3
ECHANGES

Quelques hypothèses et propositions pédagogiques pour la formation en mathématiques

par Michel BRUSTON, responsable de l'action expérimentale "Introduction aux enseignements scientifiques"

L'article suivant est extrait d'un texte plus complet qui paraîtra, en 1982-83, avec d'autres, dans une brochure A.P.M.E.P. intitulée "Obstacles et déblocages en mathématiques".

Ces textes sont issus d'une expérimentation pédagogique en formation d'adultes, dans le cadre des enseignements préparatoires au Conservatoire National des Arts et Métiers, d'où les vocables : "formateur" et "étudiants".

Mais leur contenu intéresse au premier chef l'ensemble des enseignants de mathématiques.

Hypothèses fondamentales

1°) *Sur les méthodes en pédagogie*

La mise au point de méthodes nouvelles en pédagogie des mathématiques présente un grand intérêt. Cependant, l'emploi d'une méthode, quelle qu'elle soit, présente aussi un risque : celui de figer le moment pédagogique, d'en exclure l'inattendu.

Or, le formateur a tout intérêt à saisir "au bond" les questions, remarques, perplexités, et même (on pourrait dire surtout) les objections des étudiants. Pour cela, au besoin, il peut en favoriser l'expression ; il est en tout cas essentiel qu'il ne la "bloque" pas.

On pourrait dire que tout "blocage" des étudiants devant les mathématiques est d'abord un blocage de leur expression à propos des mathématiques (ou, plus précisément, *en* mathématiques).

Justes ou faux, intuitifs ou argumentés, leurs opinions et jugements sont le signe de leur réflexion propre. Ils expriment la forme spécifique de leur raisonnement. Si illogiques qu'elles puissent paraître parfois, leurs raisons sont la manifestation de *leur* logique, et c'est pourquoi il est si important de leur faire expliciter celles-ci le plus complètement possible.

La nécessité d'expliciter, de communiquer avec autrui, peut d'ailleurs faire comprendre aux étudiants la nécessité de mettre en forme leurs raisons et raisonnements, de les codifier. De plus, ces derniers, une fois exprimés et au besoin écrits, deviennent extérieurs à eux, donc susceptibles d'être étudiés, évalués, vérifiés par eux-mêmes ; leur attention devient disponible pour un raisonnement *sur* la logique de leurs raisonnements (pour une logique au deuxième degré en quelque sorte).

Si cette logique (au premier degré) est incorrecte, elle peut bloquer la suite de l'apprentissage. Il faut prendre le temps de la faire mettre en défaut par l'étudiant lui-même. C'est nécessaire pour qu'il soit convaincu de son erreur. C'est aussi une condition essentielle pour ne pas le dévaloriser à ses propres yeux : s'il arrive lui-même à la conclusion qu'il se trompait, il prouve sa capacité à raisonner juste, au deuxième degré. C'est enfin indispensable pour qu'il cherche à comprendre où, comment, pourquoi, il faisait erreur ; ce qui d'une part mobilise et exerce sa capacité à raisonner correctement, et d'autre part diminue notablement le risque d'un renouvellement systématique de la même erreur.

Par contre, si cette logique est correcte, elle peut favoriser la suite de l'apprentissage. La faire préciser et vérifier, par l'étudiant lui-même, exerce dans ce cas-là aussi sa capacité de raisonnement. Mais surtout, le formateur peut saisir l'occasion pour présenter le problème en cours sous l'angle ainsi proposé. Et cela, même s'il s'agit d'un angle inattendu, ou si cela anticipe sur la suite de la progression (ou même conduit à faire un "petit tour" aux marges du programme).

Dans les deux cas, cela peut signifier un détour, mais cela peut aussi accélérer ensuite la progression des étudiants. Et, de toutes manières, si le formateur ne prend pas au sérieux la façon dont les étudiants expriment leurs réactions en mathématiques, comment ceux-ci pourraient-ils conserver ou reprendre confiance dans leur capacité à faire des mathématiques ? Comment pourraient-ils appliquer cette capacité à résoudre les problèmes proposés par le formateur ?

Il est très important que ce dernier, tout en ne perdant pas de vue l'objectif qu'il s'est fixé, se montre très libre par rapport à tout cadre pré-élaboré. Et notamment qu'il ne se sente pas tenu par un modèle fixant une voie pour atteindre cet objectif. Il vaut mieux, pour l'efficacité de l'apprentissage, qu'il suive un moment une approche suggérée par les remarques d'un étudiant, plutôt que de s'en tenir "mordicus" à une progression balisée d'avance. Et cela, même si l'expérience a montré l'efficacité de cette progression dans d'autres circonstances.

Ainsi, notre première hypothèse fondamentale vis-à-vis de toute méthode (y compris les propositions pédagogiques qui font l'objet de cet article) est paradoxalement qu'il faut aussi savoir s'en distancier, pour que les étudiants occupent pleinement la place centrale qui est la leur dans l'acte d'apprentissage.

2°) ***Sur l'attitude vis-à-vis des mathématiques***

Afin que les difficultés particulières de chaque étudiant puissent être traitées, un travail très individualisé est nécessaire, même si le formateur favorise l'étude par petits groupes. Surtout à propos des exercices, l'enseignant doit prendre le temps de s'occuper de chacun, de décortiquer chaque difficulté, avant de reprendre l'ensemble sous forme de corrigé-synthèse.

Dans cette optique, il apparaît essentiel de favoriser au maximum l'expression en mathématiques des auditeurs, même quand ils sont peu sûrs de la justesse de leurs raisonnements et de leurs calculs. Il s'agit de leur faire perdre l'habitude — scolaire — d'écrire seulement ce dont ils sont sûrs, pour leur enlever l'angoisse de l'erreur.

Toute écriture mathématique, juste ou non, est en effet un objet sur lequel il est non seulement *possible* de raisonner, mais même sur lequel il s'agit *précisément* de raisonner ; car c'est précisément la spécificité des mathématiques d'être un travail sur des objets symboliques (et non sur du concret), travail lui-même commandé par une certaine logique (et non pas des "lois" ou le seul bon sens). (1)

---

(1) *Concret* : situation considérée dans toute sa complexité (en tenant compte de tous les paramètres en jeu et de leurs variations réelles, y compris celles qui peuvent rendre la situation intraitable mathématiquement à un niveau donné de connaissances).
Si la réalité est simplifiée dans le but unique d'en faire un support à la pédagogie des mathématiques, il s'agit d'un *pseudo-concret*. L'exercice élimine les caractéristiques essentielles de toute étude mathématisée du réel : définition des grandeurs à mesurer, procédures de mesure, approximations, modélisation, vérification de la validité de la méthode par ses résultats.
Cf. M. BRUSTON : "L'articulation entre l'enseignement de la physique et l'enseignement des mathématiques" (diffusé par le Centre de Formation de Formateurs du C.N.A.M.)
Si les simplifications entrent en contradiction avec la connaissance concrète qu'ont les étudiants de cette réalité (ou s'ils n'en ont aucune connaissance), l'exercice est pour eux totalement abstrait, irréel, incompréhensible. Ces simplifications abusives peuvent conduire à une pédagogie absurde ou même désastreuse.
Cf. St. BARUK : "Echec et Maths" (Ed. Seuil)
J. ADDA : "A propos des évaluations en mathématiques : du questionnement à l'interprétation et au diagnostic" (UER de Didactique des Disciplines, Paris VII) et autres articles.
Objet symbolique : 1°) — Objet *concret* mais porteur d'une symbolique claire et *familière* aux étudiants, permettant de faire abstraction, "dans le jeu", de certains paramètres matériels (exemples : cartes, dés, pièces, etc.). La familiarité est indispensable avant toute tentative de résolution de problèmes utilisant de tels objets. Or, elle dépend étroitement de la culture des étudiants concernés. S'ils ne la possèdent pas au départ, il faut prendre le temps qu'elle se constitue, si l'on ne veut pas provoquer malentendus ou incompréhensions.

Notre deuxième hypothèse fondamentale est que la possibilité de susciter semblable attitude chez les étudiants est conditionnée par l'attitude du formateur lui-même par rapport aux mathématiques :

— attitude "dogmatique" et évaluative, ou attitude réflexive pouvant le conduire à un auto-questionnement sur ses propres connaissances ?

— attitude "capitalisante" sur un ensemble de savoirs et de méthodes, ou attitude de recherche sur un ensemble non clos de problèmes plus ou moins difficilement solubles (ou même non résolus à ce jour) ? (2)

3°) ***Sur le temps nécessaire***

La pratique systématique de l'attitude réflexive peut poser au départ un problème : cette forme de travail prend du temps, et ce temps ne semble profiter qu'aux étudiants qui ont des difficultés ; les autres semblent freinés dans leurs possibilités de progression.

Pour répondre à ce problème, le formateur peut parfois organiser, pour les étudiants qui ont le plus de difficultés, des séances de "soutien" pendant lesquelles l'attitude réflexive est profitable à tous les présents. Une solution plus facilement généralisable est de proposer aux étudiants des exercices à deux niveaux, les plus rapides pouvant travailler sur des exercices d'approfondissement pendant que les autres ont le temps nécessaire au traitement approfondi de leurs difficultés d'assimilation.

La deuxième solution, à défaut de la première, permettra au formateur d'expérimenter cette pédagogie centrée sur *la pratique* des étudiants en mathématiques, et d'en tirer le maximum de bénéfices avec ceux pour lesquels elle est indispensable. C'est ainsi que nous avons nous-mêmes procédé au début. Cela nous a permis de faire les constatations suivantes :

Cf. WHEELER : "Mathématiques pour l'enseignement élémentaire" (Ed. OCDL)
B. DUMONT : "L'influence du langage et du contexte dans les épreuves de type logique" (thèse à l'Université Paris VII, diffusée par l'IREM de Paris-Sud)

2°) — Réalisation matérielle d'un symbole sous forme de *sons* (mots, phrases, ...) ou de *graphismes* (caractères, tableaux, schémas, graphiques, ...) construits et disposés d'une certaine manière. La matérialité de ces "objets symboliques" en fait le support de divers processus (associations d'idées, construction d'images mentales, maniement automatique...) qui font partie intégrante de la pratique mathématique, mais qui peuvent aussi empêcher l'apprentissage s'il n'en est pas tenu compte au niveau pédagogique.
Cf. St. BARUK : "Fabrice ou l'école des mathématiques" (Ed. Seuil)
M. BRUSTON : "Expressions mathématiques et expression en mathématiques" (Education Permanente - n° 47) et dans la brochure annoncée, paragraphes 10°, et 13° à 17°.

(2) L'attitude du formateur nous semble par ailleurs largement liée à la possibilité, qui lui est ou non offerte,
— d'élargir le champ de référence de sa réflexion pédagogique : à l'histoire des mathématiques, à celle de la logique, aux recherches en linguistique notamment, ainsi qu'aux recherches en didactique des mathématiques ;
— de travailler en équipe avec d'autres formateurs confrontés aux mêmes problèmes.

— les étudiants les plus faibles, après une période de perplexité, entrent tout à fait dans l'esprit de cette forme de travail, commencent à s'exprimer plus facilement, même au tableau, manifestent peu à peu des capacités intellectuelles certaines et progressent alors beaucoup plus vite ;

— les étudiants plus à l'aise au départ peuvent également tirer profit de cette forme de travail, pour passer de l'application "automatique" de règles et de modèles de raisonnements à la compréhension de ce qui fonde ces règles et ces modèles ;

— le travail au tableau, même avec un seul étudiant "bloqué", est suivi attentivement par l'ensemble du groupe, qui s'aperçoit qu'il peut en tirer profit d'une manière ou d'une autre, les difficultés des uns ayant, semble-t-il, toujours quelque rapport avec celles des autres ;

— lorsqu'un certain nombre de difficultés ont été résolues, la progression du groupe cesse d'être ralentie par les fréquents retours en arrière qu'elles occasionnaient. L'assimilation de modes de raisonnement abstraits crée une ouverture d'esprit et suscite un auto-contrôle permanent chez les étudiants. Le temps apparemment perdu au départ se trouve largement rattrapé par la suite.

Nous avons pu faire des constatations du même ordre par rapport à chacune des hypothèses pédagogiques que nous formulons dans la suite de ce chapitre : leur prise en compte nécessite du temps, mais ce temps est rentabilisé par les effets obtenus. Au total, les acquis des étudiants se trouvent renforcés, et la quantité de programme traitée sur une longue période (plusieurs mois) n'est pas diminuée, par un mode de travail qui ne vise pas la rentabilité à très court terme.

Nous affirmons donc, et ce sera notre troisième hypothèse fondamentale, que le formateur ne doit pas hésiter à investir du temps de formation en tenant compte des propositions pédagogiques qui sont faites ici, car au bout du compte, l'efficacité de son enseignement en sera augmentée en qualité, sans être diminuée en quantité.

Hypothèses sur l'organisation de la formation

4°) *Sur le programme, la démarche, le niveau visé*

Même s'il est connu des étudiants, le programme de mathématiques prévu dans une formation est le plus souvent incompréhensible pour eux. Il est rédigé dans des termes mathématiques dont les étudiants ne connaissent pas le sens au départ : ils le découvrent au fur et à mesure de l'avancement de la formation. Ils peuvent donc savoir ce qu'ils ont fait, non ce qu'ils vont faire.

De plus, dans un programme, les titres de chapitres ne précisent ni le point jusqu'auquel l'étude théorique sera poussée, ni le genre de problèmes que les étudiants sont censés savoir résoudre à partir de cette théorie, ni le niveau de complexité qu'ils pourront rencontrer dans les calculs nécessaires à ces problèmes.

Enfin, la démarche qui sera suivie pour traiter le programme ne leur est en général pas communiquée. Quand il leur est proposé un exercice, ils ne connaissent pas l'objectif poursuivi par le formateur.

Programme, démarche, niveau visé ne sont donc connus que du seul formateur, surtout s'il n'y a pas de livre de référence (ou bien si le formateur ne suit pas la progression du livre).

L'ignorance dans laquelle sont les étudiants ne leur permet pas de situer leurs efforts et leurs résultats par rapport à l'ensemble de la formation. Nous faisons l'hypothèse que, si cela leur était permis, l'effort soutenu qui leur est demandé dans une formation de longue durée en mathématique en serait facilité.

Nous proposons pour cela de leur fournir, en sus du programme, un document comprenant :

— la liste des "capacités terminales" visées : ce qu'ils doivent être capables de faire à la fin de chaque grande étape de la formation ou de sa totalité ; c'est-à-dire les objectifs de la formation ;

— la liste des "capacités intermédiaires" nécessaires : ce dont les étudiants doivent devenir capables, au fur et à mesure de l'avancement de la formation, et qui leur sera nécessaire pour atteindre les "capacités terminales".

A l'inverse du caractère elliptique des programmes, ces listes doivent être rédigées de manière très détaillée, et préciser à la fois les types de problèmes qui seront posés aux évaluations et le niveau maximal des difficultés dans les calculs correspondants.

Toutefois, ceci ne sera vraiment utile aux étudiants que si ces capacités leur sont directement compréhensibles. Par exemple : "résoudre une équation du premier degré à coefficients entiers donnés" (ou rationnels donnés, ou etc.), n'est pas forcément explicite et compréhensible au départ pour eux, même si c'est plus précis que "équation du premier degré" (avec quel type de coefficients ? avec ou sans paramètre ? résoudre ou discuter ?). La compréhension des objectifs globaux d'une formation n'est pas toujours possible à l'avance.

C'est pourquoi nous proposons au moins, avec chaque problème ou groupe d'exercices posé au cours de la formation, de fournir des explications sur l'objectif poursuivi. Celui-ci peut être un entraînement à une technique, ou l'approfondissement d'un point déjà traité, ou encore l'exploration d'un problème général nouveau dans un cas particulier. Les termes utilisés pour formuler cet objectif peuvent et doivent être assez familiers aux étudiants pour leur permettre de se rendre compte de ce dont il s'agit.

Tout ceci nécessite bien sûr que tous ces objectifs soient clairs ou qu'ils soient préalablement clarifiés, ce qui n'est pas forcément un travail bref ni facile. Il faut noter cependant que c'est aussi une condition pour la cohérence de la formation, du point de vue du formateur (qui pourra éliminer l'inutile) autant que du point de vue du formé, qui saisira mieux les liens entre les différents moments de sa formation.

5°) *Sur l'ordre de traitement des problèmes*

Il arrive très souvent qu'à un problème relativement simple, corresponde un problème "réciproque" plus complexe.

Ainsi, il est assez simple de remplacer "a" par "$\sqrt{2}x$", et "b" par "1", dans les expressions suivantes :

$$(a^2 - b^2) \quad , \quad (a + b)(a - b)$$

et d'obtenir :

$$(2x^2 - 1) \quad , \quad (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)$$

C'est en tout cas plus simple que de reconnaître dans $(2x^2 - 1)$ une différence de deux carrés, permettant de factoriser.

L'identification d'un cas "particulier" à une forme générale (ici : $a^2 - b^2$) est donc le problème réciproque, correspondant au remplacement des lettres par des expressions particulières dans une forme générale.

De même, calculer la valeur de l'expression $(x^3 + x^2 + 1)$ pour $x = -3$ et obtenir -17, est plus simple que trouver s'il existe des valeurs de x pour lesquelles cette expression vaut -17, et si oui, les calculer.

La résolution des équations est donc le problème réciproque, correspondant à l'utilisation fonctionnelle des expressions.

a) *Les cas simples*

Dans bien des cas (les plus simples en tout cas), le problème "direct" est celui où il suffit de mettre en œuvre une *technique* de calcul. Il a forcément une solution, unique. Le problème réciproque est moins automatique. Il n'a pas a priori une solution, et fait appel à une ou des *méthodes* plus complexes (3).

Ainsi, développer un produit de plusieurs polynomes (du premier ou du deuxième degré) est toujours réalisable effectivement ; tandis que mettre en produit de facteurs (du premier ou du deuxième degré) un polynome donné ne l'est pas toujours, du moins en pratique.

Du point de vue du mathématicien, c'est le problème réciproque qui est le plus intéressant, justement parce qu'il ne se résout pas à tout coup par l'application d'une technique immuable, parce qu'il peut être le sujet d'une recherche, d'un problème.

---

(3) *Méthode* : ensemble complexe d'opérations, supposant la mise en œuvre d'outils pour réaliser une production.
Outil, technique : ensemble précis d'opérations pour traiter un objet.

Du point de vue pédagogique, il devrait pourtant être évident que l'on ne peut apprendre à résoudre le problème réciproque tant qu'on ne maîtrise pas le problème direct.

De plus, nous faisons l'hypothèse que :

— l'étude du problème direct permet d'analyser avec les étudiants les difficultés du problème réciproque ;

— la présentation du problème réciproque dans sa généralité permet de leur faire comprendre la distinction entre :

• *d'une part, les objectifs.* [Parmi les objectifs possibles, on peut en distinguer de plus ou moins importants :

- **trouver s'il y a ou non des solutions (ou dans quels cas il y en a)**
- **trouver le nombre de solutions (quand il y en a)**
- **trouver une de ces (ou toutes ces) solutions de manière approchée**
- **trouver une de ces (ou toutes ces) solutions de manière exacte.]**

• *d'autre part,* les moyens d'atteindre chacun de ces objectifs : *les méthodes.* [Il peut y en avoir plusieurs ou ne pas y en avoir ; on peut les distinguer suivant les cas, et suivant celui des objectifs que l'on veut atteindre.] (4)

6°) *Sur la rigueur dans le cours*

En mathématiques, la notion de "démonstration" occupe une place centrale. Cela ne signifie pas pour autant que cette notion soit claire, d'emblée, aux yeux des étudiants. Une démonstration peut être probante pour le formateur ; elle n'est souvent, pour les étudiants, guère plus convaincante que le résultat lui-même.

Il faut noter, d'ailleurs, qu'une rigueur totale serait impossible dans les enseignements dont il est ici question. La mise au point d'un corpus entièrement déductif des mathématiques a été réalisée par des mathématiciens du plus haut niveau, et il serait ridicule de tenter de les enseigner ainsi. (5)

---

(4) Il est par exemple utile d'expliquer que (contrairement aux craintes des étudiants) il n'y a pas une hiérarchie infiniment croissante de difficultés dans les méthodes de résolution, au fur et à mesure que croît le degré d'une équation. Cela peut les "rassurer" d'apprendre qu'il y a en réalité une rupture qualitative entre les degrés 1 et 2 d'une part (pour *chacun* desquels existe une méthode générale *exacte*), et les degrés 3,4,5,6, etc. d'autre part, pour lesquels n'existe qu'une méthode générale *approchée*, bien que certains cas particuliers puissent être résolus exactement (avec le cas spécial des degrés 3 et 4 pour lesquels des méthodes exactes existent mais sont trop complexes pour être utilisables). Cela situe leurs acquisitions dans un cadre limité et maîtrisable.

(5) Quiconque en doute, est convié :
— à s'excuser (comme le fait Bourbaki) d'utiliser des documents aux pages numérotées, avant d'avoir défini les entiers ;
— à s'excuser (ce que ne fait même pas Bourbaki) de tenir des raisonnements avant d'avoir présenté les "axiomes logiques" sur lesquels il s'appuie, et déduit de ces axiomes chacun des "théorèmes logiques" qu'il compte utiliser.

Certains concepts sont donc introduits de façon plus ou moins intuitive; or leur caractère "intuitif" n'a, en général, rien d'évident. Le concept de "nombre réel" et celui de "limite", notamment, sont particulièrement complexes. (La preuve est historique: les mathématiciens ont éprouvé les plus grandes difficultés à leur donner un statut rigoureux)

Pour que se constitue chez les étudiants une certaine "compréhension intuitive" de ces concepts, pour que ce soient au moins pour eux des "notions" claires, il est nécessaire de les aborder par des exercices spécifiques. A partir de là, il est possible de passer un certain temps à leur fournir des explications complémentaires, de type qualitatif. **Nous faisons l'hypothèse qu'il est plus facile pour les étudiants d'accepter ce qui s'annonce explicitement comme une information non démontrée en cours, que ce qui est accompagné d'une démonstration non convaincante — à condition que ce qui est admis soit expliqué (et discuté au besoin) de façon que la signification en devienne claire pour eux.** (6)

(6) Ceci ne veut pas dire qu'il faut admettre tous les théorèmes importants et n'en démontrer que des conséquences immédiates ou triviales (idem si l'on part d'axiomes). Notamment, il *est inutile de "démontrer"* un théorème s'il a été admis précédemment sous une forme différente, comme axiome ou théorème (faire passer cela pour une démonstration peut même relever de la mystification) ; il vaut mieux montrer que : l'admettre sous une forme revient à l'admettre sous une autre; c'est tout aussi rigoureux, et plus conforme à l'esprit de l'axiomatique.