

1

ÉTUDES

L'œuf géométrique

par E. EHRHART, Strasbourg.

De toutes les formes que l'on rencontre dans la nature, celle de l'œuf d'oiseau est sans doute la plus simple. Il saute aux yeux que c'est un corps convexe de révolution. On voit aussi que la courbure d'un méridien passe juste par deux maxima, aux sommets du corps, et que ces maxima sont inégaux. Depuis longtemps on a voulu parfaire cette caractérisation, en cherchant pour le profil de l'œuf une courbe approchée de définition précise. Voici quelques-unes des solutions proposées. L'ove excepté, il s'agit toujours d'un ovale symétrique à trois paramètres, qui permettent de l'adapter au mieux à un œuf particulier.

1) **Ovale de Descartes.** En 1849 déjà J. Steiner et G. Fechner proposaient cet ovale, dont l'équation en coordonnées bipolaires est

$$r + mr' = a.$$

Les trois paramètres sont la distance b des pôles et les constantes positives m et a . Les rayons de courbure ρ , ρ' , aux sommets de la courbe vérifient [1]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{m}{a-b} + \frac{1}{a+mb}, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{m}{a+b} + \frac{1}{a-mb}.$$

2) **Ovale de Newton.** Dans la théorie des cubiques planes, celle d'équation

$$cy^2 = x(a-b)(x+b)$$

joue un rôle important. Comme elle se compose d'une branche parabolique (cloche) et d'un ovale, Newton l'appelle "parabola campaniformis cum ovali".

Le volume de l'ovoïde de révolution correspondant, l'abscisse de son centre de gravité et les rayons de ses sphères ombilicales sont [2]:

$$V = \frac{\pi a^3}{12c} (a+2b), \quad x_G = \frac{a}{5}, \quad \frac{3a+5b}{a+2b}, \quad \lambda = \frac{ab}{2c}, \quad \lambda' = \frac{a(a+b)}{2c}.$$

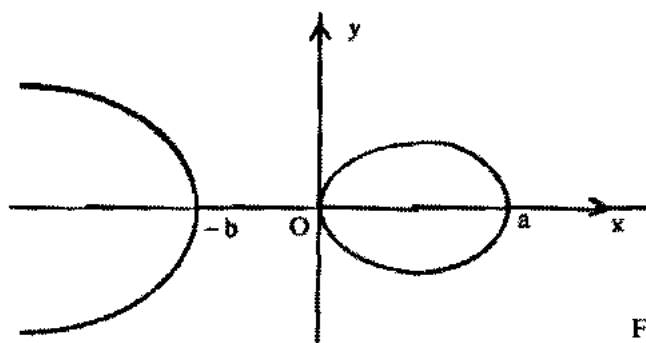


Fig. 1

3) **Ovale torique.** Si l'on coupe un tore par un plan parallèle à l'axe et suffisamment près, on obtient deux ovales égaux, de même largeur que le tore.

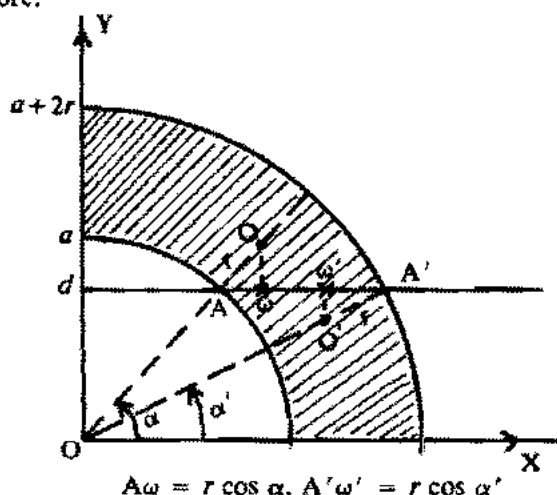


Fig. 2

$$A\omega = r \cos \alpha, \quad A'\omega' = r \cos \alpha'$$

Avec les notations de la figure les rayons de courbure de l'ovale en ses sommets A et A' sont

$$\rho = r \cos \alpha, \quad \rho' = r \cos \alpha'$$

car d'après le théorème de Meunier (voir la figure 2), les centres de courbure ω et ω' en ces points sont les projections sur le plan $Y=d$ des centres O et O' des sections axiales du tore qui passent par A et A'.

Signalons en passant que l'ovale torique a déjà été examiné dans l'Antiquité (Perseus, 130 av. J.C.).

4) **Ove.** "L'ove est un ornement architectural courant en forme d'œuf" dit mon dictionnaire. Construit à partir d'un triangle rectangle isocèle ABA', cet ovale ne dépend que d'un seul paramètre. Il se compose de quatre arcs de cercle se raccordant : le demi-cercle $\widehat{AA'}$, \widehat{AC} de centre A' et son symétrique $\widehat{A'C'}$, $\widehat{CC'}$ de centre B.

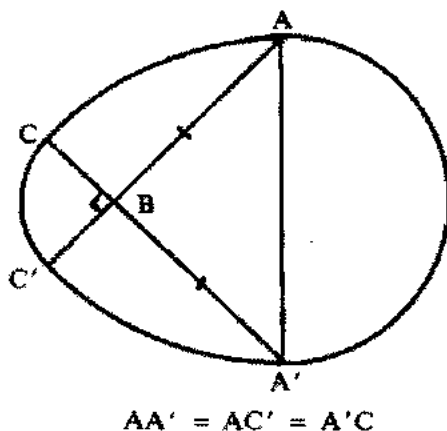


Fig. 3

5) **Ovale trifocal.** Dans l'Information Scientifique le naturaliste Sire a tracé le profil moyen statistique de l'œuf de poule, obtenu à partir d'un lot d'œufs "sensiblement de même taille" (avril 1956). Dans la même revue (décembre 1957) et sous le même titre "L'œuf de poule a-t-il une forme géométrique?", nous avons montré que ce profil coïncide, à l'épaisseur du trait de crayon près, avec le lieu des points dont la somme des distances à trois points fixes alignés est constante, pour des valeurs convenables de trois paramètres. Ce profil (on pourrait l'appeler *hyperellipse à trois foyers*) relève d'une très simple construction par fil [3] :

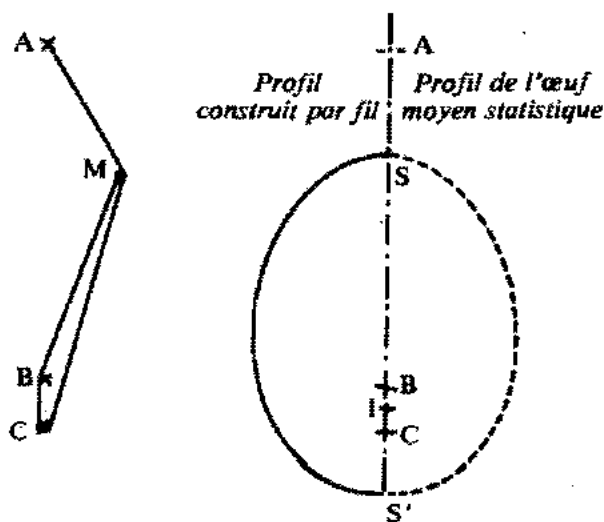


Fig. 4

Ainsi, fait capital, l'œuf moyen a une surface trifocale, à l'épaisseur de la coque près. Cela reste vrai pour l'œuf d'autres espèces. Plus explicitement, bien approché *l'œuf d'oiseau est un hyperellipsoïde de révolution à trois foyers*.

Il est plaisant d'observer, que si l'on désigne par h la hauteur de l'œuf de poule, par p le périmètre de son profil et par e la base des logarithmes naturels, on a avec une bonne approximation

$$p = e h$$

analogue à $p = \pi h$ pour la sphère.

Notons que les rayons des sphères ombilicales de l'œuf trifocal (avec deux foyers intérieurs et un extérieur) sont donnés par [5] :

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{SA} + \frac{1}{SB} + \frac{1}{SC}, \quad \frac{3}{p'} = \frac{1}{S'A} + \frac{1}{S'B} + \frac{1}{S'C}$$

et que, quel que soit par ailleurs le choix des paramètres, le milieu I de BC vérifie $S'I = \frac{S'S}{4}$.

Références bibliographiques

- [1] G. Fechner : *Die mathematische Behandlung organischer Prozesse*, Sächs. Ges. Wiss. (1849).
- [2] W. Wunderlich : *Zur Geometrie der Vogeleier*, Comptes rendus de l'Ac. des Sc. d'Autriche (1979).
- [3] E. Ehrhart : *Le proximal de n points*, Bulletin A.P.M.E.P. 330 (1981).
- [4] F. Preston : *The shapes of birds'eggs*, Auk 85 (1968).
- [5] E. Ehrhart : *Hyperellipses*, Revue de Math. Spé. (mai 1982).