4

DANS NOS CLASSES

Les vecteurs en quatrième

par Louis DUVERT, Collège et Lycée Jean Moulin, Lyon

I. Introduction

"Les vecteurs, c'est difficile ; trop difficile pour un élève de quatrième. Comme le programme est long, je les renvoie à la fin de l'année, ou même je ne les aborde pas du tout".

Pour peu que le professeur de troisième, qui a, lui aussi, fort à faire, se comporte de la même façon, il n'est pas surprenant que beaucoup d'élèves, à l'entrée en seconde, soient mal à leur aise dès qu'apparaissent des vecteurs*.

Il vaudrait mieux, dans ces conditions, supprimer carrément les vecteurs des programmes du premier cycle : on peut, certes, faire de la bonne géométrie sans les vecteurs ; et les programmes seraient allégés.

Si, au contraire, on estime souhaitable de les maintenir, alors, qu'on leur accorde le temps et le soin nécessaires, sans postuler par avance qu'"ils n'y comprendront rien quand même" ; et surtout, qu'on les aborde avec le souci d'en faire un outil utilisable, et si possible apprécié, par les élèves, dès la quatrième.

Je crains que certains d'entre nous, encore trop imprégnés des programmes des années 1970, cherchent à introduire la *structure* de vectoriel ; alors que, à mon avis, il faudrait s'attacher, en classe, au *langage* vectoriel. Que le professeur ait présents à l'esprit les axiomes qui définissent le mot "(espace) vectoriel" et les premières propriétés qui en découlent, c'est nécessaire ; et les programmes précédents, rendons-leur cette justice, lui ont donné cette base théorique qui lui manquait parfois. Les élèves du premier cycle, eux, n'ont pas à axiomatiser les vecteurs, mais à les faire fonctionner ; tout comme les enfants de l'école élémentaire ont à faire fonctionner les naturels, sans qu'on prétende leur faire ingurgiter les axiomes de Peano !

---

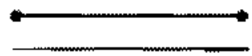
* Voir *Mise à l'essai en géométrie*, par S. Betton, J. Clerjon, L. Duvert, J.P. Guichard. Bulletin 328, avril 81, pages 297-298.

Depuis le dernier changement de programme en quatrième, je tente de mettre en œuvre ce point de vue sur les vecteurs ; j'en suis donc cette année à mon troisième essai. Voici, en résumé, la progression qui se dégage et quelques commentaires.

II. Marche d'approche

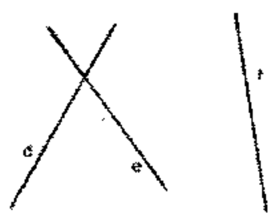
1. Les difficultés dues à la géométrie commencent, bien avant les vecteurs, avec les notions de segment (de droite) et de droite, leurs notations et leurs figurations sur les dessins.

Rien ne ressemble plus à un segment, sur une figure, qu'une droite ! Même si on s'astreint à "grossir"
les extrémités d'un segment :
pour le distinguer d'une droite :

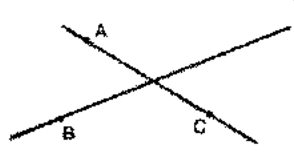


il n'en reste pas moins que le dessin d'une droite donne, de cette droite, une idée fausse ; car le tracé est nécessairement limité par les bords de la feuille ou du tableau, alors qu'il faut imaginer la droite "illimitée des deux côtés" ; d'où des expressions révélatrices, et fréquentes à l'entrée en quatrième (et même plus tard), comme "milieu d'une droite", "longueur d'une droite", "prolonger la droite". J'aime mieux parler du *trait*, tracé à la règle, évoquant (mal) une droite, et dire "prolongeons le trait" ; la droite, elle, par nature, n'est pas "prolongeable".

La confusion entre droite et segment se manifeste encore lorsque les élèves mélangent "segments parallèles" (c'est-à-dire portés par des droites parallèles) et "segments sans point commun" (qui peuvent être portés par des droites sécantes).



La confusion entre être mathématique et dessin apparaît aussi chez certains élèves : pour eux, les deux droites d et e sont sécantes, mais d et f ne le sont pas à leurs yeux — c'est le cas de le dire ! — parce qu'ils ne "voient" pas leur point commun.



Pour d'autres, une droite n'existe que si elle est tracée ; ainsi, dans le cas de la figure ci-contre, ils se refusent à parler de la droite AB. Peut-être même diront-ils que les points A et C sont alignés et que A et B ne le sont pas. Il leur échappe que deux points sont toujours alignés...

En outre, beaucoup d'élèves ignorent le langage usuel de la géométrie élémentaire ; ils écrivent : "Le point passe par la droite", "La droite est parallèle", etc. Même à propos de situations très simples, qu'ils comprennent sans doute, ils sont aussi gênés pour s'exprimer que dans un pays étranger dont ils ignoreraient la langue.

Je pense qu'on ne peut rien construire de valable sur un terrain aussi mouvant ; j'essaye donc d'abord de le consolider.

2. Viennent ensuite la longueur d'un segment et la direction d'une droite* ; ce sont, pour nous, des classes d'équivalence ; mais il n'est pas nécessaire de les présenter aux élèves en utilisant ce vocable.

3. Le couple de points (A,B) pose un problème de figuration ; si on se contente de marquer les deux points :

A . . B

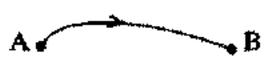
on dessine la paire de points {A,B} et non pas le couple de points (A,B) ; on peut penser au procédé suivant :

A . . B
1 2

Mais il devient vite malcommode si on veut dessiner simultanément plusieurs couples, par exemple (A,B), (B,A), (C,A), (B,C).

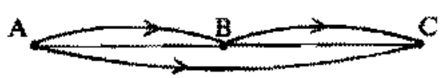
A 1 2 2   2 B 1 1   C 2 1

Il faut chercher autre chose ; les élèves, en général, ne trouvent rien ; je leur fournis alors la convention suivante :



Le dessin de la flèche est indifférent, du moment qu'elle part de A et arrive en B. Souvent, on adopte la flèche rectiligne :

mais elle présente l'inconvénient de créer une confusion entre le couple de points (A,B) et ce qu'on appelait jadis "segment orienté" (qui n'est d'aucune utilité). D'autre part, il faut bien revenir à des flèches courbes dans certains cas, par exemple si on veut dessiner à la fois (A,B), (B,C), (A,C), les points A, B, C étant alignés.



Notons en passant qu'on pourrait remplacer "couple de points" par "flèche", vocable peut-être plus parlant pour les enfants.

---

* Voir *MOTS 5* (*longueur, direction, sens*) et *MOTS 6* : *Grandeur, mesure*. Brochures de l'A.P.M.E.P.
(*MOTS 6*, en préparation, sera disponible à la rentrée 1982).

4. Nous en arrivons alors aux sens comparés de deux couples de points "parallèles" (c'est-à-dire de supports parallèles). Quelques exercices de "description par téléphone de figures", de "programmes de construction", préparent cette notion.

Il n'est pas question d'en faire une théorie mathématique "propre". Je me contente de faire des dessins et... des gestes.

Même ainsi, des difficultés se présentent. Il importe d'abord de se démarquer, en ce qui concerne les mots *direction* et *sens*, du langage courant ("rue à sens unique" est conforme à la notion de sens mathématique ; mais, dans les gares, "direction de Paris" et "direction de Marseille" sont... opposées, et évoquent plutôt des sens mathématiques que des directions mathématiques.). Il faut ensuite faire de nombreux exercices sur ce sujet*.

5. Chemin faisant, une longue patience s'impose pour parvenir à une utilisation correcte par les élèves des notations ([AB], (A,B), etc.) qu'il me faut bien choisir car elles diffèrent d'un professeur à l'autre, d'une année scolaire à l'autre, ce qui est un handicap supplémentaire pour les élèves.

6. Cette longue marche d'approche, commencée au début de l'année scolaire (mais menée de front avec des activités algébriques), nous mène à la fin novembre.

III. Egalités vectorielles

Je fais dessiner au tableau une douzaine de couples de points (A,B) , (C,D) ,... ayant tous même direction, même sens et même longueur.

> Je ne répugne pas à parler de la "longueur" d'un couple de points (A,B) (c'est la longueur du segment [AB]), ni de sa direction (c'est celle de la droite AB). J'évite ainsi d'introduire le mot "équipollent", qui n'est pas indispensable car, en définitive, on raisonnera et on calculera sur les vecteurs et non sur les couples de points.
>
> On trouve rarement, semble-t-il, ce genre de dessins dans les manuels. Il me paraît naïf, voire nocif, de ne jamais dessiner que deux ou trois de ces couples.

Ces douze couples, et tous ceux qui ont même direction, même sens et même longueur qu'eux (il y en a une infinité ; il est impossible de les dessiner tous !) constituent ce qu'on appelle un *vecteur géométrique* ; on le note $\overrightarrow{AB}$, ou $\overrightarrow{CD}$, ou..., qui sont des noms différents pour *le même* vecteur ; on écrit donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \ldots$. Chacun des couples (A,B), (C,D),... est un *représentant* de ce vecteur.

* Voir *Bouées mathématiques*, édité par le C.R.D.P. de Lyon, disponible à la rentrée 1982.

Autrement dit, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie *trois choses à la fois* :

- droite AB droite CD
- (A,B) et (C,D) ont même sens
- les segments [AB] et [CD] ont même longueur.

On revient sur les exercices préparatoires, et on traduit par des égalités vectorielles ce qu'on avait exprimé en parlant de couples de points, de longueurs, de directions, ...

J'insiste beaucoup plus sur l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ que sur la définition proprement dite de "vecteur géométrique".

Un vecteur ne se dessine pas. Il peut, sur un dessin, être représenté, par un ou plusieurs de ses... représentants.

Un vecteur n'a ni origine, ni extrémité, ni milieu.

J'estime que le professeur doit être très attentif — quelles que soient ses vieilles habitudes personnelles à ce sujet — à ne pas contredire par son langage l'idée, exacte, qu'il cherche à donner du vecteur ; parler de A comme étant "l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$", dire que les vecteurs directeurs d'une droite sont "portés" par cette droite, etc., c'est fausser totalement les idées des élèves ; mieux vaudrait alors ne parler que de couples de points...

En outre, bien entendu, le signe = est faussé, ici comme ailleurs, par un langage traditionnel et absurde : dire, lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, que les *deux* vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, c'est inciter l'élève à voir *deux* vecteurs là où, justement, il n'y en a qu'un*.

On introduit le vecteur nul, noté $\overrightarrow{AA}$, ou $\overrightarrow{BB}$, ... ou $\vec{0}$, ou $\vec{\emptyset}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont dits "opposés" ; on écrit $\overrightarrow{AB} = \text{opp}(\overrightarrow{BA})$ ou $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Un vecteur n'a pas de milieu, mais les vecteurs sont utiles pour traduire qu'un point est le milieu d'un segment.

J'ai vu, une année, des élèves qui, heureusement persuadés qu'un vecteur n'a pas de milieu, en avaient déduit qu'il fallait renoncer aux vecteurs chaque fois qu'il s'agissait de milieux !

Les phrases suivantes ont la même signification :

E est le milieu de [CD] ; $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{ED}$; etc.

On analyse ensuite les égalités $\overrightarrow{KT} = \overrightarrow{KV}$ (qui signifie $T = V$: le même point a deux noms différents) ; $\overrightarrow{XH} = \vec{0}$ (qui signifie $X = H$).

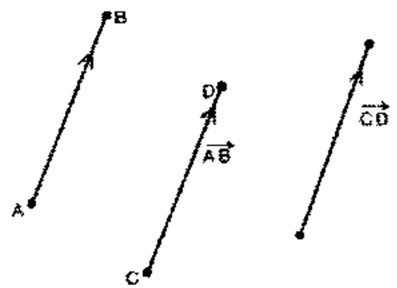
* Voir *Concevoir, désigner, représenter*, Bulletin 326, décembre 80, page 849.

Remarque sur les notations. Etant donné deux points A et B, la droite qui les contient peut se noter : dte AB (ou AB, ou (AB), selon la convention adoptée) ; mais on peut aussi lui donner un nom, tel que d , qui n'utilise pas de noms de points, qui n'évoque pas la "genèse" de la droite ("La fille de Minos et de Pasiphaé" s'appelle aussi Phèdre...).

De même, rien n'empêche de noter un vecteur par une seule lettre, u par exemple. La tradition veut qu'on le note, plus souvent $\vec{u}$; c'est illogique en théorie, mais c'est prudent en pratique (pour une fois, la tradition est pédagogiquement justifiée...), pour bien distinguer les vecteurs des autres êtres mathématiques. Dans les livres, on utilise parfois un compromis : une seule lettre, mais "grasseyée" : **u** .

Nous écrirons donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, etc. (Nous avons déjà noté $\vec{0}$, ou $\vec{\mathit{0}}$, le vecteur nul). C'est souvent commode ; et de plus, cette notation $\vec{u}$ rappelle, mieux que la notation $\overrightarrow{AB}$, que ce vecteur est autre chose que *le* couple de points (A,B). C'est sans doute pour cela que la notation $\vec{u}$ est difficile à avaler pour quelques élèves : ceux qui n'ont pas encore bien "cassé" la fausse identification entre vecteur et couple de points.

Dans le même ordre d'idées, il est choquant pour ces élèves, mais bénéfique, de voir la figure ci-dessous, où le même vecteur est représenté trois fois, et désigné de deux façons.

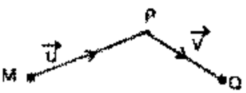


IV. Addition vectorielle

Nous la commençons autour du début de janvier.

1. Des élèves se succèdent au tableau pour :

- représenter un vecteur $\vec{u}$
- représenter un vecteur $\vec{v}$
- marquer un point M, n'importe où, puis le point P tel que $\overrightarrow{MP} = \vec{u}$
- marquer le point Q tel que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$
- et recommencer en partant de 5 ou 6 points autres que M.



Nous *constatons* (plus nettement sur les cahiers qu'au tableau) que tous les couples (M,Q), ... obtenus représentent *le même* vecteur ; on l'appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et on le note $\vec{u} \oplus \vec{v}$.

Nous faisons de nombreux exercices de dessins, à propos de figures variées.

> Le signe $\oplus$ rappelle qu'on vient d'introduire une opération nouvelle, autre que l'addition des nombres (bien qu'elle lui ressemble), et qu'on appelle l'addition vectorielle. Au bout de quelques semaines, on peut éventuellement laisser tomber le "rond" autour du + .

2. Par le même processus expérimental, nous *constatons*, sur des exemples, que cette addition est commutative, associative, qu'elle admet $\vec{0}$ comme élément neutre, que $\vec{u} \oplus \mathrm{opp}(\vec{u}) = \vec{0}$.

Aucune démonstration n'est tentée. Nous admettons ces propriétés.

> On ne leur démontre pas non plus les propriétés analogues de l'addition des décimaux... et personne n'en prend ombrage.

3. Le théorème de Chasles ne fait que traduire le procédé de fabrication de la somme de deux vecteurs *et* son caractère universel. Il s'énonce :

Quels que soient les points D,F,A , $\overrightarrow{DF} \oplus \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DA}$.

> Si on tient à faire apprendre par cœur quelque chose, que ce soit toute la phrase, et non pas seulement l'égalité.
>
> On pourra rapprocher l'*identité* (un mot ancien, mais précieux ; pourquoi le laisser s'éteindre ? et pourquoi le réserver au numérique ?) $\overrightarrow{DE} \oplus \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DA}$ des identités ("remarquables", certes, mais pas plus que celle de Chasles...) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, etc.

Et voici notre première démonstration sur les vecteurs ("Ah ! Enfin !", dira le lecteur) :

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad , \quad \text{alors } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

(on n'a besoin que de "Chasles" et de la commutativité).

4. Le mot "parallélogramme" aura déjà été lancé par les élèves à propos de la figure illustrant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Nous avons, au début de l'année, appris à dessiner et à dénommer des quadrilatères, et en particulier des parallélogrammes, mais sans donner de ce dernier mot une définition précise.

Ici, nous enregistrons que les phrases suivantes ont la même signification :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; etc. ;
ABDC est un parallélogramme.

> C'est une façon parmi d'autres de définir "parallélogramme". Notons que certains élèves, et encore en seconde, se croient obligés de démontrer
>
> $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$
>
> avant de conclure que ABCD est un parallélogramme.

Nous en tirons le résultat connu sous le nom de "règle du parallélogramme" :

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Nous démontrons que les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu, et le théorème réciproque.

> Le fait que, si ABCD est un parallélogramme, alors dte AB // dte CD et dte AD // dte BC résulte directement des égalités vectorielles précédentes. Mais je suis assez discret sur la réciproque, d'une part parce qu'elle est ... fausse (il faut adjoindre l'hypothèse supplémentaire selon laquelle A,B,C,D ne sont pas alignés), d'autre part parce que je n'ai pas trouvé de démonstration vraiment simple. Cette année, je l'ai carrément admise (mais les élèves se sont intéressés aux parallélogrammes aplatis ; j'ai répondu à leurs questions, sans plus).

Nous passons ensuite à la soustraction vectorielle, et au théorème de Chasles sous sa forme soustractive (qui est souvent élégant, mais qui n'est pas indispensable ; je préfère que l'élève sache bien utiliser la forme additive seulement plutôt que de le voir se servir des deux, mais mal).

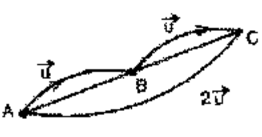
V. Produit d'un vecteur par un nombre

> Le programme de quatrième, pris à la lettre, s'en tient à l'addition des vecteurs, ce qui limite beaucoup leur intérêt. Je préfère aller plus loin ; je m'en justifierai... plus loin.

On donne un vecteur $\vec{u}$; cherchons un représentant de $\vec{u} \oplus \vec{u}$. Pendant que le dessin se fait au tableau, plusieurs élèves disent, spontanément : "Ça fait $2\vec{u}$" ; les autres acquiescent volontiers.

On débouche sur d'autres manières de traduire que B est le milieu de [AC] :

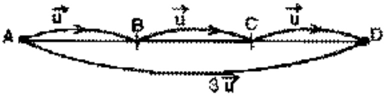
$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BA}$; etc.



Et aussi, toujours sans difficulté : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; puis $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$; puis $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, etc.

> Ils connaissent déjà l'écriture $\frac{1}{2}$ et savent qu'elle désigne le même décimal que 0,5 , même avant que nous ayons abordé les rationnels.

Cette année, la conversation s'est prolongée sans que je l'aie préméditée : nous avons parlé de $\vec{u} \oplus \vec{u} \oplus \vec{u}$, noté $3\vec{u}$, d'où $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, etc. Les écritures $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ sont "sorties" toutes seules, et les rationnels (et même, ensuite, dans la même séance, π) ont fait irruption plus tôt que je ne l'avais prévu.



Le terrain est alors préparé pour accueillir, ultérieurement, le repérage d'un point sur un axe. (A,B) étant le repère, M un point de l'axe, il lui correspond un réel x unique tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$; x est l'abscisse de M, etc.

La notation $\overline{AB}$ est tout à fait inutile dans le premier cycle*.

Le théorème de Chasles (le bon !) donne, pour deux points M et P d'abscisses respectives x et y :

$$\overrightarrow{MP} = (y - x)\overrightarrow{AB}$$

Le programme de quatrième, qui impose la "notation $\overline{MN}$" et la "relation de Chasles" (la mauvaise !) refuse le produit d'un vecteur par un nombre, alors que $\overline{MN}$ n'en est qu'un camouflage (maladroit).

Je n'ai donc aucun scrupule à aménager le programme : oui à $x\vec{u}$; non à $\overline{MN}$. J'estime qu'ainsi, loin de surcharger la tâche des élèves, je la simplifie.

VI. Vecteurs et démonstration

1. Dès que le produit d'un vecteur par 2 est acquis, on peut démontrer le théorème suivant, souvent utile :

Si D est le milieu de [AB] et si E est celui de [CA], alors

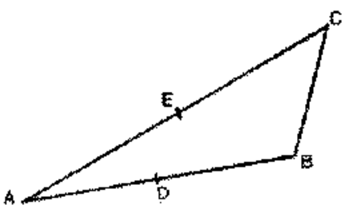
$$\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{DE}$$

Voici un schéma de démonstration :

$$\overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AE}$$

d'où $\overrightarrow{BA} \oplus \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{DA} \oplus \overrightarrow{AE})$

donc $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{DE}$.



Les élèves font spontanément la mise en facteur de 2.

* *A bas abébarre !*, par S. Betton, J. Clerjon, L. Duvert, J.P. Guichard, Bulletin 331, décembre 1981, page 852.

On peut même ne pas "sortir" du programme :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} \oplus \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \oplus \overrightarrow{AE}$$

d'où : $$\overrightarrow{BA} \oplus \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \oplus \overrightarrow{AE} \oplus \overrightarrow{DA} \oplus \overrightarrow{AE}$$

ou $$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE} \oplus \overrightarrow{DE}$$

Mais il serait fort étonnant que les élèves n'introduisent pas d'eux-mêmes $2\,\overrightarrow{DA}$, $2\,\overrightarrow{AE}$ et $2\,\overrightarrow{DE}$, mettant ainsi à jour, sans penser à mal, l'hypocrisie de cette dernière démonstration...

Ce qui apporte trois renseignements :

- dte BC dte DE
- BC = 2 DE
- (B,C) et (D,E) ont le même sens.

Les deux premiers sont classiques ; le calcul vectoriel ajoute, en prime, le dernier ; "A quoi bon ce troisième renseignement ? Il est tellement visible sur la figure !", peut-on dire ; mais, sur une figure bien faite, les deux premiers renseignements, eux aussi, sont visibles...

2. Les vecteurs permettent donc des démonstrations plus simples (et souvent plus rigoureuses) que d'autres procédés. Elles sont plus simples parce que plus "algébriques" ; faut-il le regretter ? Je ne le crois pas. L'apprentissage de la démonstration est trop difficile pour que nous puissions dédaigner ce moyen de le faciliter. Allons-nous repousser la recherche "algébrique" (au sens ancien) des problèmes sous prétexte que la résolution des équations tourne souvent au mécanisme, et remettre en honneur les "fausses suppositions" et autres contorsions qui évitaient, dans l'ancien temps, de donner un nom à l'inconnue ? Au surplus, la part de la réflexion reste importante dans le maniement des équations et du calcul vectoriel, si on le veut bien.

Je choisis quelques exercices où l'élève a le choix entre deux sortes de démonstrations, les unes utilisant le calcul vectoriel, les autres non. J'ai la satisfaction de constater que les premières ne rebutent pas, et même attirent pas mal d'élèves ; et de voir que, dans les exercices où il s'agit de constater des propriétés d'une figure donnée (avant, éventuellement, d'en démontrer quelques-unes), plusieurs élèves, outre la mise à jour d'alignements, de parallélismes, de losanges, ..., fournissent quelques égalités vectorielles (exactes !) sans que je le leur aie demandé explicitement.

VII. Vecteurs et translations

J'ai cru un temps, comme d'autres, que la translation était la voie privilégiée, concrète(?) et dynamique (??) pour introduire les vecteurs. J'ai changé d'avis.

La notion d'application du plan vers le plan, c'est-à-dire d'un procédé transformant *chaque* point du plan, est assez difficile à maîtriser pour un élève de quatrième, qu'il s'agisse de la translation, des symétries ou de la projection.

Si on renonce à utiliser la translation comme une application dans le plan, elle ne devient qu'un vocable dont on peut très bien se passer en parlant des vecteurs (comme on peut se passer du mot "équipollent"). En fait, on a surtout besoin de l'énoncé suivant :

Etant donné un point A et un vecteur $\vec{u}$, il existe un point B et un seul tel que $\overrightarrow{AV} = \vec{u}$.

On n'apporte rien de plus en disant que B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, lors de l'initiation aux vecteurs.

Je pense donc qu'il vaut mieux introduire et utiliser les vecteurs d'abord, et introduire la translation en fin d'année en se servant justement des vecteurs.

VIII. Vecteurs et analytique

Débordant un peu du cadre de la quatrième, je voudrais dire un mot de ce que j'ai remarqué en lisant des manuels, en discutant avec des collègues et surtout en corrigeant des copies (de seconde, entre autres).

Beaucoup d'élèves ne conçoivent les vecteurs qu'à travers l'analytique ; en creusant un peu, on s'apercevrait sans doute que, pour eux, un vecteur n'existe que par l'intermédiaire de ses composantes (pour un repère donné), ou même qu'un vecteur *est* un couple de réels. Et ils sont tout étonnés qu'on puisse manipuler des vecteurs sans disposer — sans s'encombrer — d'un repère.

Il est bien vrai que l'ensemble des vecteurs géométriques du plan, muni des deux lois habituelles, est un $\mathbf{R}$-vectoriel isomorphe à $\mathbf{R}^2$, lui aussi dûment structuré en $\mathbf{R}$-vectoriel (et à tous les $\mathbf{R}$-vectoriels de dimension 2). L'identification d'un vecteur géométrique avec le couple de ses coordonnées n'est donc pas, mathématiquement parlant, scandaleuse. Mais on se prive alors du calcul vectoriel qui, dans les programmes de quatrième et de troisième tels que je les comprends, est distinct du calcul analytique, ne serait-ce que parce qu'il se passe très bien de tout repère.

Je ne suis pas sûr qu'il n'y ait pas parfois un malentendu entre professeurs quand ils parlent du "calcul vectoriel"...

Cette absorption, plus ou moins insidieuse, du vectoriel par l'analytique, se manifeste souvent :

Peu d'élèves, à l'entrée en seconde, savent que, le repère étant $(\omega, \vec{i}, \vec{j})$,

" $\vec{u}$ a pour coordonnées (a,b)" équivaut à " $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ "

"Le point M a pour coordonnées (c,d)" équivaut à " $\overrightarrow{\omega M} = c\vec{i} + d\vec{j}$ "

Moins nombreux encore sont ceux qui pensent à utiliser de préférence les égalités vectorielles.

Les composantes de $\overrightarrow{AB}$ en fonction des coordonnées de A et B ne sont pas rattachées à l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\omega B} - \overrightarrow{\omega A}$. Remarque analogue pour les coordonnées du milieu de deux points. Etc.

IX. Conclusion

Bien entendu, je ne prétends apporter aucun résultat scientifique ; je ne suis pas didacticien. Et je sais bien que quand un professeur "essaye un petit truc", il réussit toujours ! (Du moins le croit-il sincèrement)

Voici tout de même mes impressions :

Nous pouvons rendre le calcul vectoriel plus accessible en quatrième ; il ne rebute pas forcément les élèves ; il facilite l'apprentissage de la démonstration en géométrie.

On rendrait le programme de quatrième plus cohérent et plus facile en en supprimant $\overline{MN}$ et en y mettant le produit d'un vecteur par un réel (ou seulement par un rationnel, si on veut). On pourrait repousser jusqu'en troisième l'étude de la translation.

Mais, sans attendre le prochain changement de programme, pourquoi n'essaierais-tu pas, collègue, seul ou mieux en équipe, un "truc" du même genre ?