

1

ETUDES

Géométrie sphérique**par Daniel LEHMANN, Université de Lille*

L'importance de la géométrie plane tient évidemment à ses applications pratiques comme modèle d'un milieu ambiant (le plancher de la salle, le plan de la table, etc.). Mais cette représentation n'a de valeur que localement : chacun sait que nous vivons sur la terre, dont la surface est (à peu près) sphérique, et que l'approximation qui consiste à remplacer la surface de la sphère par le plan tangent à cette sphère en l'un de ses points n'a de sens qu'à condition de rester dans un voisinage de ce point de diamètre négligeable par rapport au rayon de la sphère.

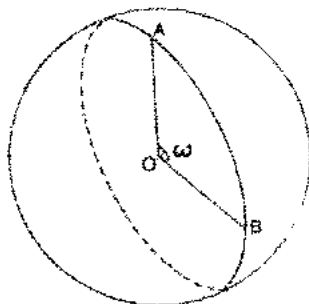
L'importance des droites du plan tient à ce qu'elles permettent de réaliser "le plus court chemin pour aller d'un point à un autre", ce que l'on demande aux élèves d'admettre — et c'est tant mieux ! — sans l'avoir jamais démontré (du moins au niveau de l'enseignement secondaire). Les problèmes de plus courte distance se posent en les mêmes termes sur la Terre (économie d'énergie pour aller en avion de Sydney à Vladivostock, abstraction faite des vents). Admettre que les "grands cercles" de la sphère (c'est-à-dire les cercles qui sont intersection de la sphère avec l'un de ses plans diamétraux) permettent de réaliser "le" plus court chemin pour aller d'un point à un autre, ne demande pas un effort d'abstraction plus grand, après visualisation sur un globe de la ligne polaire qui va d'Europe en Alaska, que d'admettre la propriété analogue des droites du plan.

1. Quelques propriétés élémentaires de la géométrie sphérique

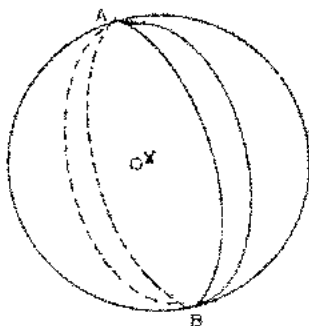
Soit donc Σ une sphère de centre O et de rayon R dans l'espace à 3 dimensions (par exemple, un modèle de la terre ou de toute autre planète dans l'univers). Tout le monde peut comprendre ce qu'on entend par là, et il n'est pas question de s'imposer des définitions irréprochables avant d'en parler : le jour où un élève sera troublé par le fait qu'on a considéré implicitement un univers non relativiste, il sera toujours temps de lever certaines ambiguïtés et de préciser certaines définitions !

* Reproduction d'un article paru dans le Bulletin de l'IREM de Lille (novembre 1977).

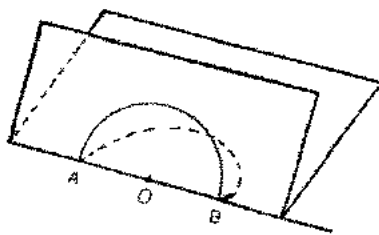
(i) Par 2 points A et B de Σ , non diamétralement opposés, passe un grand cercle Γ et un seul ; si ω désigne la mesure (en degrés pour fixer les idées) comprise entre 0 et 180 de l'angle \widehat{AOB} , le "petit" arc de cercle \widehat{AB} réalise le plus court chemin sur Σ pour aller de A à B : on appellera *distance* de A à B la longueur, (notée $d(A,B)$), $\pi \frac{\omega}{180} R$ de cet arc de cercle.



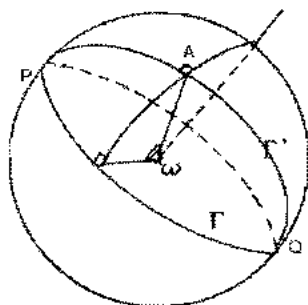
(ii) Si A et B sont diamétralement opposés sur Σ (points aux "antipodes" sur la terre), tout plan passant par AB est diamétral (puisque O appartient à la droite AB) et coupe Σ suivant un grand cercle passant par A et B. Il existe donc une infinité de grands cercles passant par



ces 2 points diamétralement opposés (exemple : tous les méridiens passent par les 2 pôles nord et sud). L'axiome "d'incidence" (par 2 points distincts A et B de Σ passe un grand cercle et un seul) n'est donc pas vérifié si A et B sont diamétralement opposés.

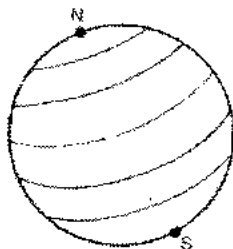


(iii) Deux grands cercles distincts, Γ et Γ' , se rencontrent toujours en 2 points diamétralement opposés sur Σ : leurs plans respectifs, en effet, ayant le centre O en commun, se coupent toujours suivant un diamètre Δ (droite passant par O). Par conséquent, 2 grands cercles distincts ne sont jamais "parallèles", en ce sens que leur intersection n'est jamais vide. L'analogue du *postulat d'Euclide* (par tout point A de Σ , passe un grand cercle et un seul "parallèle" à un grand cercle Γ donné) est donc faux avec la définition ci-dessus des parallèles. La seule propriété qui reste vraie est : par un point A de Σ , n'appartenant pas à un grand cercle Γ , et non situé sur l'axe de Γ , il passe un grand cercle Γ' et un seul tel que si $\{P, Q\} = \Gamma \cap \Gamma'$, A soit équidistant de P et Q : $d(A, P) = d(A, Q) = \frac{\pi}{2} \cdot R$



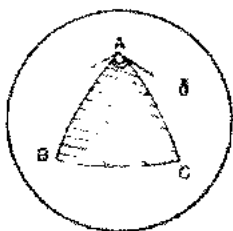
Remarque :

Sur la terre, on appelle "parallèles" les cercles formés par les points de latitude fixée. Deux tels cercles distincts ne se rencontrent pas ; mais il faut prendre garde au fait que ce ne sont pas des grands cercles (l'équateur excepté).



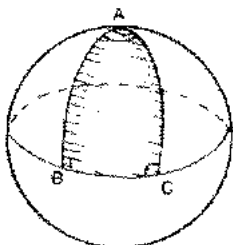
2 - Triangles sphériques

On appelle triangle sphérique la surface formée par 3 arcs de grands cercles \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{AC} . Notons \hat{A} l'angle (mesuré en degrés pour fixer les idées) des 1/2 droites $A\beta$ et $A\gamma$ tangentes aux arcs de grand cercle \widehat{AB} et \widehat{AC} ($0 \leq \hat{A} \leq 360^\circ$). Il n'est pas vrai que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.



Exemple :

Si A est au pôle nord, B et C sur l'équateur et si α désigne l'angle des méridiens \widehat{AB} et \widehat{AC} , $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ + \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 360^\circ$).



Plus généralement, on a le théorème suivant :

Théorème (Gauss)

Pour tout triangle sphérique $T = ABC$ sur la sphère Σ , on a :

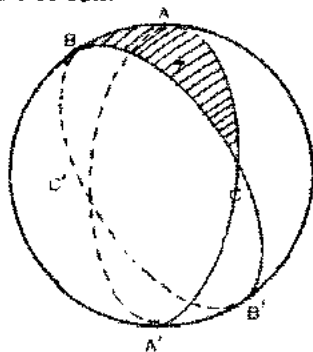
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ + 2 \cdot \frac{A(T)}{A(\Sigma)} \cdot 360^\circ$$

(où $A(\Sigma)$ désigne la superficie de la sphère et $A(T)$ la superficie de T).

[Nous ne soulèverons aucune difficulté, bien entendu, quand à l'existence et la définition précise des nombres $A(T)$ et $A(\Sigma)$].

Notons en effet A', B' , et C' les antipodes de A, B et C et prolongeons les arcs de grand cercle \widehat{AB} , \widehat{AC} et \widehat{BC} ; on obtient ainsi 8 triangles sphériques diamétralement opposés 2 à 2, dont 4 sur l'hémisphère limité par le grand cercle $ABA'B'$ et contenant C : ce sont

- $T = ABC$
- $T_1 = ACB'$
- $T_2 = BCA'$
- $T_3 = CA'B'$ (opposé à $T_1 = C'AB$)

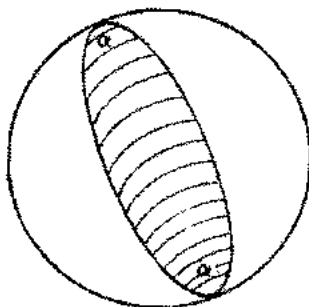


Puisque l'aire d'un fuseau limité par deux demi grands cercles faisant entre eux un angle α ($0 \leq \alpha \leq 360^\circ$) est égale à $\frac{\alpha}{360} \cdot A(\Sigma)$, on obtient :

$$A(T) + A(T_1) = \frac{\hat{B}}{360} A(\Sigma)$$

$$A(T) + A(T_2) = \frac{\hat{A}}{360} A(\Sigma)$$

$$A(T) + A(T_3) = \frac{\hat{C}}{360} A(\Sigma) \text{ car } (A(T_2) = A(T_3))$$



$$\text{d'où : } 3A(T) + A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{360} \cdot A(\Sigma)$$

D'autre part, l'hémisphère a pour superficie

$$A(T) + A(T_1) + A(T_2) + A(T_3) = 1/2 A(\Sigma)$$

Soustrayant membre à membre ces 2 égalités, on obtient :

$$2A(T) = \left(\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{360} - \frac{1}{2} \right) A(\Sigma)$$

d'où le théorème.

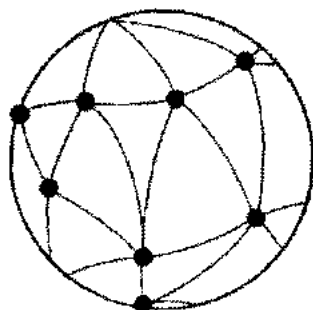
Remarques : Si $A(T)$ est négligeable par rapport à $A(\Sigma)$, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ est "presque" égal à 180° ; le cas de la géométrie plane ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$) peut être considéré comme cas limite d'une sphère de rayon tendant vers l'infini).

3 - Triangulations de la sphère

On appelle ainsi une famille de triangles sphériques sur Σ , recouvrant Σ et possédant les propriétés (i), (ii), (iii) suivantes :

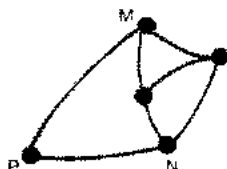
— appelons "sommets" de la triangulation les points qui sont sommets de l'un au moins des triangles sphériques

— appelons “arêtes” de la triangulation les arcs de grand cercle qui sont côté de l’un au moins des triangles de la triangulation.



Alors, on suppose :

(i) toute arête aboutit à 2 sommets, et ne contient aucun autre sommet que ces extrémités.



situation exclue

(ii) toute arête est commune à 2 triangles de la triangulation et seulement à 2.

(iii) tout point de Σ est

- ou bien intérieur à l'un des triangles,
 - ou bien sur l'une des arêtes et n'est pas sommet,
 - ou bien est un sommet
- (ou exclusifs).

Notons S le nombre de sommets de la triangulation, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de triangles.

Théorème (Euler)

On a toujours, quelle que soit la triangulation,

$$F + S - A = 2 \quad (I)$$

$$3 F = 2 A \quad (II)$$

En effet, puisque chaque triangle est bordé par 3 arêtes et que chaque arête est commune à 2 triangles, on en déduit :

$$3 F = 2 A \quad , \text{ soit (II)}$$

Ecrivons d'autre part la formule de Gauss

$$\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = 180^\circ + 2 \frac{A(T)}{A(\Sigma)} \cdot 360^\circ$$

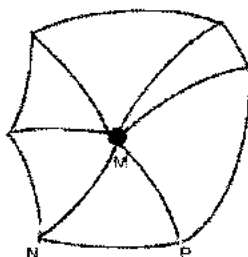
pour chaque triangle $MNP = T$ de la triangulation, et sommons membre à membre toutes les égalités obtenues.

$$\begin{aligned} \sum_T (\hat{M} + \hat{N} + \hat{P}) &= F \cdot 180^\circ + 2 \sum_T \frac{A(T)}{A(\Sigma)} \cdot 360^\circ \\ &= F \cdot 180^\circ + 2 \cdot 360^\circ \\ &= (F + 4) \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

D'autre part, la somme des angles en un sommet M de tous les triangles de la triangulation admettant M comme sommet est égale à 360° . Comme il y a S sommets, on en déduit

$$\sum_T (\hat{M} + \hat{N} + \hat{P}) = S \cdot 360^\circ,$$

d'où $2S = F + 4$
 et $S = \frac{F}{2} + 2$

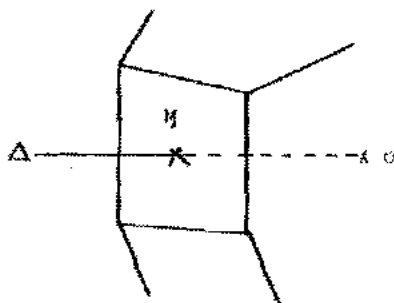


Puisque $3F = 2A$, on a encore :

$$F + S - A = 2, \text{ d'où (I)}$$

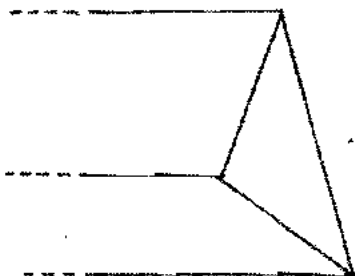
4 - Théorème d'Euler pour les "bons" polyèdres

Un polyèdre \mathcal{P} , dans l'espace à 3 dimensions, sera dit "bon" (*), s'il existe un point O de l'espace ayant la propriété suivante : toute demi-droite Δ d'origine O dans l'espace à 3 dimensions coupe la surface du polyèdre en un point M et un seul (*).

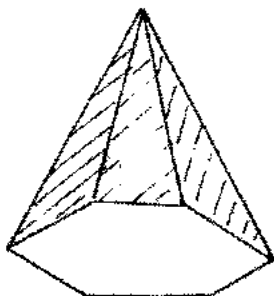


(*) Cette définition implique en particulier que la surface du polyèdre est homéomorphe à une sphère de dimension 2).

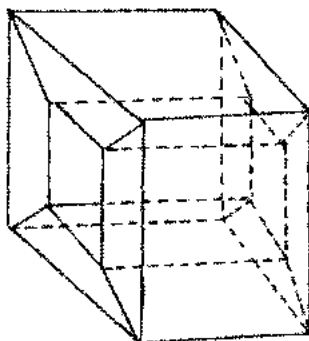
Exemples de mauvais polyèdres



Surface du prisme
(3 faces latérales + 1 base)
[polyèdre non "borné"]

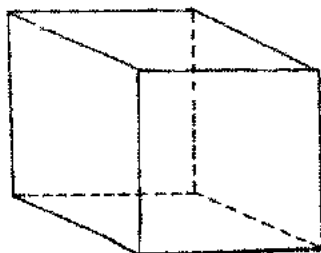


Surface latérale d'une pyramide (base exclue)
[polyèdre non "fermé" : sa surface ne limite pas un intérieur et un extérieur]

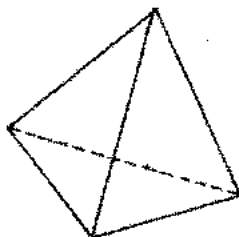


Surface d'un "cube troué"

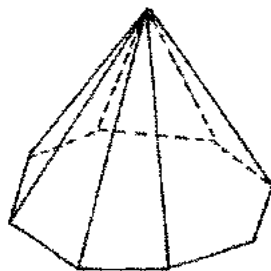
Exemples de bons polyèdres



I
Le cube (6 faces)

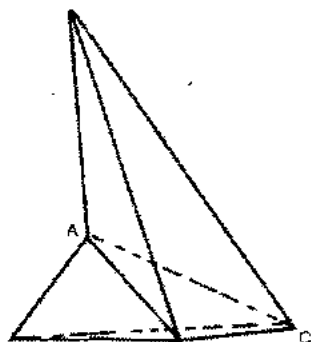


II
Le tétraèdre (4 faces)



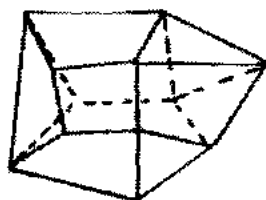
III
La pyramide n -gonale, base comprise

Prendre pour O un point intérieur
situé dans le plan ABC



IV

2 tétraèdres accolés par une face.



V

Notons F le nombre de faces du polyèdre

S le nombre de sommets

A le nombre d'arêtes

et $\chi = F + S - A$.

Exemples	I	II	III	IV	V
F	6	4	$n+1$	6	12
S	8	4	$n+1$	5	12
A	12	6	$2n$	9	22
$\chi = F + S - A$	2	2	2	2	2

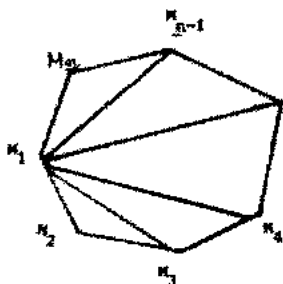
On constate, sur ces exemples, que χ est toujours égal à 2. On va voir que ceci est général.

Théorème d'Euler

Pour tout bon polyèdre \mathcal{P} de l'espace à 3 dimensions, ayant F faces, S sommets et A arêtes, on a toujours :

$$F + S - A = 2$$

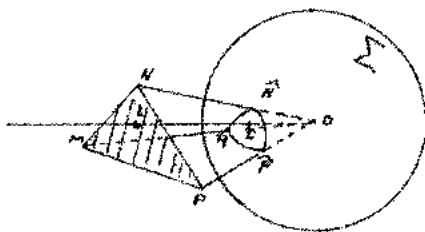
i) Tout d'abord, on peut se ramener au cas où chaque face de \mathcal{P} est un triangle. En effet, si une face est un polygone à n côtés avec $n > 3$, on peut toujours la diviser en $n-2$ triangles comme indiqué sur le dessin ci-dessous dans le cas $n = 7$. Cela revient à ajouter $(n-2) - 1$ faces, $n-3$ arêtes, et à ne pas modifier le nombre de sommets ; le nouveau polyèdre obtenu a donc $F + (n-3)$ faces, $A + (n-3)$ arêtes et S sommets ; $F + S - A$ n'a pas changé.



2) Supposons désormais que \mathcal{F} n'a que des faces triangulaires ; soit O un point de l'espace à 3 dimensions tel que toute demi-droite Δ d'origine O rencontre la surface de \mathcal{F} en un point L et un seul.

Soit Σ une sphère de centre O et \hat{L} le point où Δ recoupe Σ : l'application $\mathcal{F} \rightarrow \Sigma$ définie par $L \mapsto \hat{L}$ sera appelée la *projection* de \mathcal{F} sur Σ .

Tout triangle MNP formant une face de \mathcal{F} se projette suivant un triangle sphérique $\hat{M}\hat{N}\hat{P}$ [en effet, le plan OMN , étant diamétral, coupe Σ suivant un grand cercle : la projection \widehat{MN} du segment MN est donc un arc de grand cercle ; même chose pour MP et NP]. On projette ainsi chaque triangle de \mathcal{F} : on obtient une triangulation de Σ ayant mêmes nombres, F , S et A que le polyèdre \mathcal{F} . Le théorème du § 3 permet de conclure.



Remarque : si \mathcal{F} n'est pas un bon polyèdre, $F + S - A$ peut ne plus être égal à 2.

Sur les "mauvais polyèdres" définis précédemment, on a par exemple :

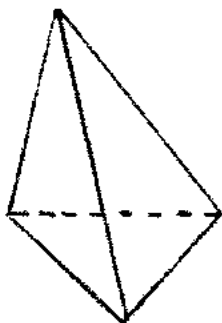
	prisme à 1 base	pyramide n .gonale (base exclue)	cube troué
F	4	n	16
S	3	$n+1$	16
A	6	$2n$	32
F+S-A	1	1	0

5 — Polyèdres réguliers

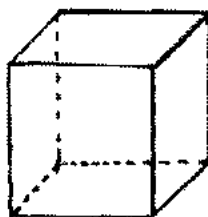
Soient p et q deux entiers ≥ 3 . Un bon polyèdre \mathcal{P} sera dit *régulier* de type (p,q) si :

- toutes ses faces ont même nombre p d'arêtes
- à chacun de ses sommets, aboutit un même nombre q d'arêtes.

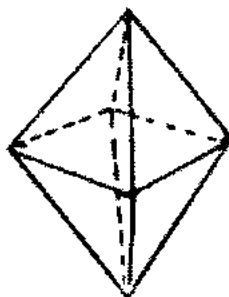
Exemples



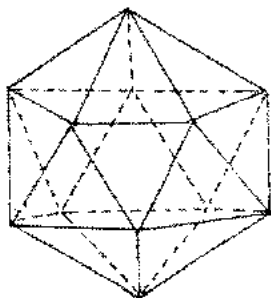
Le tétraèdre
type (3,3)



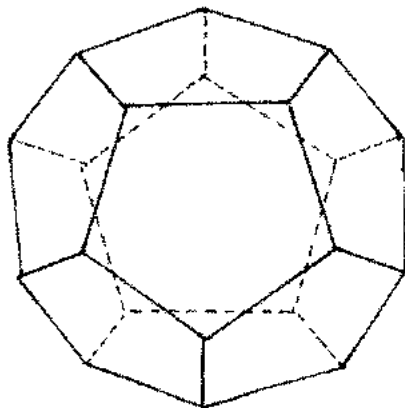
L'octaèdre
type (3,4)



Le cube
type (4,3)



Le dodécaèdre
type (5,3)



L'icosaèdre
type (3,5)

	tétraèdre	cube	octaèdre	icosaèdre	dodécaèdre
p	3	4	3	3	5
q	3	3	4	5	3
F	4	6	8	20	12
S	4	8	6	12	20
A	6	12	12	30	30
$F+S-A$	2	2	2	2	2

Ces exemples sont en fait les seuls possibles en le sens du

Théorème

Pour tout polyèdre régulier, (F, S, A, p, q) est de l'un des 5 types du tableau ci-dessus.

Toutes les faces ayant même nombre p d'arêtes, et chaque arête appartenant à 2 faces, on a :

$$pF = 2A \quad (3F = 2A \text{ si toutes les faces sont des triangles}).$$

De même, q arêtes aboutissant à chaque sommet, et chaque arête aboutissant à 2 sommets,

$$qS = 2A.$$

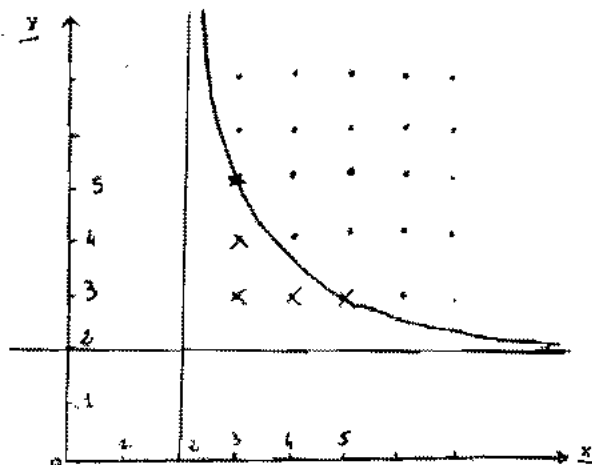
Reportons $F = \frac{2}{p}A$ et $S = \frac{2}{q}A$ dans l'égalité $F+S-A=2$ du théorème d'Euler ; on obtient :

$$\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right)A = 2.$$

Ceci prouve, puisque A est un entier >0 , que $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1$ est >0 , soit $2(p+q) - pq > 0$. Puisque p et q sont des entiers, cette inégalité s'écrit encore

$$2(p+q) - pq \geq 1 \quad (p \geq 3, q \geq 3).$$

Dessinant l'une des branches de l'hyperbole d'équation $2(x+y) - xy = 1$ (soit $(y-2)(x-2) = 3$), on peut lire sur le graphique ci-dessous que les seules valeurs possibles de (p, q) sont $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5)$ et $(5, 3)$.



Mais il n'est pas besoin d'être si savant et d'avoir étudié la fonction homographique pour résoudre "à la main" l'inéquation :

$$q \leq 2 + \frac{3}{p-2}$$

sachant que p et q doivent être des entiers ≥ 3 .

Pour $p=3$, $3 \leq q \leq 5$: q ne peut prendre que les valeurs 3, 4 et 5.

Pour $p=4$, $3 \leq q \leq 3,5$: q ne peut qu'être égal à 3.

Pour $p=5$, $3 \leq q \leq 3$: q ne peut qu'être égal à 3.

Pour $p > 5$, $2 + \frac{3}{p-2} < 3$: il n'existe donc aucune valeur correspondante de q .

Par ailleurs, une fois fixés p et q (avec $2(p+q) - pq \geq 1$, donc en particulier $\neq 0$), F , S et A prennent nécessairement les valeurs :

$$F = \frac{4q}{2(p+q) - pq} \quad S = \frac{4p}{2(p+q) - pq} \quad A = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque : On a noté sur le tableau une "dualité" entre le cube et l'octaèdre ainsi qu'entre l'isocaèdre et le dodécaèdre, tandis que le tétraèdre est *autodual*. Cela signifie que pour le cube et l'octaèdre, p et q s'échangent, F et S aussi, tandis que les valeurs de A sont les mêmes.

Pour le tétraèdre, $p = q$, $F = S$.

On peut réaliser géométriquement cette dualité grâce à la "transformation par polaires réciproques" par rapport à la sphère, qui transforme points en plans, plans en points, et droites en droites.

Références

M. Berger — *Cours de géométrie* (Cedic)

D. Lehmann — *Géométrie et topologie des surfaces* (à paraître aux P.U.F.).