Un exemple de "Mathématique active" dans une classe de sixième (Montreuil)

par Jean SAUVY, ingénieur des Ponts et Chaussées
(équipe Activités Recherches Pédagogiques)

Au moment où "l'innovation pédagogique" semble retrouver une nouvelle jeunesse et où certaines "hardiesses" deviennent licites, il m'a paru intéressant de relater pour les lecteurs du Bulletin une expérience de "Mathématiques actives" à laquelle j'ai participé et qui s'est déroulée en mai dernier au C.E.S. Politzer de Montreuil (banlieue parisienne), sur l'initiative d'un professeur de mathématiques de cet établissement, Nicole Chouchan.

Cette initiative consistait, dans le cadre d'un P.A.E., à confier une classe de sixième, pendant trois fois une heure et demie, à un intervenant extérieur — le signataire de ces lignes — chargé d'apporter un peu de sang neuf à l'enseignement traditionnel.

Chaque séance s'est déroulée suivant le même schéma de base :

a) Une préparation psychologique et corporelle servant de transition entre le temps et l'espace de récréation et le temps et l'espace des activités d'étude et de recherche.

b) La constitution d'équipes et l'organisation sociale du travail : répartition de l'espace, du matériel, des tâches...

c) Le déroulement des activités (avec des phases à dominante corporelle et des phases à dominante scolaire).

Il serait fastidieux de décrire en détail la totalité de ces trois séances. Je me bornerai donc à quelques exemples.

Voici un exemple de "préparation psychologique et corporelle".

J'accueille les enfants, leur dis en quelques mots comment nous allons travailler ("comme des ouvriers sur un chantier ou des artisans dans un atelier", c'est-à-dire de façon *sérieuse* mais *détendue*) et les invite à se déplacer lentement dans la pièce de façon à occuper au maximum l'espace disponible, en évitant de se heurter. Puis, je leur demande de former deux files et de croiser les mains devant eux à hauteur de leur poitrine en entrelaçant les doigts.

Question : Quelle est la main qui est au-dessus de l'autre, la droite ou la gauche ? On constate qu'il y a à peu près autant de mains droites que de mains gauches en "position dominante". Ceci nous permet de réaliser une première partition des élèves en deux groupes "homogènes" (quant à la façon de croiser les mains !).

Cette phase dure environ dix/douze minutes et elle remplit bien son office de phase de transition et de préparation.

Pour la formation des sous-groupes, j'ai cru bon de varier les techniques mises en œuvre. Un jour, j'ai cherché à constituer des "groupes équilibrés" (au point de vue de la composition filles/garçons, âges, tailles,...), un autre jour, j'ai fait appel "au hasard" : j'ai attribué un numéro à chaque enfant, puis, comme j'avais besoin de trois groupes, j'ai regroupé les 1, 4, 7... ; 2, 5, 8... ; 3, 6, 9...

Voici maintenant, très brièvement décrites, les "activités" proprement dites (dans le cas de la seconde séance, celle centrée sur le nombre et les arithmétiques).

Au début, distribution de cartons aux élèves, chacun des cartons portant un numéro de 1 à 21. Les enfants se déplacent dans la pièce à petits pas, les yeux fermés. Au signal, ils s'arrêtent et, gardant les yeux fermés, chacun énonce à haute voix son numéro d'ordre, en commençant par 1, par ordre croissant. On "redescend" la suite en sens inverse, de 21 à 1. Puis, on saute de 2 en 2, en travaillant successivement sur les impairs et sur les pairs, etc... On ouvre les yeux et chacun dépose son carton à ses pieds et se retire. On regarde comment sont disposés les cartons sur le sol. On retire les cartons portant un numéro pair. Combien de cartons reste-t-il ? Un élève dessine au tableau la configuration formée par les points-cartons ("comme les étoiles dans le ciel"). Pendant ce temps, une équipe de trois enfants déroule sur le sol un cordon reliant successivement les cartons 1 à 3, 3 à 5, et formant un chemin continu, en zig-zag, de 1 à 21. Nouveau dessin au tableau ainsi que des questions que je pose : quel est le segment le plus long, le plus court ? (Evaluation à vue de nez, mesure en pas et pieds). Etablissement d'un tableau de mesures, etc...

Quand on a épuisé cette première piste, je propose autre chose, demandant aux élèves de se regrouper *deux par deux*, de telle façon que le total des nombres inscrits sur leurs cartons respectifs fasse 21 : (1 + 20), (2 + 19),...

Question analogue mais avec trois cartons. Combien peut-on former d'équipes dont le total des cartons fasse 21 ?

Dès que je décèle une lassitude, je passe à autre chose. Je demande aux élèves de se répartir "en rond", jalonnant de leur site une ellipse approximative inscrite dans la salle rectangulaire, de telle façon que les cartons numériques soient ordonnés. Les enfants s'assoient par terre, je donne une balle à l'un d'eux et demande qu'on la fasse circuler d'élèves en élèves, suivant des modalités variées. Chaque fois qu'un élève lance la balle, il doit énoncer à haute voix, successivement son propre numéro d'identification et celui du destinataire. De la même façon, on fait circuler une pelote de laine dont le fil en se déroulant matérialise et pérénise la trajectoire de la balle. Dessins au tableau et sur des feuilles ronéotées (portant les nombres de 1 à 21) que je distribue à ce moment-là. Exercices divers introduisant aux arithmétiques modulo 2, modulo 3... Lignes polygonales qui se ferment au premier tour, excluant un certain nombre de "joueurs", et lignes qui font plusieurs tours. (Il s'agit d'une première "exploration" appelée à être reprise ultérieurement dans un travail de caractère plus traditionnel).

Quels enseignements tirer de cette expérience ?

Après un quart d'heure d'observation et de réserve, le premier jour, la plupart des élèves se sont bien adaptés à ce type d'enseignement (assez différent de ce qu'ils pratiquent généralement). Ils se sont impliqués dans les diverses activités qui leur étaient proposées, certains se montrant plus actifs et plus à leur aise — m'a dit N. Chouchan — qu'à l'ordinaire.

A ce propos, j'ai fait les remarques suivantes.

Lors de la troisième séance, où il s'agissait d'organiser (en équipe) des mensurations et de noter des résultats, il y a eu pas mal de flottement au départ. Visiblement, les élèves en question n'avaient pas l'habitude d'affronter collectivement des problèmes élémentaires d'organisation, d'où beaucoup de tâtonnements et pas mal de maladresses. D'une certaine façon, ce type d'enseignement, en dehors de ce qu'il peut apporter dans le domaine des connaissances mathématiques, devrait contribuer à combler une carence de l'enseignement traditionnel.

Tout au long de "l'expérience", j'ai d'autre part été frappé par le caractère très distrait des élèves, dont certains, pourtant, étaient âgés de 14-15 ans.

Aussi est-il nécessaire, m'a-t-il semblé, pour écarter la tentation de chahut, de proposer des activités vraiment "prenantes" qui mobilisent l'ensemble de la classe de façon quasi permanente. Il est bon également de pouvoir "passer à autre chose" dès qu'apparaissent des signes de lassitude.

De toute façon, il ne faut pas se cacher qu'il s'agit là d'une méthode d'enseignement difficile. Elle exige du professeur qu'il soit, à tour de rôle, résolument "directif" (distribuant les tâches, fixant les objectifs et contrôlant l'exécution des résultats) et "permissif" (laissant un maximum de latitude aux enfants pour qu'ils puissent tâtonner et marcher à leur propre allure).

Mais, peut-être, la principale difficulté se situe-t-elle au niveau du choix des activités. Pour que celles-ci sollicitent et soutiennent l'intérêt des enfants, il faut qu'elles soient *vectrices de questionnement*, qu'elles fassent entrevoir quelque *énigme à résoudre.*

Il faut aussi que ces activités, comme je le disais au début, offrent des *possibilités de mathématisation.*

Cette double exigence est bien satisfaite dans le cas du *jeu du parcours eulérien sur un plan de maison* qui a fait l'objet de la première séance. Le plan en question étant tracé sur le sol, il s'agit de trouver (et de matérialiser avec un cordon) un parcours passant par toutes les pièces (et par le jardin) et *franchissant toutes les portes mais une fois seulement.* La réponse n'est pas immédiate. Les enfants découvrent qu'il y a *plusieurs solutions.* Tout cela fait surgir des questions. Guidés par le professeur, les élèves peuvent trouver une "loi", une "méthode" permettant d'éviter les tâtonnements. Ils peuvent ainsi apprécier sur un cas précis ce qu'est un théorème mathématique et à quoi cela sert. Dans le cas présent, nous n'avons pas pu aller jusqu'à l'énoncé d'un théorème. Je l'avais d'ailleurs prévu et j'avais préparé une fiche (1) permettant de poursuivre l'investigation ultérieurement, fiche que j'ai remise au professeur pour utilisation éventuelle dans la classe. En fait, ce qui m'a paru surtout positif, sur le plan mathématique, c'est, dans ce cas précis, le fait que nous ayons procédé à la "modélisation" du problème et que nous l'ayons transposé en un "langage graphique" mieux adapté à sa solution mathématique. J'avais en effet dessiné sur des panneaux préétablis divers graphes planaires topologiques qui, sous une autre apparence, correspondaient au plan de maison. En travaillant simultanément sur le plan et sur le graphe, les élèves ont établi des correspondances terme à terme, les sommets du graphe correspondant aux pièces de la maison et les arcs correspondant aux portes. Pour établir cette correspondance, qui n'a rien de trivial, les enfants ont dû surmonter de premiers élans trompeurs (la ligne d'un arc s'apparentant plutôt dans leur esprit à un mur qu'à une porte), ils ont dû approfondir la notion de chemin-relation. En cela, l'exercice m'a semblé formateur, non seulement au niveau des mathématiques mais, plus généralement, au niveau de l'activité intellectuelle de base.

Les deux autres thèmes, eux aussi, répondaient bien à la double exigence formulée plus haut. Ils ont autorisé une authentique activité physique des élèves, mais ils ont permis, aussi, de faire des mathématiques...

Et mon impression générale, partagée par Nicole Chouchan, est que l'expérience a été positive, c'est-à-dire utile aux élèves.

P.S. : Je profite de l'occasion de cet article pour indiquer mon total accord avec les réflexions "sur ce que pourrait être un renouvellement de l'enseignement des mathématiques au collège" publiées dans le n° 334 du Bulletin. Je souscris en particulier au dernier paragraphe souhaitant que les "situations d'apprentissage soient, le plus fréquemment possible, de nature pluridisciplinaire". C'est bien dans cet esprit que j'ai œuvré à Montreuil.

(1) Voir annexe 1.

ANNEXE 1

Fiche accompagnant la séance "Plan de maison"

Jeux avec une ficelle ("fil d'Ariane") : parcours sur un graphe topologique

1. Qu'est-ce qu'un graphe eulérien ?

Un graphe topologique est un dessin représentant des "chemins" qui se croisent, tel celui de la figure 1.

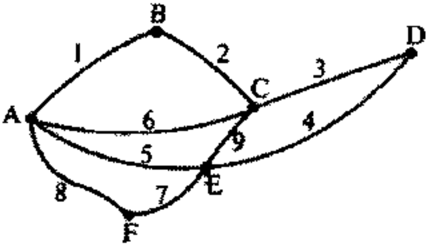


Fig. 1

Chaque *étape* (B, par exemple, entre A et C) et chaque *croisement* (E, par exemple) sont figurés par un point que nous repérons par une lettre majuscule de l'alphabet. Nous appelons ces points des *sommets*.

Sur la figure 1, on décompte six sommets : A, B, C, D, E, F.

La portion de chemin entre deux sommets consécutifs est appelée *arc*. Sur le dessin, les arcs sont repérés par des chiffres (de 1 à 9).

On peut imaginer qu'il s'agit du *plan d'un quartier*, que les arcs sont des rues et que les sommets sont des boîtes aux lettres.

Comment le facteur, partant de A, par exemple, doit-il organiser sa tournée pour qu'il passe par *toutes* les boîtes aux lettres (les sommets) et qu'*il ne passe pas deux fois par la même portion de rue* (qu'il n'emprunte pas deux fois le même arc) ?

Si on trouve un tel parcours, on dit que le graphe est "eulérien" [d'après le mathématicien Euler (1707-1783)].

2. Comment fabriquer un graphe eulérien ?

Imaginons qu'en faisant sa tournée, le facteur déroule une ficelle. Quand il aura terminé son parcours, la ficelle sera passée par toutes les rues et par toutes les boîtes aux lettres. Autrement dit, *une ficelle d'un seul tenant permet toujours de reproduire le dessin d'un graphe eulérien.*

Sur la figure 1, nous pouvons par exemple disposer notre ficelle avec une de ses extrémités en A et nous la déroulons suivant le parcours

5, 4, 3, 6, 8, 7, 9, 2, 1

qui nous ramène en A.

Mais nous pouvons aussi bien partir de D et faire le parcours

3, 9, 7, 8, 6, 2, 1, 5, 4

qui nous ramène en D.

Chaque fois que nous traçons sur une feuille une ligne sans relever le crayon et sans passer une nouvelle fois sur un trait déjà tracé, nous dessinons un graphe eulérien.

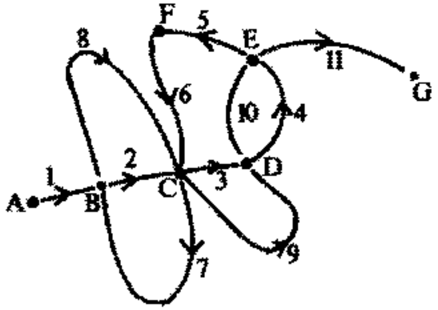


Fig. 2

7 sommets
11 arcs

Les figures 2, 3 et 4 nous en donnent trois exemples.

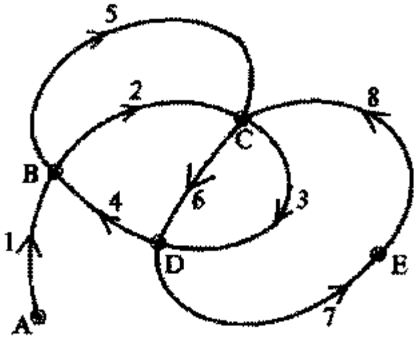


Fig. 3

5 sommets
8 arcs

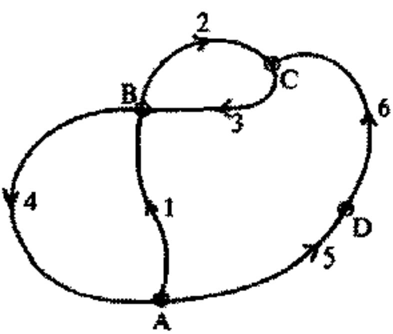
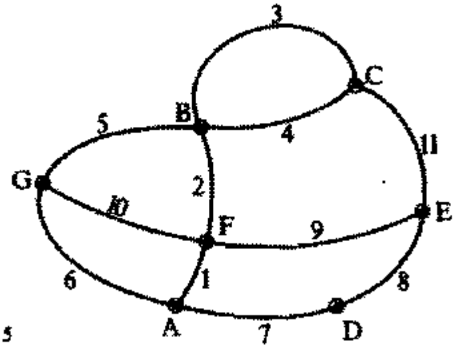


Fig. 4

4 sommets
6 arcs

3. Comment reconnaître qu'un graphe est eulérien ?

Pour reconnaître si un graphe est eulérien ou non, nous devons nous intéresser à ce qui se passe à chacun des sommets.



7 sommets
11 arcs

Fig. 5

Soit le graphe de la figure 5.

Je pars par exemple de A. J'ai *trois* possibilités. J'en choisis une, par exemple l'arc n° 1 qui m'amène en F. Ici encore trois possibilités pour poursuivre mon chemin. Je choisis 2 qui m'amène en B, puis 3 qui m'amène en C, puis 4 et 5 qui m'amènent en G, 6 qui me fait rejoindre A. Là, je dois obligatoirement emprunter 7, traverser D et poursuivre en E. Là, j'ai le choix entre 11 et 9. Si je choisis 11, je rejoins C et là, je suis bloqué parce que je suis déjà passé par 3 et 4. Je prends donc l'arc 9 qui m'amène en F. Là, pas d'autre choix que 10. Me voici en G où je suis bloqué sans être passé par 11.

En réfléchissant, on voit que certains sommets ne posent pas de problèmes. Ce sont les *étapes* (telles que D) et les *croisements* (tels que B ou F). Dans ce cas, en effet, on n'est pas à un bout isolé de la ficelle, et l'on peut donc toujours poursuivre son chemin.

C'est ce qu'on peut appeler des *sommets pairs* (un nombre pair d'arcs).

Par contre, les autres sommets, ceux où convergent un *nombre impair* d'arcs, sont plus exigeants car il faut obligatoirement y placer une extrémité de la ficelle (sans quoi ils ne seraient pas *impairs*).

Mais notre ficelle n'a que deux extrémités. Nous ne pouvons donc accepter que deux sommets impairs.

C'était le cas pour le graphe de la figure 4 où seuls A et C étaient impairs. On pouvait alors indifféremment partir de A pour arriver en C, ou partir de C pour arriver en A.

Ce n'est plus le cas sur la figure 5 que nous avons obtenue en plaçant une nouvelle ficelle 9, 10 allant de E en G.

Il y a cette fois 4 sommets impairs (A, C, E, G).

Nous pouvons donc énoncer le *théorème :*

Pour qu'un graphe soit eulérien, il doit compter au maximum deux sommets impairs.

4. A quoi sert le théorème ?

Le système précédent nous permet de décider si le graphe de la figure 6 est ou non eulérien.

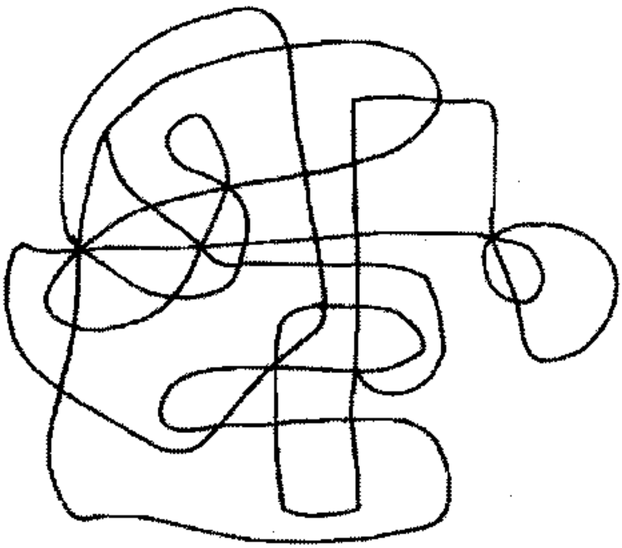


fig. 6

ANNEXE 2

Commentaire de Nicole Chouchan

Je veux essayer d'apporter à l'exposé précédent un complément du professeur de mathématique qui souhaitait voir vivre les mathématiques autrement, grâce à Jean Sauvy, au collège Politzer à Montreuil.

Je parlerai :

A/ 1. *Des circonstances* : la présence d'intervenants extérieurs fait partie du projet de ludothèque que j'ai pu réaliser, comme PAE, cette année, et est acceptée par ma directrice, ainsi que le principe d'une rémunération symbolique prise sur le budget du PAE.

2. *Du lieu de travail*, qui a, je crois, son importance : ma salle de classe habituelle étant minuscule, et d'une nudité attristante (malgré les efforts de mes élèves), nous avons eu l'autorisation de travailler dans la salle de bibliothèque, spacieuse, garnie de quelques livres sur des rayonnages, créant une ambiance plus chaleureuse, plus douce aux yeux et aux oreilles.

3. *De la classe choisie* pour l'expérience : une sixième, très ordinaire, type Haby, sans problèmes trop graves de comportement.

B/ 1. *Des modifications* progressives de l'atmosphère apportées par cette intervention. A une curiosité intense au départ, puis à un certain amusement, a succédé une période de travail très active.

La présence parmi les élèves d'un interlocuteur différent, ne les connaissant pas scolairement, grâce auquel les échecs habituels s'effacent, éveille en eux un désir de plus en plus grand de réussite. Cela a été très frappant au cours de la première séance ; par exemple, j'ai vu un élève, isolé jusqu'ici dans des difficultés telles qu'il va redoubler sa sixième, sortir de son engourdissement, s'installer seul dans une recherche passionnée de différents graphes pour une situation donnée ; une autre élève, faiblement motivée scolairement, se débloquer petit à petit par la contribution de son corps et de celui de ses camarades à l'activité mathématique.

2. *Des prolongements* possibles et nécessaires à cette méthode de travail pour les élèves et pour le professeurs.

C'est ainsi que malgré la petitesse de ma salle de cours, j'ai pu, depuis, faire vivre, avec d'autres élèves, une recherche de la médiatrice d'un segment, régionner l'espace, résoudre des problèmes de symétrie et de compositions de symétries par rapport à des miroirs élèves...

A la rentrée, je compte distribuer à mes sixièmes, que je retrouverai en cinquième, les derniers exercices proposés par J. Sauvy et non encore traités. Nous verrons alors si nous pouvons arriver jusqu'à un théorème sur les graphes eulériens.