# 10
# JEUX ET MATHS

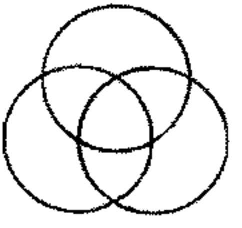
## Le cancer de Napoléon

*par André DELEDICQ, IREM de Paris-Sud*

*Lorsque le groupe inter-IREM d'épistémologie me fit part de la découverte qu'il avait faite, je dois avouer que ma surprise fut à la mesure de l'événement : une note marginale de Monge dans ses "Principia Cubistissimae" apportait une réponse sans équivoque à une question que les historiens se posent depuis un siècle et demi : que fabriquait Napoléon avec la main glissée dans son gilet ? Quel objet y manipulait-il à l'insu de ses contemporains ?*

*Oui ! Vous avez peut-être deviné maintenant l'énorme vérité : un Cube !*

*Les perspectives ouvertes par cette révélation me semblèrent suffisantes pour me lancer dans une recherche systématique ; il me suffit de lire les publicités pour rattacher à des jeux de permutations évidents la perplexité lapidaire du Sphinx de Gizeh devant les trois tétraèdres japonais, ainsi que le désespoir des peuples devant la reconstruction de la tour de Babel. Je supputai que le taquin de Sam Loyd lui-même était inspiré par les alignements de Carnac, sa version cylindrique étant manifestement la clef ésotérique du cercle mégalithique de Stonehenge. Mais c'est en survolant le triangle des Bermudes que je vis se dessiner, dans les profondeurs de l'océan, la figure chérie des mathématiques modernes :*



*"Le" diagramme d'Euler et ses trois cercles s'intersectant deux à deux !*

*Ce serait bien ma veine, me dis-je, si un inventeur de génie pouvait transformer cette figure fondamentale en un jeu de permutations qui me permette d'écrire un article dans le Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.*

*Et voilà que Raoul Raba est entré dans mon bureau et m'a montré l'objet fascinant dont l'entreprenais derechef l'étude, et que vous pouvez lui commander à l'adresse suivante : R. RABA, 7 Tour d'Andresy, 78570 Andresy.*

*Vous pouvez aussi réaliser cet objet en bois ou en carton et dessiner dessus tel dessin que vous désirez.*

*C'est afin de vous aider dans votre lutte désespérée contre le suicide intellectuel que les quelques pages suivantes ont été écrites.*

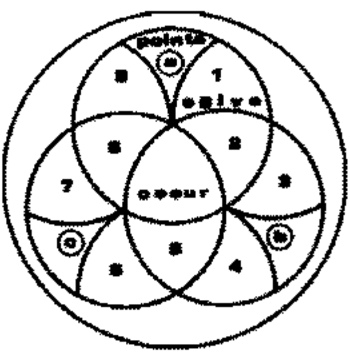
*(Voir aussi : "La passion des Taquins" dans* La Recherche *de décembre 1981).*

## Le taquinoscope de Raba

### I. Analyse de l'objet

1. *Les pièces*

L'objet est constitué de 13 triangles curvilignes :
— 1 triangle "cœur",
— 9 triangles "ogives", notés 1 à 9,
— 3 triangles "pointes", notés *a, b, c* .




Les triangles peuvent tourner par groupes de 6 autour de 3 axes et se mélanger ainsi les uns aux autres. Mais :

• les pointes *a, b, c,* ne peuvent pas quitter le cercle où elles sont initialement ;
• le cœur est obligatoirement situé dans le cercle qui tourne.

2. *Notations des mouvements*

Appelons $a$, $b$, $c$, les rotations (d'un sixième de tour dans le sens des aiguilles d'une montre) de chacun des cercles contenant les pointes notées $a$, $b$, $c$ (et $a^-$, $b^-$, $c^-$, les rotations dans l'autre sens).

En fait, ces rotations ne sont pas les mouvements élémentaires du taquinoscope : par exemple, après avoir effectué la rotation $b$, le cœur est alors commun aux cercles $(a)$ et $(b)$. Si on continue à effectuer $b$ ou si on effectue $a^-$, le cœur n'appartient plus qu'à un seul cercle ; cela interdit tout mouvement autre qu'un retour en arrière. Le seul mouvement significatif pouvant suivre la rotation $b$ est donc la rotation $a$.

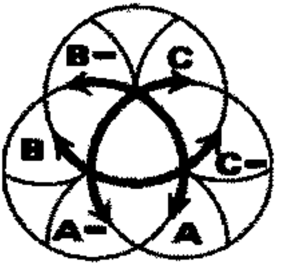
Finalement, les six mouvements élémentaires du taquinoscope sont :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $b\,a$ | noté : C | $a^-\,b^-$ | noté : $C^-$ |
| $c\,b$ | noté : A | $b^-\,c^-$ | noté : $A^-$ |
| $a\,c$ | noté : B | $c^-\,a^-$ | noté : $B^-$ |

*Remarques* :

- l'inverse du mouvement $x$ est noté $x^-$
- $x$ suivi du mouvement $y$ est noté $xy$.

La figure suivante résume la notation des mouvements élémentaires en indiquant la direction de première rotation du cœur (la deuxième rotation s'en déduit puisque le cœur doit revenir au centre).



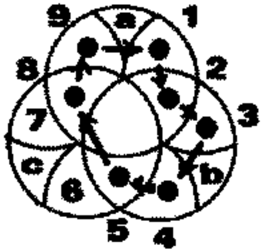

## II. Etude de mouvements "simples"

1. *Effet des mouvements élémentaires*

Chacun des 6 mouvements élémentaires a pour effet de :

*permuter circulairement 7 des 9 ogives.*

Précisément, $x$ fait tourner dans le sens des aiguilles d'une montre les 7 triangles n'appartenant pas à $(x)$.




2. *Description des états possibles*

Le véritable problème est dans le rangement des 9 ogives.

Les 6 mouvements élémentaires sont des permutations de 7 ogives. On ne peut donc engendrer que des permutations paires de $S_9$ et, en fait, tout le groupe alterné $A_9$ est engendré.

L'ensemble des 9 ogives peut donc prendre $\frac{9!}{2}$ états différents, soit

$$\frac{362\,880}{2} = 181\,440 .$$

Cependant, malgré la petitesse de cet ensemble, il est extrêmement difficile de s'y diriger ; cela tient essentiellement au fait que les mouvements élémentaires agissent sur la quasi totalité des pièces : il n'est donc pas possible de mettre des pièces "à l'abri" pour en permuter d'autres et, en particulier, il est impossible de "conjuguer" !(*)

Les pointes peuvent se déplacer de 1 ou 2 positions à partir de leur position-médiane ; mais tout mouvement élémentaire déplace deux pointes d'une position. Ainsi, le nombre total exprimant le décalage des pointes est un nombre pair. Un petit calcul montre que le nombre d'états possibles des pointes lorsque le cœur est au centre ne dépasse pas 39 $(3 \times 5 + 2 \times 6 \times 2)$.

On peut aussi prétendre que le cœur peut générer 18 $(6+6+6)$ états différents en faisant bêtement tourner un des 3 cercles à partir du cœur au centre. Cependant, les mouvements peuvent être limités si une pointe est décalée de 2 positions. Dans tous les cas, on est loin du milliard de possibilités.

3. *Effet des "commutateurs"*

Pour remettre les pointes à leur place, il faut faire autant de rotations d'un cercle dans un sens que dans l'autre. Des mouvements intéressants sont donc ceux qui, lorsqu'ils comportent un mouvement élémentaire $X$, comportent aussi son inverse $X^-$ .

(*) Pour des précisions sur la conjugaison, voir l'article cité plus haut, ou bien *Le cube, mode d'emploi*, édition Cedic.

Mais le mouvement $XX^-$ est sans intérêt.

Après avoir effectué $XY$, il est idiot de faire $Y^-$ tout de suite ; on peut donc faire d'abord $X^-$ puis $Y^-$.

Finalement un mouvement important est le suivant :

$$XYX^-Y^-.$$

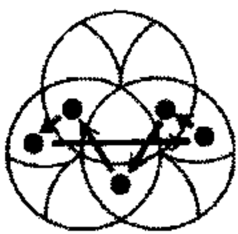
Pour plus de commodité, ce mouvement sera noté $[XY]$ et appelé un mouvement "commutateur".

*Remarque* :

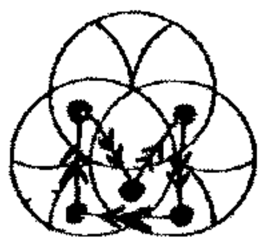
$$[XY]^- = [YX]$$

En effet $[YX] = YXY^-X^-$ et $[XY]^- = (XYX^-Y^-)^- = YXY^-X^-$.

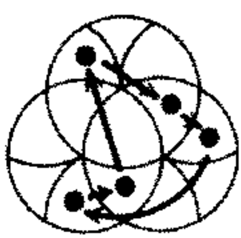
***Chacun des 24 commutateurs a pour effet de permuter circulairement 5 ogives.*** A une circulation des lettres A, B, C près et à une inversion près, il n'y a que les 4 types de commutateurs suivants :



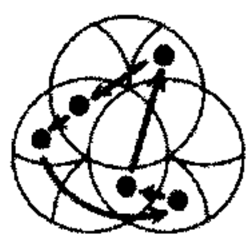
**$C^-BCB^-$**
noté $W = [C^-B]$



**$B^-CBC^-$**
noté $M = [B^-C]$



**$B^-A^-BA$**
noté $G = [B^-A^-]$



**$CAC^-A^-$**
noté $D = [CA]$

## III. Algorithme de reconstruction

Lorsque les pièces ont été mélangées, vous pouvez parfois arriver à les replacer correctement sans trop d'efforts parce que, en fait, le manipulateur débutant n'est pas vraiment un mélangeur de génie. Dans les cas apparemment désespérés, voici une technique (très) longue mais sûre :

1 — remettre les pointes à leur place
2 — placer les deux ogives supérieures : 1 et 9
3 — placer les deux ogives latérales : 3 et 7
4 — placer, en les permutant, les 5 ogives 2,4,5,6,8.

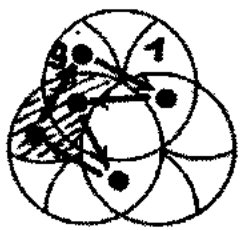
1. Le placement des pointes n'offre aucune difficulté. Dans la suite, tous les mouvements effectués conserveront cette position-standard des pointes.

2. L'ogive 1 se met en place grâce à un ou plusieurs mouvements W, M, G ou D bien choisis pour aller assez vite.

L'ogive 9 se met alors en place par des mouvements laissant l'ogive 1 à sa place :

* soit grâce à un ou plusieurs mouvements G successifs
* soit grâce à un ou des mouvements de type M
* soit grâce au mouvement M GG.

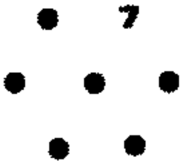

$B^-A^-BA$




$C^-ACA^-$


3. Dans la suite, ce sont les mouvements W et M qui seront constamment utilisés.

Le placement des 2 ogives latérales est fondé sur la remarque suivante : parmi les 7 ogives restantes, W et M opèrent chacun sur 3 ogives communes et 2 ogives spécifiques. Comme ceci :




Il est donc possible d'opérer ainsi :

(i) amener 7 en position 3 par W (ou $W^-$) ou par $M^-$ puis W (si jamais il était en position 4 ou 6)

(ii) si 3 est *dans le circuit de M*, l'amener en position 2 par des M ou $M^-$

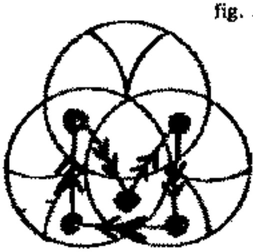

(iii) 7 et 3 se mettent alors en place par W.

Note : l'étape (ii) exige que 3 ne soit pas alors en position 7. Cette situation est facile à éviter lors de l'étape (i) en choisissant bien la manière d'amener 7 en position 3. Si par malheur 3 est en position 7 à la fin de l'étape (i), on peut alors effectuer W $M^-$ $W^-$ qui rétablit la situation.


4. Il reste à bien placer les 5 ogives 2,4,6,8,5 qui constituent l'orbite du seul mouvement M.

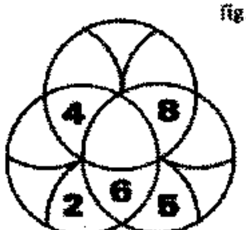
Nous vous proposons alors de regarder les cinq ogives dans l'ordre de la figure A (suggéré par l'effet de M). Deux cas sont alors possibles :

fig. A



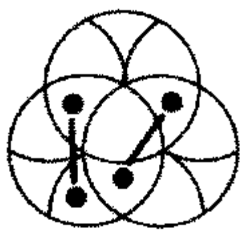
• *Le cas agréable* : en parcourant la figure A, vous rencontrez les ogives dans l'ordre 2,4,6,8,5 ; il ne vous reste plus qu'à effectuer M ou $M^-$, une ou deux fois
(par exemple, dans la situation de la figure B, vous devez faire : $M^- M^-$).

fig. B

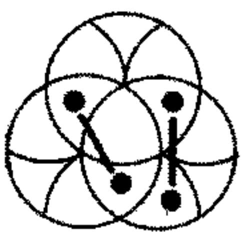



effectuer $M^-M^-$

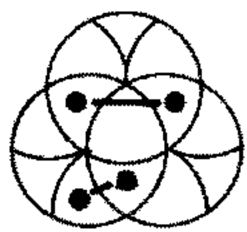
• *Le cas désagréable* : en parcourant la figure A, vous rencontrez les ogives dans un ordre différent. Il vous faut alors vous ramener d'abord au "cas agréable" ; pour cela, vous pouvez utiliser l'un des 4 mouvements suivants qui échangent deux couples d'ogives :



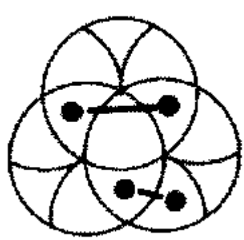
$(BA^-B^-.C^-AC)^3$
$= q$



$(C^-AC.BA^-B^-)^3$
$= p$



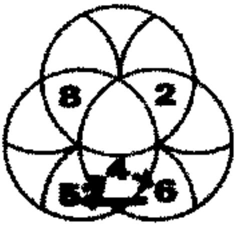
$[A^-C^-]^3[C^-B^-]$
$= r$



$[AB]^3[BC]$
$= s$

Vous pouvez constater que ces mouvements vous permettent d'aboutir dans tous les cas ; mais il n'est pas évident de découvrir les plus rapides. Nous vous proposons ci-dessous une technique peu performante sur le plan de la vitesse mais qui a l'avantage de pouvoir s'expliquer simplement :

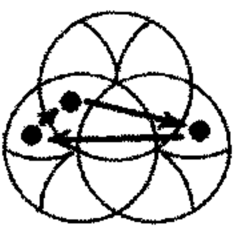
a) Placer d'abord les 2 ogives supérieures 2 et 8. Pour cela, vous pouvez :
- placer 2 par des M ou $M^-$
- si 8 n'est pas à sa place, c'est qu'il est :
  — en position 4 : faire *r* puis M M
  — en position 5 : faire *s* puis M M
  — en position 6 : faire *p* puis *s* puis M.

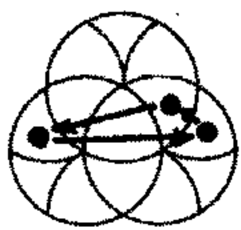


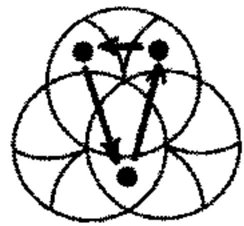
r s

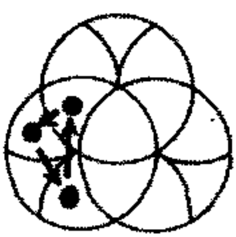
b) Il ne reste alors à placer que les ogives 4, 5 et 6. Si elles ne sont pas déjà bien placées, il suffit alors de les permuter circulairement soit par *r s* soit par *s r*.

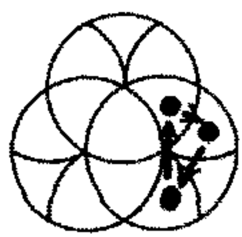
## IV. Manipulations avancées

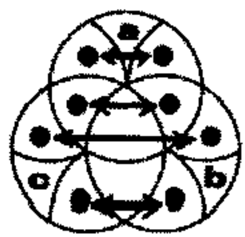

$C^-B^-CABA^-BCB^-A^-C^-A$


$BCB^-A^-C^-AC^-B^-CABA^-$

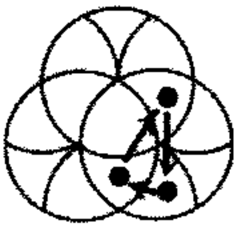

$([B^-A^-)].[CB^-].[CA].[B^-C])^2$


$B[C^-A^-][B^-A^-][CB]A$

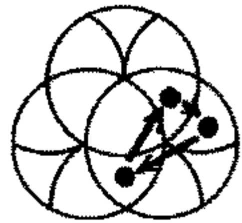

$C^-[BA]CA[B^-C^-]A^-$



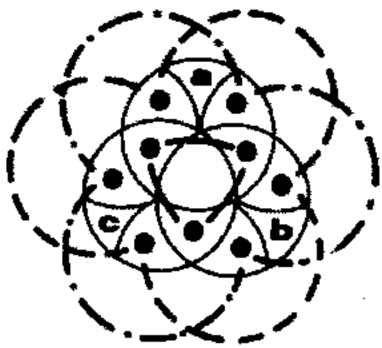
$([B^-A^-].[CA])^4[B^-A^-]$



$([B^-C].[BC])^2.[B^-C]$



$([A^-B].[A^-B^-])^2.[A^-B]$




$([C^-B].[B^-A].[A^-C])^4[C^-B]$