) pour partager un segment de longueur b en deux segments de longueurs x et $b-x$ de produit maximum : on veut que $x(b-x)=bx-x^2$ soit maximal ; Fermat remplace x par $x+e$:

$$b(x+e)-(x+e)^2=bx+be-x^2-2xe-e^2$$

et ceci doit être peu différent de $bx-x^2$; donc $be-2xe-e^2\simeq 0$, et $b=2x+e$, c'est-à-dire $b\simeq 2x$, d'où $x=\frac{b}{2}$.

L'idée sous-jacente est qu'au voisinage d'un maximum, la fonction ne varie presque pas. Mais Fermat ne donne aucune explication sur sa méthode. En particulier, il ne demande pas que e soit petit, et il ne parle pas de prendre une limite. Son raisonnement est purement algébrique : partant de $f(x+e)=f(x)$, il divise par e , puis il prend $e=0$. Fermat utilise ce genre de méthode pour beaucoup d'autres problèmes (par exemple la construction de la tangente en un point à une courbe).

WALLIS (1616-1703) a également sa place dans l'histoire de la notion de limite ; selon Cajori (*A history of Mathematics*, page 184), "il a créé la conception arithmétique d'une limite, en considérant les valeurs successives d'une fraction obtenue dans l'étude de certains rapports ; ces valeurs s'approchent d'une valeur limite, de telle sorte que la différence devient moindre que toute différence assignable, et s'annule lorsque le procédé est poursuivi à l'infini".

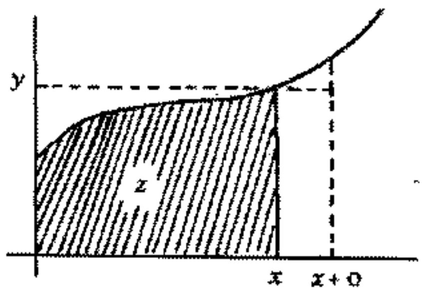
3. Chez NEWTON (1642-1727), on trouve une réflexion très approfondie sur le concept de limite. Newton est influencé à la fois par l'approche arithmétique des problèmes : il emploie abondamment les séries, et par l'approche cinématique : pour lui, une courbe est avant tout le trajet suivi par un point en mouvement, et non une juxtaposition de points. Cette double influence lui permet d'affiner la notion de limite sur le plan qualitatif, mais surtout de développer l'étude quantitative. Il ne s'intéresse pas seulement à la convergence des séries, mais à la rapidité de convergence.

Newton utilise, sans tenter de l'expliquer, la notion de mouvement instantané ; il calcule des dérivées et des intégrales au moyen du "taux de variation instantané". Par exemple, partant d'une courbe $y=f(x)$ telle que l'aire sous la courbe jusqu'à x soit

$$z=\frac{n}{m+n}a\,x^{\frac{m+n}{n}},$$

il écrit :

$$z+\text{o}y=\frac{n}{m+n}a(x+\text{o})^{\frac{m+n}{n}},$$



et, utilisant la formule du binome :

$$z+\text{o}y=\frac{n}{m+n}a\left[x^{\frac{m+n}{n}}+\frac{m+n}{n}\text{o}x^{\frac{m}{n}}+\text{o}^2(\ldots)\right],$$

d'où :

$$y=ax^{\frac{m}{n}}+\text{o}(\ldots)\ ;$$

en supprimant les termes en o , on obtient $y=ax^{m/n}$.

Dans la méthode des fluxions (1671), la notion de limite fait l'objet d'une étude approfondie. Newton considère les quantités comme engendrées par le mouvement d'un point ou d'une ligne. La quantité engendrée est appelée fluente, et la vitesse de génération est appelée fluxion (notée $\dot{x}$) :

"Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties si petites soient-elles, mais décrites d'un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées, non pas par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement continu des points, les surfaces par le mouvement des lignes... Considérant donc que les grandeurs qui croissent dans des temps égaux sont plus grandes ou plus petites selon qu'elles croissent avec une vitesse plus grande ou plus petite, je cherchais une méthode pour déterminer les grandeurs d'après les vitesses des mouvements ou accroissements qui les engendrent. En nommant fluxions les vitesses de ces mouvements, tandis que les grandeurs engendrées s'appelleraient fluentes, je suis tombé sur la méthode des fluxions".

"Les fluxions sont, aussi près que l'on veut, comme les accroissements de fluentes engendrés en de très petites particules de temps égales, et pour parler de façon précise, elles sont dans le rapport premier des accroissements naissants". *(De Quadratura Curvarum).*

$$y+\dot{y}\mathrm{o} = (x+\dot{x}\mathrm{o})^n = x^n + nx^{n-1}\dot{x}\mathrm{o} + \ldots$$

Newton en déduit que $\dot{y}\mathrm{o} = nx^{n-1}\dot{x}\mathrm{o}$, et par conséquent que $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. Il souligne que les fluxions ne doivent jamais être considérées seules, mais toujours dans leurs rapports.

Dans *De Quadratura Curvarum* (1676), Newton introduit la notion de "rapport ultime" : voyons-en un exemple. Si on change x en $x+\mathrm{o}$, quel est le "taux de variation" de x^n ?

On a :

$$(x+\mathrm{o})^n - x^n = n\mathrm{o}\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{o}^2 x^{n-2} + \ldots$$

Le rapport du taux de variation de x^n à celui de x est alors :

$$\frac{(x+\mathrm{o})^n - x^n}{\mathrm{o}} = n\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{o}\, x^{n-2} + \ldots$$

Ensuite, en faisant devenir o très petit, on obtient le rapport $n\, x^{n-1}$. Newton appelle cette valeur le rapport ultime.

Il précise que, bien que les deux quantités dont on fait le rapport tendent vers zéro, il ne s'agit pas du rapport o/o, mais de la limite du rapport :

"Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement les rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités décroissant sans limite s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près que toute différence donnée, mais qu'ils ne peuvent jamais dépasser ou atteindre avant que les quantités soient diminuées indéfiniment". (*Op. Omnia,* I, p. 251).

On notera l'importance que Newton accorde au *temps* comme variable auxiliaire. Citons encore : "Des quantités ou des rapports de quantités qui tendent constamment à l'égalité dans un temps fini, et qui, avant la fin de ce temps, s'approchent davantage l'un de l'autre que toute différence donnée, sont à la fin égaux".

Newton parle aussi de limite en géométrie : "Le rapport ultime de l'arc, de la corde, et de la tangente, l'un par rapport à l'autre, est le rapport d'égalité" ; il parle de la "forme ultime de triangles qui s'évanouissent". Mais il ne parle jamais d'arc ultime, de corde ultime, de triangle ultime. Il ne raisonne pas sur la limite de la suite des nombres représentant les rapports, mais sur les rapports eux-mêmes. Il se dégage chez Newton une évolution très nette : au début, il parle de quantités infiniment petites, ni nulles ni finies ("l'esprit", ou "l'âme", de quantités à l'instant où elles disparaissent). Ensuite, il fait intervenir la notion de fluxion, et enfin, il porte son attention sur les rapports de quantités qui s'annulent. Alors qu'au début de son œuvre, il n'hésite pas à négliger les infiniment petits, il précise par la suite qu'on ne peut négliger des quantités, aussi petites soient-elles, et que l'on doit trouver le "rapport ultime" dans lequel ces quantités infiniment petites deviennent nulles.

4. Cette vision élaborée par Newton donnera lieu à bien des débats pendant tout le XVIIIe siècle, en particulier en Grande-Bretagne : BERKELEY (1667-1745) critique Newton ; en particulier, il affirme que si les incréments s'annulent, ce ne sont plus des incréments, et que faire leur rapport n'a plus de sens : "Un point peut être la limite d'une ligne ; une ligne peut être la limite d'une surface ; un instant peut terminer le temps. Mais comment peut-on concevoir une vitesse au moyen de telles limites ? Une vitesse dépend du temps et de l'espace, et ne peut être conçue sans eux. Et si les vitesses de quantités naissantes ou qui s'évanouissent, c'est-à-dire sans lien avec le temps et l'espace, ne peuvent être comprises, comment peut-on comprendre et montrer leur rapport ; ou considérer leur rapport "premier" ou "ultime" ? Car, considérer le rapport de deux choses suppose que ces choses aient une grandeur, et que cette grandeur puisse être mesurée" (*The Analyst*, § 31). Ou encore, à propos de l'annulation de o après avoir divisé par o dans certains calculs : "Ce raisonnement ne semble pas juste ni probant. Car lorsqu'on dit que les incréments s'annulent, c'est-à-dire que les incréments ne sont plus rien, ou qu'il n'y a plus d'incréments, la supposition précédente que les incréments étaient quelque chose, ou qu'il y avait des incréments, est détruite, et cependant une conséquence de cette supposition est retenue... C'est une faute de raisonnement. Il est certain que lorsqu'on suppose que des incréments s'annulent, nous devons supposer que leurs rapports, leurs expressions, et tout ce qui découle de la suppression de leur existence, s'annule avec eux" (*The Analyst*, § 13).

John WALTON, professeur à Dublin, prendra la défense de Newton, en répliquant à Berkeley : "Dans la méthode des fluxions, on ne s'intéresse pas à la grandeur des incréments ou des décréments instantanés des quantités, mais à leur premier rapport ou à leur rapport ultime, c'est-à-dire la proportion dans laquelle elles commencent ou cessent d'exister...

Il y a des limites fixées vers lesquelles ces proportions tendent perpétuellement, et dont elles s'approchent plus que toute différence assignée, mais qu'elles n'atteignent jamais avant que les quantités elles-mêmes soient infiniment diminuées, ou avant l'instant où elles s'évanouissent et deviennent rien".

Le débat le plus célèbre de cette époque est celui qui s'instaure entre JURIN (1684-1750) et ROBINS (1697-1751), et qui porte sur le fait qu'une limite soit atteinte ou non. Pour Robins, il est clair qu'on ne peut atteindre la limite. Il donne la définition suivante : "On appelle grandeur ultime la limite de laquelle une quantité variable peut s'approcher aussi près que l'on veut, mais à laquelle elle ne peut jamais être absolument égale". Sa vision de la notion de limite semble être très liée à la notion de limite en géométrie, comme par exemple un cercle considéré comme limite de polygones réguliers. L'expression "rapport ultime" désigne pour Robins non pas un "dernier rapport" qui serait atteint, mais une limite... Au contraire, Jurin essaie de comprendre ce qui se passe à l'instant précis où une quantité s'annule : "Il ne s'agit pas que l'incrément soit *rien*, mais qu'il s'évanouisse, ou qu'il soit sur le point de s'évanouir". "Il y a un rapport dernier d'incréments qui s'évanouissent". "Un incrément naissant est un incrément qui commence à exister à partir de rien, ou qui commence à être généré, mais qui n'a pas encore atteint une grandeur que l'on peut assigner, aussi petite soit-elle". Le "rapport ultime" est donc pour Jurin le rapport atteint à l'instant où les quantités s'annulent. De même, pour Jurin, l'expression de Newton : "fiunt ultimo aequales" signifie que les quantités deviennent réellement égales, comme les aiguilles d'une horloge entre 11 heures et midi se rapprochent l'une de l'autre et finissent par coïncider. On peut citer la définition du mot *limite* que donne Jurin : "... la limite d'une quantité variable est une quantité fixée, de laquelle la quantité variable s'approche continuellement, dont elle est plus près que toute différence donnée, mais qu'elle ne dépassera jamais". Mais Jurin perçoit l'influence du temps dans la notion de limite, puisqu'il écrit encore : "Qu'une quantité ou un rapport atteigne sa limite ou ne l'atteigne pas dépend uniquement de ce qu'on suppose à propos du temps pendant lequel la quantité ou le rapport est considéré comme tendant vers ou s'approchant de sa limite". Si on suppose que l'approche se fait en un temps fini, la limite est atteinte ; sinon, elle ne l'est pas.

5. EULER (1707-1783) cherche à débarrasser le calcul de son support géométrique : les objets sur lesquels il veut travailler ne sont pas des "grandeurs" ni des êtres géométriques, mais des fonctions. Il étudie les fonctions à partir de leur expression algébrique. Pour Euler, une quantité infiniment petite est tout simplement une quantité qui devient égale à zéro : un nombre plus petit que toute quantité donnée est nul. Par conséquent, les différentielles dx et dy sont nulles. Il s'agit cependant d'étudier leur rapport, qui, lui, peut être un nombre bien défini. Euler s'intéresse au point de vue quantitatif, et pour cela il introduit plusieurs ordres d'infiniment petits : $(dx)^2$ s'annule avant dx. Cela lui permet de développer des fonctions en série et d'introduire la notion de rapidité de convergence. Il utilise ces développements pour obtenir de nombreux résultats sur les séries numériques. Par exemple, il obtient

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

en remplaçant x par -1 dans

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Il calcule

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots, \qquad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots, \text{ etc.}$$

Il s'intéresse aux séries divergentes, et à leur "vitesse de divergence" (il calcule approximativement la "constante d'Euler", obtenue à partir de l'égalité $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \mathrm{Log}(n+1) + C$ pour n assez grand).

D'ALEMBERT (1717-1783) introduit de façon précise la notion de limite, car il veut éviter les difficultés dues aux infiniment petits et aux infiniment grands. Il veut débarrasser le calcul différentiel de la "métaphysique de l'infini", et considérer l'infini comme une limite que le fini approche sans jamais l'atteindre.

"On peut du reste se passer très aisément de toute cette métaphysique de l'infini dans le calcul différentiel", "la supposition que l'on fait de quantités infiniment petites n'est que pour abréger et simplifier les raisonnements ; mais dans le fond, le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités" (*Encyclopédie,* article "Différentiel").

Il réfute les raisonnements faisant intervenir des quantités "qui s'évanouissent" : "Une quantité est quelque chose, ou rien. Si elle est quelque chose, elle ne s'est pas annulée ; si elle n'est rien, elle s'est annulée. La supposition qu'il y ait un état intermédiaire entre les deux est une chimère" (*Mélanges de littérature, d'histoire, et de philosophie,* p. 249-250). Pour lui, le concept important est celui de limite ; c'est là la "vraie métaphysique" du calcul différentiel. Il définit ainsi la limite : "On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable" (*Encyclopédie,* article "Limite"). Il insiste sur le fait qu'une quantité ne devient jamais égale à sa limite : "A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra". Il prend pour exemples le cercle, limite des polygones inscrits et circonscrits, ou encore la somme d'une progression géométrique. Il définit la "somme d'une suite" (c'est-à-dire d'une série) comme "la limite de la somme de ses différents termes, c'est-à-dire une quantité dont on approche aussi près qu'on veut, en prenant toujours dans la suite un nombre de termes de plus en plus grand". Il est cependant très réticent à l'égard des séries divergentes : "Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes me paraissent très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs" (*Opuscules Mathématiques*, 5, p. 183).

D'Alembert, en cherchant à préciser la notion de limite, est resté obnubilé par la nature géométrique des problèmes, et il n'a pas pu se ramener systématiquement au domaine numérique.

La notion de limite ainsi affinée par d'Alembert, et employée par lui pour aborder de nombreux problèmes, reste toutefois obscure pour de nombreux mathématiciens qui préfèrent continuer à travailler avec les infiniment petits. Sur 28 publications parues entre 1754 et 1784 à ce sujet, Cajori en note seulement 6 reprenant les idées de d'Alembert.

On notera enfin que le mot *limite* est aussi employé par d'Alembert pour désigner les bornes d'un intervalle.

LAGRANGE (1736-1813) n'est pas convaincu par la notion de limite. Il critique à la fois la méthode des infiniment petits, la méthode des limites ("L'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul"), la méthode des fluxions (l'idée de mouvement est étrangère au calcul). Il refuse de "considérer des quantités à l'instant où elles cessent d'être des quantités". Pour débarrasser le calcul de toute métaphysique, il cherchera à faire de l'analyse uniquement au moyen du calcul algébrique (par exemple, la dérivée sera le coefficient du terme de degré 1 dans la formule de Taylor...). Lagrange est donc l'un des principaux artisans du passage au domaine numérique, passage qui permettra l'unification du concept de limite. Pour Lagrange, la limite ne met pas en jeu l'infini ; il développe la pratique des majorations et des minorations, en particulier pour contrôler le reste d'une série. Les séries sont avant tout pour lui des objets algébriques formels. Lorsqu'on substitue des nombres aux indéterminées, se pose le problème de la convergence, et donc la nécessité d'une majoration du reste : après avoir établi la formule

$$f(x) = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2}\,f''(x-xz) + \text{ etc}\ldots ,$$

il prend soin de calculer le reste pour le cas où "on veuille s'arrêter à son premier, second, troisième, etc... terme", et il obtient par exemple :

"$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2} f'' + x^2 R$, R étant une fonction de z qui s'évanouisse lorsque $z=0$"*. Ayant ainsi travaillé dans le domaine numérique, il applique ensuite ses résultats à la géométrie et à la mécanique.

Avec FOURIER (1768-1830) et POISSON (1781-1840), la pratique du calcul se développe considérablement. L'objet principal n'est plus alors la fonction, mais le nombre : le calcul formel d'Euler et Lagrange sur les fonctions laisse place à un calcul portant sur des nombres, et par conséquent les égalités ne sont valables que sur un certain domaine. GAUSS (1777-1855) a une idée très claire de la limite, et, en 1800, il définit de façon rigoureuse la borne supérieure, la borne inférieure, la limite supérieure, la limite inférieure.

6. C'est essentiellement CAUCHY (1789-1857) qui précise le concept de limite, en réorganisant l'analyse à partir de cette notion. Pour lui, le concept de limite est le concept de base en analyse, et, dès le début de son cours à l'Ecole Royale Polytechnique, il définit la limite et introduit les opérations sur les limites : "Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus". La notion de limite ainsi mise en place intervient ensuite continuellement : la continuité est basée sur la notion de limite, et non plus sur des considérations géométriques. La dérivée, le calcul d'intégrales, sont également fondés sur la limite. De nombreux raisonnements utilisent des passages à la limite ; par exemple la recherche des fonctions $\Phi(x)$ vérifiant

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) \ :$$

après avoir obtenu l'égalité $\Phi(\frac{m}{n}\alpha) = \frac{m}{n}\Phi(\alpha)$, "en supposant que la fraction $\frac{m}{n}$ varie de manière à converger vers un nombre quelconque μ, et passant aux limites, on trouvera $\Phi(\mu\alpha) = \mu\Phi(\alpha)$. Si maintenant on prend $\alpha = 1$, on aura, pour toutes les valeurs positives de μ, $\Phi(\mu) = \mu\Phi(1)$, et, par suite, en faisant converger μ vers la limite zéro, $\Phi(0) = 0$ ".

Il faut noter cependant que Cauchy est parfois influencé par le langage des quantités infinitésimales, et qu'il traduit dans ce langage certaines propriétés. D'ailleurs, si son cours repose sur la notion de limite, ses

* N.D.L.R. Dans cette formule, fx se noterait aujourd'hui $f(x)$; f, f', f'' respectivement $f(0), f'(0), f''(0)$.

articles de recherche n'utilisent que les infiniment petits. Il appelle "infiniment petit" une variable qui a zéro pour limite. Il énonce : "La fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même".

On peut remarquer que Cauchy emploie le mot *limite* dans plusieurs sens. Dans la définition de la continuité donnée ci-dessus, le mot *limite* est employé dans le sens de "borne". Mais Cauchy utilise aussi le mot *limite* dans le sens de "point d'accumulation", et, de ce fait, la limite n'est pas toujours unique :

"Quelquefois, tandis qu'une ou plusieurs variables convergent vers des limites fixes, une expression qui renferme ces variables converge à la fois vers plusieurs limites différentes les unes des autres. Nous indiquerons alors une quelconque de ces dernières limites à l'aide de doubles parenthèses placées à la suite de l'abréviation *lim*, de manière à entourer l'expression que l'on considère .... l'expression *lim* $((\frac{1}{x}))$ admet deux valeurs savoir, $+\infty$, $-\infty$, et *lim*$((\sin\frac{1}{x}))$ une infinité de valeurs comprises entre les limites -1 et $+1$". (*Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique,* page 26).

7. A partir de Cauchy, alors qu'en Allemagne la notion de limite s'implante solidement avec Dirichlet, Riemann, Weierstrass, il faudra, en France, attendre Darboux pour que les idées de Cauchy soient reprises. Au XIX^e siècle, de nombreux problèmes sur les séries et sur l'intégration seront résolus (Riemann par exemple définit l'intégrale comme limite de sommes). WEIERSTRASS (1815-1897) donne une formulation purement "statique" et arithmétique du concept de limite. Il écrit la définition de la limite sous la forme que nous connaissons actuellement : pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que... C'est à partir de cette définition que l'analyse mathématique se développe par la suite. Toutefois, certaines ambiguïtés sur différents sens du mot *limite* vont persister, en particulier dans bien des ouvrages scolaires. On lit, dans l'ouvrage *Questions inédites relatives aux examens de l'Ecole Polytechnique* (E. Duchesne, 1836) :

"— Qu'appelle-t-on limites des racines d'une équation ?

— Des nombres entre lesquels sont comprises toutes les racines de l'équation.

— Y a-t-il quelque analogie entre les limites des racines d'une équation et les limites géométriques ?

— Oui, parce que les racines d'une équation peuvent différer d'aussi peu qu'on voudra de leurs limites, sans jamais leur être égales ; de même les surfaces de deux polygones inscrits et circonscrits à un cercle, peuvent s'approcher autant qu'on veut de la surface du cercle, mais ne peuvent jamais lui devenir rigoureusement égales".

Conclusion :

A l'issue de ce rapide parcours de l'histoire de la notion de limite, on peut formuler un certain nombre d'observations. Tout d'abord, une question se pose : on aurait pu penser, au vu des travaux des géomètres grecs, que la notion de limite serait mise en place plus rapidement et avec moins de détours. La méthode d'exhaustion, le principe d'Eudoxe, peuvent paraître assez proches, sur le plan conceptuel, de la notion actuelle de limite. Il y manque pourtant l'unification des grandeurs et la transposition des problèmes dans le champ numérique. Il a fallu un immense détour, et de nombreux débats à propos de l'infini, des infiniment petits, des infiniment grands. Ce qui semble être à l'origine de ces obstacles, c'est la difficulté de passer de la géométrie et de la mécanique au domaine numérique, la difficulté de ramener les problèmes de limite à des problèmes sur des nombres. La vision géométrique a orienté les mathématiciens vers la conception infinitésimale, et par conséquent vers des débats sans fin sur le statut d'une quantité qui devient nulle ou infinie. La vision dynamique introduite par Newton a été l'une des tentatives pour quitter le champ géométrique.

Elle a permis de s'intéresser à la comparaison de quantités qui s'annulent, c'est-à-dire à leur rapport. Mais le débat s'est à nouveau engagé sur la signification d'un "rapport limite", sur l'existence par exemple d'une vitesse instantanée. On note cependant qu'en analyse, ce sont des problèmes de calcul de dérivée qui sont à l'origine des progrès sur la notion de limite. Car c'est dans le calcul différentiel que la limite apparaît comme indispensable. Il est assez curieux de constater qu'on a voulu étudier de très près la notion de limite d'un rapport, sans que l'on ait cherché à définir de façon précise la limite d'une quantité variable. Cela ressemble un peu à ce qui se passe aujourd'hui lorsqu'on emploie des expressions comme "$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers 0" sans avoir donné un sens précis à l'expression "x tend vers 0" parce qu'il nous semble que ça va de soi...

Il faut noter également que ce qui a permis au concept de limite de prendre forme petit à petit, c'est la façon dont il a dû fonctionner. Les mathématiciens ont eu à résoudre des problèmes, et pour cela il leur a fallu développer un outil. Mais ce qui les a intéressés n'est pas tant l'aspect conceptuel que l'aspect de l'efficacité pour des problèmes quantitatifs. Les infiniment petits ont alimenté de longs débats d'ordre qualitatif ; mais c'est le besoin de résoudre des problèmes d'approximation, de convergence, de vitesse de convergence, de majoration de restes de séries, qui a donné naissance au concept tel que nous le connaissons aujourd'hui.

Bibliographie

On peut trouver une bibliographie abondante sur l'histoire de l'analyse dans le Bulletin Inter-IREM n° 18 (*Histoire des Mathématiques et Epistémologie*) et dans le Bulletin Inter-IREM n° 20 (*Enseignement de l'Analyse*). Nous donnons ci-dessous les ouvrages principaux auxquels nous nous sommes référés.

Textes historiques :

— d'ALEMBERT - *Encyclopédie*

— CAUCHY A. - *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique.* OEuvres complètes II^e série, tome III. Gauthier-Villars 1847

— EUCLIDE - *Les OEuvres d'Euclide,* traduites par F. Peyrard-Blanchard 1966

— EULER - *Introduction à l'analyse des infiniment petits.* OEuvres complètes.

— LAGRANGE J.L. - *Théorie des fonctions analytiques.*

— NEWTON I. - *Méthodes des fluxions et des suites infinies.*

Autres ouvrages :

— BARON Margaret E. - *The Origins of the Infinitesimal Calculus.* Pergamon Press 1969.

— BOURBAKI N. - *Eléments d'Histoire des Mathématiques.* Hermann 1969.

— BOYER Carl - *The History of the Calculus and its conceptual development.* Dover Publ. 1959.

— CAJORI Florian - *A History of mathematics,* 3^e édition. Chelsea Publ. Comp. 1980.

— CAJORI Florian - *A History of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse.* Open Court Publ. Comp. 1919.

— COLLETTE J.-Paul - *Histoire des Mathématiques.* Vuibert/ERPI 1979

— CORNU Bernard - *Interférence des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limite.* Séminaire de Recherche Pédagogique, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, n° 8, 1980.

— DHOMBRES Jean - *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire.* CEDIC/Fernand Nathan 1978.

— EDWARDS C.H. - *The Historical Development of the Calculus. Springer-Verlag 1979.*

— HOUZEL, OVAERT, RAYMOND, SANSUC - *Philosophie et calcul de l'infini.* Maspero 1976.

— KLINE M. - *Mathematical thought from Ancient to Modern times.* Oxford University Press 1972.