Bulletin de l'APMEP n°332 - Février 1982

1

ETUDES

Quelques triangles analogues à celui de Pascal*

par Jean DE BIASI, Toulouse

1. Introduction

Rappelons que le nombre noté $\binom{n}{p}$ ou C_n^p est le cardinal de l'ensemble des p-parties d'un n-ensemble. Comme il est défini et non nul pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p \leqslant n$ (considérer que pour tout $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$) il engendre, lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, une suite double généralement présentée dans un tableau où n est indice de ligne et p indice de colonne et ayant par suite la forme d'un triangle connu sous le nom de triangle de PASCAL.

Grâce à la relation

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}} \qquad (R_p)$$

et aux valeurs initiales

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N})$$

* Cet article a été publié, sous une forme voisine, par l'IREM de Toulouse en octobre 1980.

ce triangle se construit aisément comme l'indique le schéma suivant :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Chaque nombre est égal à la somme de celui qui est au-dessus et de celui qui est au-dessus à gauche.

Beaucoup de problèmes de dénombrement conduisent à l'étude de nombres U_p^n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}_*$, $0 \leqslant p \leqslant n$ ou $1 \leqslant p \leqslant n$) vérifiant des relations récursives triangulaires du type

$$\boxed{U_p^n = \alpha(p,n)\, U_{p-1}^{n-1} + \beta(p,n)\, U_p^{n-1}} \qquad (R_t)$$

généralisations de la relation (R_p) précédente et pouvant dans ces conditions être présentés dans des tableaux comparables à celui de Pascal. Nous allons en donner quelques exemples.

Nous aurons souvent à utiliser un n-ensemble et comme seul son cardinal interviendra, nous prendrons l'intervalle d'entiers $[1,n]$ aussi noté I_n.

2. Les nombres de Stirling de première espèce

2.1. Définition : *Le nombre des permutations de* $I_n = [1,n]$ *se décomposant en p-orbites est appelé nombre de Stirling de première espèce et est noté* s_p^n.

(Les orbites de la permutation $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,2\,5\,6\,1\,4 \end{pmatrix}$ sont 1 3 5 , 2 , 4 6).

2.2. Relation récursive triangulaire

Soit π une permutation de I_n ayant p orbites.

La suppression de n donne :

Si n est un point fixe (orbite de longueur 1), une permutation de I_{n-1} ayant $p-1$ orbites.

Si n appartient à une orbite de longueur $\geqslant 2$, et si l'on pose $\pi'(\pi^{-1}(n))=\pi(n)$, une permutation π' de I_{n-1} ayant p orbites.

Inversement, pour former une permutation π de I_n ayant p orbites, on peut partir

soit d'une permutation π' de I_{n-1} ayant $p-1$ orbites et ajouter l'élément n formant à lui tout seul une orbite (point fixe),

soit d'une permutation π' de I_{n-1} ayant p orbites et introduire n dans l'une d'entre elles (en posant, si n se place entre i et $\pi'(i)$, $\pi(i)=n$ et $\pi(n)=\pi'(i)$), ce qui est faisable de $n-1$ façons puisque sur des orbites il y a autant d'intervalles que de points.

Il en découle la relation :

$$\boxed{s_p^n = s_{p-1}^{n-1} + (n-1)\, s_p^{n-1}} \qquad (R_s)$$

qui permet, grâce aux valeurs initiales, $s_1^n = (n-1)\,!$

(s_1^n est le nombre de permutations *circulaires* de I_n que l'on peut compter en remarquant que dans une telle permutation π il y a $n-1$ choix possibles pour $\pi(1)$, $n-2$ pour $\pi^2(1)$ ..., 1 pour $\pi^{n-1}(1)=\pi^{-1}(1)$)

de construire le tableau suivant :

2.3. Tableau des nombres s_p^n

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	2	3	1				
4	6	11	6	1			
5	24	50	35	10	1		
6	120	274	225	85	15	1	
7	720	1764	1624	735	175	21	1

Chaque nombre est égal à celui qui est au-dessus à gauche augmenté du produit par son indice de ligne de celui qui est au-dessus.

2.4. Remarques

a) *Autre définition des nombres* s_p^n

Le produit $<x>_n = x(x+1)\ \dots\ (x+n-1)$ est un polynome en x de degré n :

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} \alpha_p^n x^p .$$

Or manifestement

$$\alpha_1^n = (n-1)\,!$$

et comme

$$<x>_n = <x>_{n-1}(x+n-1) = \Big(\sum_{1 \leqslant p \leqslant n-1} \alpha_p^{n-1} x^p\Big)(x+n-1)$$

$$\alpha_p^n = \alpha_{p-1}^{n-1} + (n-1)\,\alpha_p^{n-1}$$

et par suite :
Le nombre de Stirling de première espèce s_p^n *est le coefficient de* x^p *dans le développement du produit* $x(x+1)\ \dots\ (x+n-1)$.

b) *Les nombres de Stirling de première espèce* $\mathscr{s}_p^n$

• Fréquemment sont appelés nombres de Stirling de première espèce les nombres $\mathscr{s}_p^n$ coefficients de x^p dans le développement du produit $(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

$$(x)_n = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} \mathscr{s}_p^n x^p$$

• Ces nombres vérifient les relations

$$\mathscr{s}_p^n = \mathscr{s}_{p-1}^{n-1} - (n-1)\,\mathscr{s}_p^{n-1}$$

$$\mathscr{s}_1^n = (-1)^{n-1}(n-1)\,!$$

$$\mathscr{s}_p^n = (-1)^{n+p}\, s_p^n$$

et leur tableau se déduit de celui des s_p^n en affectant du signe $-$ tous les nombres tels que $n+p$ soit impair.

• En fait si l'on part des nombres $\mathscr{s}_p^n$, on a tout simplement

$$s_p^n = |\mathscr{s}_p^n|$$

3. Les nombres de Stirling de deuxième espèce

3.1. Définition : *Le nombre des p-partitions d'un n-ensemble est appelé nombre de Stirling de deuxième espèce et se note* S_p^n .

3.2. Relation récursive triangulaire

En remarquant que parmi les p-partitions de I_n celles pour lesquelles un élément déterminé, par exemple n, de I_n est tel que $\{n\}$ en constitue un élément, sont au nombre de S_{p-1}^{n-1} et que les autres sont au nombre de $p\,S_p^{n-1}$, on voit que

$$\boxed{S_p^n = S_{p-1}^{n-1} + p\,S_p^{n-1}} \qquad (R_S)$$

Comme par ailleurs, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$S_1^n = 1$$

il est facile d'en déduire une construction du tableau suivant:

3.3. Tableau des nombres S_p^n

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

Chaque nombre est égal à la somme de celui qui est au-dessus à gauche et du produit par son indice de colonne de celui qui est au-dessus.

3.4. Les nombres de Stirling 2-associés de deuxième espèce

a) **Définition :** *Le nombre des p-partitions d'un n-ensemble en parties toutes de cardinal supérieur ou égal à 2 est appelé nombre de Stirling 2-associé de deuxième espèce du premier type et il est noté $S_{2,p}^n$.*

b) **Relation récursive oblique**

En distinguant parmi les p-partitions de I_n de ce type celles pour lesquelles n appartient à une partie de cardinal 2 en nombre

$(n-1)\,S_{2,p-1}^{n-2}$ de celles pour lesquelles n appartient à une partie de cardinal $\geqslant 3$ en nombre $pS_{2,p}^{n-1}$, on obtient la relation :

$$S_{2,p}^{n} = (n-1)\,S_{2,p-1}^{n-2} + pS_{2,p}^{n-1}$$

c) **Les nombres de Stirling 2-associés de deuxième espèce du deuxième type W_p^n**

La relation précédente a l'inconvénient de ne pas être de la forme triangulaire (R_t). Il est alors classique d'introduire le nombre W_p^n défini par

$$W_p^n = S_{2,p}^{n+p}$$

et donc égal au nombre des p-partitions d'un $n+p$-ensemble en parties, toutes de cardinal supérieur ou égal à 2.

De la relation vérifiée par les $S_{2,p}^n$ se déduit pour les W_p^n la relation

$$\boxed{W_p^n = (n+p-1)\,W_{p-1}^{n-1} + pW_p^{n-1}} \qquad (R_W)$$

qui est bien du type R_t et qui permet grâce aux valeurs initiales de construire le tableau suivant.

Tableau des W_p^n

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	3					
3	1	10	15				
4	1	25	105	105			
5	1	56	490	1260	945		
6	1	119	1918	9450	17225	10395	
7	1	246	6825	56980	190575	270270	135135

4. Nombre des applications surjectives d'un n-ensemble sur un p-ensemble

Il n'existe évidemment de telles applications que si $n \geqslant p$.

Leur nombre est noté σ_p^n.

4.1. Relation récursive triangulaire

En distinguant parmi les applications surjectives φ de I_n sur I_p celles pour lesquelles $|\varphi(I_{n-1})|=p-1$ en nombre $p\sigma_{p-1}^{n-1}$ (puisque à chacune des p possibilités pour $\varphi(n)$ correspondent σ_{p-1}^{n-1} applications surjectives de I_{n-1} sur $I_p \setminus \{\varphi(n)\}$) de celles pour lesquelles $\varphi(I_{n-1})=I_p$ en nombre $p\sigma_p^{n-1}$ (à toute application surjective de I_{n-1} sur I_p correspondent p possibilités pour $\varphi(n)$) on obtient la relation (valable même pour $n=p$ en prenant $\sigma_p^{n-1}=0$)

$$\sigma_p^n = p\,(\sigma_{p-1}^{n-1}+\sigma_p^{n-1}) \qquad (R_\sigma)$$

4.2. Relation entre σ_p^n et S_p^n

Si toute application surjective de I_n sur I_p définit une p-partition de I_n formée par les images réciproques par φ dans I_n des éléments de I_p, inversement toute p-partition $A_1, A_2 \dots A_p$ de I_n définit $p!$ surjections de I_n sur I_p en posant $\varphi(A_1)=i_1$, $\varphi(A_2)=i_2 \dots \varphi(A_p)=i_p$ où $(i_1, i_2 \dots i_p)$ est une permutation quelconque de I_p ; il en découle l'égalité :

$$\boxed{\sigma_p^n = p!\,S_p^n}$$

qui permettrait de retrouver (R_σ) à partir de R_S et qui est bien en accord avec une autre interprétation du nombre σ_p^n comme nombre des p-partitions de I_n ordonnées par l'ordre des parties.

4.3. Tableau des σ_p^n

Il se construit grâce à R_σ et aux valeurs initiales

$$\sigma_1^n=1 \qquad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1$$

n \ p	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	2					
3	1	6	6				
4	1	14	36	24			
5	1	30	150	240	120		
6	1	62	540	1560	1800	720	
7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040

Chaque nombre est égal au produit par son indice de colonne de la somme des deux nombres situés au-dessus et au-dessus à gauche.

4.4. Compléments

a) Formule sommatoire pour σ_p^n

Toute application de I_n dans I_p étant une application surjective de I_n sur son ensemble image, on a l'égalité

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant p} \binom{p}{k} \sigma_k^n = p^n$$

obtenue en exprimant de deux manières différentes le nombre total des applications de I_n dans I_p.

Les égalités analogues à cette dernière, obtenues pour $0, 1, 2 \ldots p-1, p$, s'écrivent matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_0^n \\ \sigma_1^n \\ \sigma_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^n \\ 1^n \\ 2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p^n \end{pmatrix}$$

Or, avec les valeurs particulières x et y liées par l'égalité $y = 1 + x$, on a :

$$y^k = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \binom{k}{i} x^i$$

$$\text{et} \quad x^k = (y-1)^k = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} y^i \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant p \, ,$$

ce qui montre que la matrice inverse de la matrice de Pascal Π est la matrice Π^{-1} de terme général $(-1)^{j-i} \binom{i}{j}$ (Π^{-1} s'obtient à partir de Π en affectant du signe $-$ tous les termes (situés sur des parallèles à la diagonale principale) tels que la différence des indices soit impaire).

Cette expression de Π^{-1} permet d'obtenir la valeur

$$\boxed{\sigma_p^n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n}$$

(En fait la sommation peut évidemment commencer à 1). Par exemple :

$$\sigma_1^n = 1 \;\; ; \;\; \sigma_2^n = 2^n - 2 \;\; ; \;\; \sigma_3^n = 3^n - 3.2^n + 3 \;\; ;$$
$$\sigma_4^n = 4^n - 4.3^n + 6.2^n - 4 \quad \text{etc.}$$

(*Remarque* : La formule précédente écrite dans le cas où les 2 indices ont une valeur égale notée $n-1$ s'écrit :

$$(n-1)! = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{n-1}{k} k^{n-1}$$
$$= (-1)^{n-1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^{n-1}$$

Si n est premier *impair*, on a $(-1)^{n-1} = 1$; de plus, le petit théorème de Fermat implique $k^{n-1} \equiv 1 \quad [n]$. Il en résulte :

$$(n-1)! \equiv \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \qquad [n]$$
$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} - 1 = -1$$

c'est-à-dire

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \qquad [n]$$

qui n'est autre que le *théorème de Wilson*, lequel se déduit donc, grâce à la formule sommatoire précédente, du petit théorème de Fermat).

b) Expression de σ_p^{p+n} à l'aide des sur-polynomes

Pour une application surjective de l'ensemble I_{p+n} sur l'ensemble I_p, k éléments $(1 \leqslant k \leqslant p$ si $n > 0$ et $k = 0$ si $n = 0)$ de I_p ont plus d'un antécédent dans I_{p+n} et $p-k$ en ont exactement un. Une telle application surjective se définit donc comme suit :

• Choisir $p + n - (p-k) = n + k$ éléments de I_{p+n} [de $\binom{p+n}{n+k}$ façons]

• Effectuer une partition de l'ensemble de ces éléments en k classes non ponctuelles (de W_k^n façons).

• Associer bijectivement à l'ensemble ayant pour éléments ces k classes et les $p-k$ éléments restants dans I_{p+n} les p éléments de I_p (de $p!$ façons). Il en résulte :

$$\sigma_p^{p+n} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} W_k^n \frac{(p+n)!\, p!}{(n+k)!(p-k)!}$$
$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(W_k^n \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(n+k)!} \right) (p+n)! = s_n(p).(p+n)!$$

où $s_n(p)$ est un polynome en p de degré n.

Mais $s_n(p)$ a des coefficients qui ne sont pas nécessairement entiers, caractère qui en combinatoire n'est pas "agréable". Comme les nombres W_k^n, eux, sont entiers et que pour $k \in [0,n]$ il en est de même pour $\frac{(2n)!}{(n+k)!}$, il suffit de considérer

$$\sigma_n(p) = (2n)!\, s_n(p)$$

pour obtenir l'expression

$$\boxed{\sigma_p^{p+n} = \sigma_n(p)\ \frac{(p+n)!}{(2n)!}}$$

où $\sigma_n(p)$ est un polynome à coefficients entiers.

Ce résultat et la relation, déduite de (R_σ), vérifiée par les polynomes $\sigma_n(x)$ et permettant de les calculer à partir de $\sigma_0(x) = 1$ est résumée dans le

Théorème : *Le nombre σ_p^{p+n} des applications surjectives d'un $p+n$ ensemble sur un p-ensemble est égal à*

$$\sigma_n(p)\ \frac{(p+n)!}{(2n)!}$$

où $\sigma_n(x)$ est un polynome de degré n en x défini par la donnée de $\sigma_0(x) = 1$ et par l'égalité fonctionnelle

$$\boxed{(n+x)\sigma_n(x) - x\sigma_n(x-1) = 2n(2n-1)x\sigma_{n-1}(x)}$$

Les $\sigma_n(x)$ sont appelés SUR-POLYNOMES. Voici les 6 premiers :

$\sigma_0(x) = 1$ $\quad$ $\sigma_1(x) = x$ $\quad$ $\sigma_2(x) = 3x^2 + x$

$\sigma_3(x) = 15x^3 + 15x^2$

$\sigma_4(x) = 105x^4 + 210x^3 + 35x^2 - 14x$

$\sigma_5(x) = 945x^5 + 3150x^4 + 1575x^3 - 630x^2$

c) Les première et deuxième matrices de Stirling s et S

Des relations

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \binom{p}{k} \sigma_k^n = p^n \qquad \text{et} \qquad \sigma_k^n = k!\, S_k^n$$

découle l'égalité

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant p} S_k^n\,(p)_k = p^n$$

[que l'on retrouve d'ailleurs directement en remarquant que l'on obtient toutes les applications de I_n dans I_p (en nombre p^n) en considérant toutes les k-partitions (en nombre S_k^n) de I_n $(1 \leqslant k \leqslant n)$ et en "envoyant" injectivement (de $(p)_k$ façons) leurs k parties dans I_p]

qui, étant vraie pour $p=0$, $p=1$, ..., $p=n$, implique l'égalité suivante vraie pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k^n (x)_k = x^n$$

laquelle, comparée à la relation de définition des nombres s_p^n, implique la

Proposition : *Les première et deuxième matrices de Stirling, s et S (limitées à un même ordre quelconque n) sont inverses l'une de l'autre.*

Ainsi par exemple à l'ordre 5 il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 11 & -6 & 1 & 0 \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Les nombres de Lah

5.1. Définition. *Le nombre des p-partitions de I_n ordonnées par l'ordre des termes est appelé nombre de Lah et il est noté l_p^n.*

[Des partitions de cette nature peuvent donc différer par la nature des parties ou par l'ordre des termes mais pas par l'ordre des parties. Ainsi par exemple : $(1,3,4)(2,5)(6) \neq (1,4,3)(2,5)(6) = (2,5)(6)(1,4,3)$.]

Nous écrirons en abrégé partitions $0.t$ (pour ordonnées par l'ordre des termes) pour de telles partitions.

5.2. Relation récursive triangulaire

Si dans une p-partition $0.t$ de $[1,n]$ on supprime l'élément n on obtient

si n est seul dans sa partie, une $p-1$ partition $0.t$ de $[1,n-1]$
sinon, une p-partition $0.t$ de $[1,n-1]$.
Inversement :

Si l'on considère une $(p-1)$-partition $0.t$ de I_{n-1}, et si l'on introduit l'élément n, comme l'ordre des parties n'intervient pas, il n'y a qu'une manière, en ajoutant la partie $\{n\}$, d'en déduire une p-partition $0.t$ de I_n.

Si l'on considère une p-partition $0.t$, $\mathcal{T}$, de I_{n-1}, les p-parties étant rangées dans un ordre indifférent mais fixé et si l'on veut intégrer l'élément n de façon à n'avoir toujours que p parties, il faut l'incorporer à l'une quelconque des parties déjà existantes, ce qui revient à le placer dans l'un quelconque des n intervalles formés par les $n-1$ nombres de I_{n-1} rangés par

$\mathcal{T}$ en remarquant bien que lorsque n est placé entre le dernier élément de la partie P_i et le premier de P_{i+i} il y a deux possibilités de l'incorporer, soit à P_i, soit à P_{i+1}, d'où $n+p-1$ possibilités en tout.

Il en découle la relation :

$$l_p^n = l_{p-1}^{n-1} + (n+p-1)\, l_p^{n-1} \qquad (R_l)$$

5.3. Tableau des l_p^n

Il se construit grâce à (R_l) et aux valeurs évidentes $l_1^n = n\,!$

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	2	1					
3	6	6	1				
4	24	36	12	1			
5	120	240	120	20	1		
6	720	1800	1200	300	30	1	
7	5040	15120	12600	4200	630	42	1

5.4. Valeur de l_p^n

Pour former les p-partitions 0.t de I_n on peut procéder comme suit : considérer n points alignés formant donc n-1 intervalles ; choisir $p-1$ de ces $n-1$ intervalles (de $\binom{n-1}{p-1}$ façons) qui délimitent les p "récipients" des futures parties ; distribuer les n éléments de I_n, un par point (de $n!$ façons) ; ne pas tenir compte de l'ordre des parties, ce qui revient à regrouper les partitions obtenues par paquets de $p!$ et à les identifier dans chaque paquet (d'où une division par $p!$)

Il en résulte la valeur :

$$\boxed{l_p^n = \frac{n!}{p!}\binom{n-1}{p-1}}$$

6. Les nombres b_p^n

Les nombres σ_p^n comptent les p-partitions de I_n ordonnées par l'ordre des parties. Les nombres l_p^n comptent les p-partitions de I_n ordonnées par l'ordre des termes. En réunissant les deux caractères on obtient la

6.1. Définition : *On appelle p-partitions barrées de* I_n *les p-partitions de* I_n *ordonnées à la fois par l'ordre des parties et par l'ordre des termes. Leur nombre se note* b_p^n .

(exemple : 231/5/46 ; 312/5/46 ; 5/312/46 etc.)

(Remarque : il serait plus correct de les appeler partitions bi-ordonnées mais une certaine tradition semble vouloir imposer les barres).

6.2. Relation récursive triangulaire - valeur - tableau

Par des raisonnements analogues aux précédents, à la seule différence que, l'ordre des parties intervenant, la division par p! disparaît, on obtient :

$$\boxed{b_p^n = p b_{p-1}^{n-1} + (n+p-1) b_p^{n-1}} \quad (R_b) \quad \boxed{b_p^n = n!\binom{n-1}{p-1}}$$

n \ p	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	2	2					
3	6	12	6				
4	24	72	72	24			
5	120	480	720	480	120		
6	720	3600	7200	7200	3600	720	
7	5040	30240	75600	100800	75600	30240	5040

6.3. Remarques

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} b_p^n = 2^{n-1}.n!$$

valeur que l'on retrouve directement en remarquant que pour engendrer toutes les permutations barrées de I_n on peut procéder ainsi :

— Permuter de toutes les façons possibles ($n!$) les n-points de I_n.

— Mettre ou ne pas mettre une barre aux $n-1$ intervalles ainsi définis (de 2^{n-1} façons).

$$b_p^n = n(b_{p-1}^{n-1} + b_p^{n-1}) \quad \text{(corrélatif de } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}\text{)}$$

Relation qui s'établit en remarquant que le nombre des p-permutations barrées de I_n où n occupe la dernière place est d'une part par équiprobabilité $\frac{1}{n}\ b_p^n$ et d'autre part, en distinguant parmi ces p-permutations celles où n est seul dans sa partie de celles où n ne l'est pas, $b_{p-1}^{n-1} + b_p^{n-1}$.

$$b_p^n = \frac{n-p+1}{p-1}\ b_{p-1}^n \ \left(\text{corrélatif de} \binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\ \binom{n}{p-1}\right)$$

Pour former les p-permutations barrées de I_n, on peut partir des $p-1$ permutations barrées (en nombre b_{p-1}^n), puis mettre une $(p-1)$ème barre à l'un des $n-1-(p-2) = n-p+1$ emplacements possibles ; mais, par ce procédé, chaque p-permutation barrée est obtenue $p-1$ fois ; d'où la formule :

$$b_p^n = \frac{n(n-1)}{n-p}\ b_p^{n-1} \ \left(\text{corrélatif de} \binom{n}{p} = \frac{n}{n-p}\ \binom{n-1}{p}\right)$$

Pour former les p-permutations barrées de I_n, on peut isoler un point x_i de I_n (de n façons), former les p-permutations barrées des $n-1$ points restants, injecter l'élément x_i à gauche de l'un des éléments (de $n-1$ façons; si un élément est précédé d'une barre , ''à gauche'' signifie entre la barre et l'élément). Mais, par ce procédé, une p-permutation barrée π de I_n est obtenue $n-p$ fois (à partir de chacune des p-permutations barrées à $n-1$ éléments obtenues en supprimant de π un élément qui ne soit pas en dernière position dans sa tranche et il y a bien $n-p$ éléments de la sorte).

$$b_p^n = \frac{n(n-1)}{p-1}\ b_{p-1}^{n-1} \ \left(\text{corrélatif de} \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}\right)$$

Pour former les p-permutations barrées de I_n, on peut d'abord isoler un point x_i de I_n (de n façons), puis former (de b_{p-1}^{n-1} façons) les $p-1$ permutations barrées des $n-1$ éléments restants, puis injecter (de $n-1$ façons) à gauche de l'un des éléments le couple $x_i/$ formé de x_i suivi d'une barre. Mais, par ce procédé, chaque p-permutation barrée de I_n est obtenue $p-1$ fois puisque, par exemple,

$$\ldots x_{i_1}/x_{i_2}/x_{i_{p-1}}/\ldots$$

s'obtient par réinjection de

$$x_{i_1}/,x_{i_2}/,\ldots,x_{i_{p-1}}/$$

7. Les nombres Eulériens

7.1. Définition : Une représentation classique d'une permutation π de I_n est le n-uple $\pi(1)$, $\pi(2)$... $\pi(n)$ que l'on appelle très souvent mot à n lettres choisies dans l'alphabet I_n. Ce mot M à n lettres définit évidemment π.

M peut se décomposer en un nombre p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ de tranches décroissantes de longueur maximale.

(Exemple : avec M = 641325, on a 641|32|5)

Ce qui a conduit à l'énoncé suivant :

Le nombre de permutations de I_n se décomposant en p tranches décroissantes de longueur maximale est appelé nombre Eulérien et est noté $\mathbf{a}_p^n$.

7.2. Relation récursive triangulaire

Notons d'une façon générale $\mathcal{A}_i^j$ l'ensemble des permutations de I_j se décomposant en i tranches décroissantes de longueur maximale.

Dans une permutation $\pi \in \mathcal{A}_p^n$, n est toujours en tête de la tranche auquel il appartient et en supprimant le couple $(\pi^{-1}(n), n)$ dans $I_n \times [\pi(1) \ldots \pi(n)]$ puis en diminuant de 1 les termes $\pi^{-1}(n)+1 \ldots n$, on obtient :

Si $\pi[\pi^{-1}(n)-1] > \pi[\pi^{-1}(n)+1]$ ou si $\pi^{-1}(n) = n$, un élément de $\mathcal{A}_{p-1}^{n-1}$

Si $\pi[\pi^{-1}(n)-1] < \pi[\pi^{-1}(n)+1]$, un élément de $\mathcal{A}_p^{n-1}$.

Inversement, pour obtenir un élément de $\mathcal{A}_p^n$, on peut réintroduire n dans les éléments de $\mathcal{A}_{p-1}^{n-1}$ ou de $\mathcal{A}_p^{n-1}$ de la façon suivante :

Considérer un élément π de $\mathcal{A}_{p-1}^{n-1}$ et introduire n de façon à créer dans $\pi(1) \ldots \pi(n-1)$ une tranche supplémentaire, ce qui oblige à le placer n'importe où sauf au début d'une tranche déjà existante ; d'où $n-(p-1) = n-p+1$ possibilités (La permutation de I_n qui s'en déduit se trouve alors définie sans ambiguïté).

Considérer un élément de $\mathcal{A}_p^{n-1}$ et introduire n sans créer de tranche supplémentaire, ce qui oblige à le placer en tête de l'une des p-tranches déjà existantes ; d'où ici p possibilités.

Il en découle la relation :

$$\boxed{\mathbf{a}_p^n = (n-p+1)\,\mathbf{a}_{p-1}^{n-1} + p\,\mathbf{a}_p^{n-1}} \quad (\mathrm{R_E})$$

7.3. Tableau pour $1 \leqslant p \leqslant n \leqslant 9$

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	1	1							
3	1	4	1						
4	1	11	11	1					
5	1	26	66	26	1				
6	1	57	302	302	57	1			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1

(On pourra remarquer et démontrer soit directement soit grâce à R_E que $a_2^n = 2^n - n - 1$).

7.4. Egalité $a_p^n = a_{n+1-p}^n$

Elle apparaît dans le tableau précédent et peut se démontrer, soit grâce à R_E, soit directement comme suit :

Disons que le mot $x_1 x_2 \ldots x_i x_{i+1} \ldots x_n$ présente une montée (resp. une descente) en x_i si $x_i < x_{i+1}$ (resp. $x_i > x_{i+1}$). Dans ces conditions, une permutation π se décomposant en p tranches décroissantes de longueur maximale présente $p-1$ montées.

Considérons alors la *bijection* de l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de I_n dans lui-même défini par :

$$\pi \mapsto \pi' \text{ où } \pi' \text{ est défini par } \pi'(i) = \pi(n+1-i) \;;\; 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Le mot M' associé à π' est alors obtenu à partir de celui M associé à π en écrivant les lettres en sens inverse.

Par suite, si $\pi \in \mathcal{A}_p^n$, M a $p-1$ montées donc $n-1-(p-1)=n-p$ descentes, donc M' a $n-p$ montées et par suite π' se décompose en $n-p+1$ tranches descendantes de longueur maximale.

Il en découle l'égalité :

$$\boxed{a_p^n = a_{n+1-p}^n}$$

7.5. Relation entre nombres Eulériens et nombres de surjections

Toute surjection φ de I_n sur I_p peut être représentée par le mot M de n lettres $\varphi(1)\ \varphi(2) \dots \varphi(n)$ choisies parmi les p lettres de l'alphabet I_p et la correspondance $\varphi \to$ M est évidemment bijective.

A chacun de ces σ_p^n mots, on peut ensuite associer une permutation π de I_n de la façon suivante :

On écrit à la suite

— d'abord les numéros d'emplacement des lettres 1 prises de gauche à droite
— puis de la même manière les numéros d'emplacement des lettres 2
— etc. jusqu'à la lettre p.

Exemple avec $n = 6$, $p = 3$:

$$\begin{matrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \varphi(4) & \varphi(5) & \varphi(6) \\ (2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1) \end{matrix} = \mathrm{M} \mapsto \pi = (2\ 3\ 5\ 6\ 1\ 4)$$

Mais, si un mot donne une permutation, plusieurs mots distincts peuvent conduire à la même permutation. Déterminons leur nombre.

π étant donnée, subdivisons-la en tranches décroissantes de longueur maximale ; exemple ici : 2|3|5|61|4 ; soit 5 tranches ; et dans le cas général $n+1-i$ tranches.

Ensuite cherchons toutes les solutions du système d'inéquations

$$t_1 \leqslant t_2 < t_3 \dots \leqslant t_i \dots < t_j \dots \leqslant t_n$$

comprenant $n-1$ inégalités, $i-1$ strictes correspondant aux intervalles x_{j-1}, x_j appartenant à une même tranche et $n-i$ larges correspondant aux changements de tranches, les inconnues t_i étant choisies dans l'alphabet I_p , chacune d'elles devant figurer au moins une fois.

Le nombre d'inégalités strictes devant être inférieur ou égal à $p-1$, il en découle la condition de possibilité $i \leqslant p$.

Ensuite, pour trouver une solution effective, il suffit de choisir $p-1$ inégalités parmi les $n-i$ larges et de décider qu'elles deviennent strictes ; il y a alors $p-1$ inégalités strictes et la valeur des lettres $t_1, t_2 \dots t_n$ se trouve imposée.

Il reste alors à replacer ces lettres aux emplacements successifs définis par π.

Le nombre de mots M correspondant à la permutation π choisie est donc $\binom{n-i}{p-i}$.

Ici : $i = 2$, $\binom{n-i}{p-i} = \binom{6-2}{3-2} = 4$, le système d'inéquations est

$t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4 < t_5 \leqslant t_6$; les 4 solutions sont :

111123 111233 112233 122233

et les 4 mots correspondants sont

211311 311312 311322 312322

Revenant à la définition de $\mathbf{a}_i^n$ et tenant compte de l'égalité $\mathbf{a}_{n+1-i}^n = \mathbf{a}_i^n$ on obtient le relation :

$$\boxed{\sigma_p^n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \binom{n-i}{p-i} \mathbf{a}_i^n}$$

7.6. Application matricielle

a. **Une relation matricielle.** La relation précédente s'écrit :

$$\sigma_{n+1-p}^n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1-p} \mathbf{a}_i^n \binom{n-i}{n+1-p-i} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1-p} \mathbf{a}_{n+1-i}^n \binom{n-i}{p-1}$$

[grâce aux égalités $\mathbf{a}_i^n = \mathbf{a}_{n+1-i}^n$ et $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$]

$$= \sum_{p \leqslant j \leqslant n} \mathbf{a}_j^n \binom{j-1}{p-1} \qquad \text{(en posant } j = n+1-i)$$

Si l'on pose alors $\dot{\sigma}_p^n = \sigma_{n+1-p}^n$, ce qui précède n'est autre que l'égalité matricielle

$$\boxed{\dot{\sigma} = \mathrm{A} \,.\, \Pi}$$

où $\dot{\sigma}$, A, Π sont respectivement la matrice des surjections dans laquelle la colonne d'indice p est remplacée par la $p^{\text{ème}}$ parallèle à la diagonale principale (cette même diagonale étant considérée comme sa première parallèle), la matrice des nombres Eulériens et la matrice de Pascal.

A l'ordre 5 par exemple on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 6 & 6 & 1 & & \\ 24 & 36 & 14 & 1 & \\ 120 & 240 & 150 & 30 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b. **Application. Démonstration matricielle de la relation de WORPITZKY.** Il s'agit de la relation

$$\boxed{x^n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{a}_k^n \binom{x+k-1}{n}}$$

que l'on peut établir directement par un raisonnement comparable à celui utilisé en (7.5), x^n étant pour $x \in \mathbf{N}$ le nombre des applications de I_n dans I_x.

• Les n polynomes

$$e_1 = \binom{x}{n},\ e_2 = \binom{x}{n-1} \ldots e_n = \binom{x}{1}$$

forment, puisque $d°(e_k) = n+1-k$ et donc, pour $k \neq k'$, $d°(e_k) \neq d°(e_{k'})$, une base de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_n^*$ des polynomes de degré inférieur ou égal à n et sans terme constant.

L'application répétée de la formule (R_p) montre que les n polynomes

$$f_1 = \binom{x}{n},\ f_2 = \binom{x+1}{n} \ldots f_n = \binom{x+n-1}{n}$$

s'expriment en fonction des e_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ par l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix}$$

ce qui montre, puisque Π est régulière, que $(f_1, f_2 \ldots f_n)$ est aussi une base de $\mathcal{T}_n^*$. Considérons alors l'égalité donnée en (4.4.a) dans laquelle, d'abord la sommation peut être considérée pour $1 \leqslant k \leqslant n$ puisque d'une part $0^n = 0$ et d'autre part $\binom{p}{k} = 0$ pour $k > p$, et ensuite p peut être remplacé par $x \in \mathbf{R}$. Elle s'écrit alors matriciellement du fait de l'ordre choisi pour l'écriture des polynomes considérés :

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n = x^n \end{pmatrix} = \dot{\sigma} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{pmatrix}$$

où $g_1, g_2 \ldots g_n = x^n$ est, puisque $\dot{\sigma}$ est régulière, une autre base de $\mathcal{T}_n^*$ de dernier vecteur x^n.

Grâce à l'égalité $\dot{\sigma} = \mathrm{A}.\Pi$, on obtient alors

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ . \\ . \\ . \\ g_n = x^n \end{pmatrix} = \mathrm{A}.\Pi \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ \\ f_n \end{pmatrix}$$

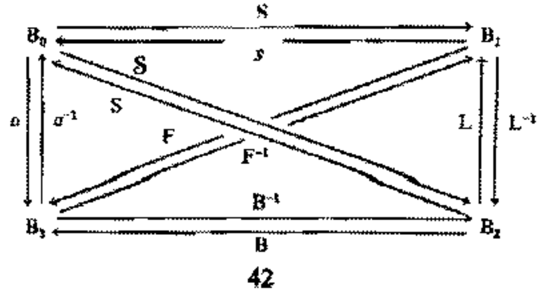
et l'égalité des lignes d'indice n donne la relation annoncée.

8. Compléments sur l'aspect matriciel des triangles précédents

8.1. Préliminaires : Voici 4 bases de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n^*$ sur **R** formé par les polynomes de degré $\leqslant n$ et sans terme constant :

$$\underset{\mathrm{B}_0}{\begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}} \qquad \underset{\mathrm{B}_1}{\begin{pmatrix} x \\ x(x-1) \\ . \\ . \\ . \\ (x)_n \end{pmatrix}} \qquad \underset{\mathrm{B}_2}{\begin{pmatrix} x \\ x(x+1) \\ . \\ . \\ . \\ <x>_n \end{pmatrix}} \qquad \underset{\mathrm{B}_3}{\begin{pmatrix} \binom{x}{1} \\ \binom{x}{2} \\ . \\ . \\ . \\ \binom{x}{n} \end{pmatrix}}$$

Chacune de ces bases considérées comme une $(n,1)$ matrice de polynomes s'exprime en fonction de l'une quelconque des autres par une égalité du type $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_j^i \mathrm{B}_j$ où A_j^i est une matrice scalaire triangulaire gauche. Ces différentes relations sont indiquées dans le tableau suivant où des écritures telles que $\mathrm{B}_0 \xrightarrow{S} \mathrm{B}_1$ et $\mathrm{B}_0 \xleftarrow[s]{} \mathrm{B}_1$ signifient respectivement $\mathrm{B}_0 = S\mathrm{B}_1$ et $\mathrm{B}_1 = s\mathrm{B}_0$.



Or d'une part

F est évidemment la matrice diagonale de terme général $p!$

s est la matrice des nombres de STIRLING de première espèce s_k^n

s est la matrice des nombres de STIRLING de première espèce s_k^n

et d'autre part, les résultats du 4.4.c, la relation

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k^n \binom{x}{k} = x^n$$

similaire à celle concernant les S_k^n et le fait que l'inverse de la matrice s s'obtient à partir de celle S des nombres de STIRLING de seconde espèce S_p^n en affectant du signe "moins" tous les nombres tels que $n+p$ est impair permettent de donner la valeur de $\mathcal{S} = ((-1)^{n+p} S_p^n)$ et de voir que σ est la matrice (σ_p^n) des surjections.

Reste à préciser la nature de L et de B.

8.2. Les matrices L et B.

Les égalités

$$\mathrm{B}_2 = \mathrm{LB}_1 \qquad \mathrm{B}_2 = \mathrm{sB}_0 \qquad \mathrm{B}_0 = S\mathrm{B}_1$$

$$\mathrm{B}_2 = \mathrm{BB}_3 \qquad \mathrm{B}_2 = \mathrm{sB}_0 \qquad \mathrm{B}_0 = \sigma\,\mathrm{B}_3$$

et la nature polynomiale pour les matrices colonnes B_i, scalaire pour les matrices triangulaires, permettent de déduire les relations

$$\mathrm{L} = \mathrm{s}.S \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \mathrm{s}.\sigma$$

Or, si l'on écrit les premières lignes de ces deux produits, on voit apparaître pour L et pour B respectivement la matrice des nombres de Lah et la matrice des nombres b_p^n.

Pour démontrer cela, on peut par exemple établir les deux égalités

$$l_p^n = \sum_{p \leqslant k \leqslant n} s_k^n S_p^k \qquad \text{et} \qquad b_p^n = \sum_{p \leqslant k \leqslant n} s_k^n \sigma_p^k \; .$$

Etablissons l'une d'elles, la deuxième, le raisonnement pour la première étant de même genre.

Notons $\mathcal{B}_p^n$, $\mathcal{S}_k^n$, δ_p^k respectivement l'ensemble des p-partitions barrées de I_n, l'ensemble des permutations de I_n ayant exactement k orbites, l'ensemble des surjections de I_k sur I_p. Dans ces conditions :

$$|\mathcal{B}_p^n| = b_p^n \quad ; \quad |\mathcal{S}_k^n| = \mathrm{S}_k^n \quad ; \quad |\delta_p^k| = \sigma_p^k$$

Pour établir la relation en question nous allons montrer qu'il est possible d'associer *bijectivement* à chaque élément de $\mathcal{B}_p^n$ un couple (s, σ) élément de $\mathcal{S}_k^n \times \delta_p^k$, k étant compris entre p et n.

— Soit d'abord $(s, \sigma) \in \mathcal{S}_k^n \times \delta_p^k$.

A s associons ses orbites $X_1, X_2, \dots X_h$ rangées dans l'ordre $X_1 = \theta_1 =$ orbite de 1, $X_2 = \theta_{i_2}$ où $i_2 = \inf [I_n \setminus \theta_1]$ etc.

Dans chaque $X_r = \theta_{i_r}$, l'ordre des termes est le suivant :

$$X_r = (i_r, s(i_r), s^2(i_r) \dots s^{p-1}(i_r))$$

Exemple : avec $n = 6$, $k = 3$, $\theta_1 = (1,5,3)$, $\theta_2 = (2,6)$, $\theta_4 = (4)$;
l'ordre d'écriture est :

$$X_1 = (1,5,3) \text{ , } X_2 = (2,6) \text{ , } X_3 = (4).$$

Pour $\sigma \in \delta^k_p$, écrivons, pour une raison qui apparaîtra dans la seconde partie du raisonnement, les termes de $\sigma^{-1}(i) = Y_i = (\alpha^i_1, \alpha^i_2, \dots \alpha^i_{t_i})$ dans l'ordre décroissant.

Exemple : Avec $k = 3$, $p = 2$, $\sigma(1) = \sigma(3) = 2$, $\sigma(2) = 1$, on a

$$\sigma^{-1}(1) = Y_1 = (2) \qquad \sigma^{-1}(2) = Y_2 : (3,1)$$

Au couple (s,σ) associons alors l'élément suivant de $\mathcal{B}^n_p$:

$$A_1, A_2 \dots A_p \text{ avec } A_i = (X_{\alpha^i_1}, X_{\alpha^i_2}, \dots X_{\alpha^i_{t_i}})$$

écrits dans l'ordre indiqué.

Dans l'exemple considéré, l'élément de $\mathcal{B}^6_2$ obtenu est

$$(2,6) \quad (4,1,5,3)$$

Inversement, soit $(A_1, A_2 \dots A_p)$ un élément de $\mathcal{B}^n_p$ (par exemple le même que précédemment : (2,6) (4,1,5,3)). Décomposons $A_i = a^i_1 \, a^i_2 \dots a^i_r$ comme suit :

$$A_i = (Z^i_1, Z^i_2, \dots Z^i_{\lambda_i}) \quad \text{avec} \quad Z^i_1 = (a^i_1, a^i_2, \dots a^i_{j-1})$$

où j est le plus petit indice tel que $a_j < a_1$, puis

$Z^i_2 = (a^i_j, \dots a^i_{l-1})$ où l est le plus petit indice tel que $a_l < a_j$, etc.

Ceci commence à expliquer la méthode adoptée dans la première partie pour ranger les éléments de $\sigma^{-1}(i)$.

On obtient la décomposition suivante de I_n en $k = \Sigma \lambda_i$ classes $(p \leqslant k \leqslant n)$:

$$Z^1_1, Z^1_2, \dots Z^1_{\lambda_1}, Z^2_1, \dots Z^2_{\lambda_2}, \dots, Z^j_1, \dots Z^j_{\lambda_j}$$

Dans l'exemple considéré cette décomposition est

$$Z^1_1 = (2,6) \text{ ; } Z^2_1 = (4) \text{ ; } Z^2_2 = (1,5,3)$$

Soit alors $s \in \mathcal{S}_n$, ensemble des permutations de I_n , défini par

$$Z^i_l = \theta(\alpha^i_l)$$

où α_i^j est le premier élément de

$$Z_i^j = (\alpha_i^j \, , s(\alpha_i^j) \, , s^2(\alpha_i^j) \ldots s^{-1}(\alpha_i^j))$$

et s est bien définie.

Considérons ensuite l'ensemble

$$\alpha_1^1 \, , \alpha_2^1 \, , \ldots \alpha_1^p \ldots \alpha_{k_p}^p$$

de chacun des premiers éléments α_i^j des k ensembles Z_i^j. Il existe une seule application croissante Ψ de I_k sur cet ensemble et

$$Z_i^j = X_{\Psi^{-1}(\alpha_i^j)} = \text{ orbite de } \alpha_i^j \text{ pour } s.$$

Dans l'exemple étudié, on a :

$$\Psi(1) = 1 = \alpha_2^2 \; ; \Psi(2) = 2 = \alpha_1^1 \; ; \Psi\,(3) = 4 = \alpha_1^2 \, .$$

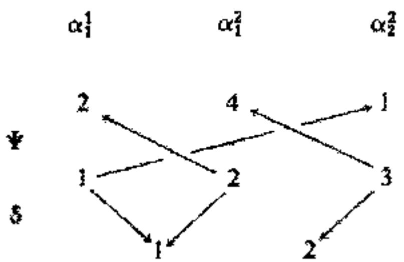
Considérons enfin la surjection σ de I_k sur I_p telle que

$$\sigma^{-1}(l) = \{\Psi^{-1}(\alpha_l^l), \ldots \Psi^{-1}(\alpha_{k_l}^l)\}$$

(Remarquer l'ordre décroissant des termes de cet ensemble).

Alors l'élément considéré dans $\mathcal{B}_p^n$ est bien associé au couple (s,σ) que nous venons de définir.

Dans l'exemple envisagé, le diagramme associé à Ψ et σ est :



Ainsi B est bien la matrice des nombres b_p^n et d'une manière semblable on montrerait que L est la matrice des nombres de Lah.

8.3. Curiosité remarquable

Les éléments de S comptent les p-partitions de I_n.

Les éléments de s comptent les permutations de I_n se décomposant en p-orbites, donc, si l'on veut, les permutations de I_n "déplaçant" des termes à l'intérieur des p-parties formant les p-partitions de I_n.

Les éléments de L comptent les p-partitions de I_n ordonnées par l'ordre des termes c'est-à-dire en quelque sorte les éléments vérifiant à la fois les propriétés des éléments comptés par les nombres figurant dans S et par ceux figurant dans s.

Et l'égalité matricielle $L = s.\mathcal{S}$ peut alors paraître remarquable et d'une certaine beauté... tout comme, pour des raisons de même nature, l'égalité $B = s\delta$.

Signalons enfin que ces propriétés sont certainement deux illustrations d'un résultat plus général liant la combinatoire et l'algèbre matricielle.

9. En guise de conclusion... ou de préambule à une étude plus approfondie

Nous venons de présenter, en donnant une signification combinatoire et éventuellement certaines propriétés supplémentaires, quelques nombres vérifiant une relation triangulaire du type R_t. Leur étude ne s'arrête évidemment pas là et il est classique de chercher à préciser (mais cela n'est pas toujours facile et parfois les solutions proposées sont très imparfaites) pour ces nombres :

leur valeur en fonction de p et de n

leurs polynomes générateurs $P_n(x) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} U_p^n x^p$

leurs diverses séries génératrices

$$\sum_{n \geqslant p} U_p^n x^n \; ; \quad \sum_{n \geqslant p} U_p^n \frac{x^n}{n!} \; ; \quad \sum_{n,p \geqslant 0} U_p^n x^n y^p \; ; \text{ etc.}$$

l'allure des suites à n constant $(U_p^n)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ ou à p constant $(U_p^n)_{n \geqslant p}$ (convexité, unimodalité, valeur asymptotique du mode, de la valeur modale...).

Par exemple pour les nombres σ_p^n pour lesquels nous avons donné quelques expressions de leur valeur, signalons que les polynomes générateurs vérifient la relation

$$P_n(x) = x\,[(x+1)P'_{n-1}(x) + P_{n-1}(x)]$$

ce qui montre, en raisonnant par récurrence sur les polynomes

$$Q_n(x) = (x+1)\,P_n(x)$$

vérifiant l'égalité

$$Q_n(x) = x(x+1)\,Q'_{n-1}(x)$$

que tous les zéros de $P_n(x)$ sont réels et négatifs ou nuls. Il en résulte, grâce à un théorème classique, que la suite $(\sigma_p^n)_{1 \leqslant p \leqslant n}$ est unimodale avec pic ou plateau à deux points. On établit de plus que le mode a pour valeur asymptotique $\dfrac{n}{2 \operatorname{Log} 2}$ et que la valeur modale asymptotique est

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi(1-\operatorname{Log} 2)n}\,(\operatorname{Log} 2)^n}$$

Certaines séries génératrices sont :

$$\sum_{n \geqslant p} \sigma_p^n x^n = \frac{p!x^p}{\prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} (1-kx)} \; ; \quad \sum_{n \geqslant p} \sigma_p^n \frac{x^n}{n!} = (e^x - 1)^p \; ;$$

$$\sum_{n,p \geqslant 0} \sigma_p^n \frac{x^n y^p}{n!p!} = e^{y(e^x - 1)} \qquad \text{etc.}$$

Bibliographie

1. L. COMTET. *Analyse Combinatoire* (PUF, 1970).
2. L. COMTET. *Advanced Combinatorics* (Reidel, 1974).
3. J. DE BIASI. *Thèse d'état* — Toulouse 1981 (Chap. III).
4. Ch. JORDAN. *Calculus of finite differences* (Chelsea, 1965).
5. J. RIORDAN. *An Introduction to Combinatorial Analysis* (Wiley, 1958).