

2

ÉCHANGES

Définition et étude directe de la fonction logarithme népérien sans recours à la théorie de l'intégration

par Ibrahim RIHAOUI, Université Lyon I

On se propose ici de définir et d'étudier la fonction logarithme népérien en se servant du minimum d'outils mathématiques possible et, bien entendu, sans recourir à l'intégration ; mais l'on ne s'interdira pas de parler de dérivée. La définition envisagée repose sur la convergence d'une suite numérique dont le choix est suggéré par l'étude de la propriété fondamentale de cette fonction.

En effet, la notion de fonction logarithme est née de la recherche d'une correspondance ou d'une règle permettant de remplacer une multiplication par une addition et une élévation à une puissance par une multiplication, facilitant par là certains calculs numériques.

Mathématiquement, le problème peut être posé de la façon suivante : D étant une partie de \mathbb{R} à préciser, trouver les fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in D \times D \quad f(xy) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

Dans le cas $D = \mathbb{R}$, le problème n'admet pas de solution en dehors de la fonction nulle puisque, pour un réel quelconque x et pour $y=0$, (1) donne $f(0) = f(x) + f(0)$ et, par conséquent, $f(x) = 0$.

On est donc amené à exclure 0 et à prendre $D = \mathbb{R}^*$. On s'aperçoit alors que toute solution est nécessairement paire. En effet, avec $x=y=1$ puis $x=y=-1$, on obtient successivement $f(1) = 2f(1)$ et $f(1) = 2f(-1)$, d'où $f(1) = f(-1) = 0$. Il suffit maintenant d'écrire (1) lorsque $y = -1$ pour voir que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = f(x)$. On peut donc se limiter à $D = \mathbb{R}^*$, c'est ce que l'on fera dans tout ce qui suit. Par ailleurs, la recherche de solutions intéressantes (pour nous) conduit à considérer unique-

ment les fonctions qui vérifient (1) et qui sont en outre dérivables* et non nulles, donc non constantes (à cause de (1)). Nous notons E l'ensemble de ces fonctions.

Quelques conditions nécessaires vont maintenant nous orienter vers une solution satisfaisante. On voit ainsi que toute fonction f de E vérifie

$$f(1) = 0 \quad (2)$$

et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(x^n) = nf(x) \quad (3) \quad \text{ou encore } f(x) = nf(\sqrt[n]{x}) \quad (4)$$

Si l'on dérive par rapport à y dans la relation (1), on obtient, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $xf'(xy) = f'(y)$. On a en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$xf'(x) = f'(1) \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{f'(1)}{x} \quad (5)$$

On ne peut avoir $f'(1) = 0$, puisque f est non constante. Comme E est stable pour la multiplication par un réel non nul, il suffit de s'intéresser à la fonction f telle que $f'(1) = 1$, les autres en seront les multiples. Mais alors, la définition de la dérivée en 1 donne, compte tenu de (2),

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = 1 \quad (6)$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}^*$ fixé, la suite $(\sqrt[n]{x})_n$ tend vers 1 (voir lemme 2 (i)) et la comparaison de (4) et (6) conduit nécessairement à la relation

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (7)$$

On va donc montrer que le second membre de (7) a un sens et que la définition de $f(x)$ comme limite de cette suite fournit effectivement une solution possédant les propriétés souhaitées.

Pour commencer, deux lemmes sont utiles :

Lemme 1

(i) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $b \geq -1$, on a

$$(1 + b)^n \geq 1 + nb \quad (\text{Inégalité de Bernoulli}) \quad (8)$$

(ii) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $a \geq 1$, on a

$$na^{n+1} + 1 \geq (n+1)a^n \quad (9)$$

Preuve :

(i) L'inégalité (8) est évidente si $n=1$. En supposant qu'elle est vraie pour l'entier n , il vient, après multiplication des deux membres par $1+b \geq 0$: $(1+b)^{n+1} \geq (1+nb)(1+b) = 1 + (n+1)b + nb^2 \geq 1 + (n+1)b$.

(*) On peut montrer que la mesurabilité ou la continuité en un point d'une fonction vérifiant (1) suffit à assurer sa dérivabilité. Les fonctions non dérivables sont donc vraiment "pathologiques" (Voir [2]).

(ii) Soit $b = a^{-1} - 1$, donc $b \geq -1$. En appliquant (8) et en constatant que $\frac{1-a}{a} \geq 1-a$, on obtient

$$a^{-n} = (a^{-1})^n \geq 1 + n(a^{-1} - 1) = 1 + n \frac{1-a}{a} \geq 1 + n(1-a).$$

La multiplication des deux membres extrêmes par $a^n \geq 0$ donne $1 \geq a^n + n(a^n - a^{n+1})$, ce qui n'est autre que (9).

Lemme 2

(i) Pour tout $x \geq 0$, la suite $u_n(x) = \sqrt[n]{x}$ est convergente. De façon précise $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ si $x > 0$.

(ii) Pour tout $x \geq 1$, la suite $v_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{x-1}{x} \leq v_{n+1}(x) \leq v_n(x) \leq x-1 \quad (10)$$

Preuve :

(i) Le résultat est évident si $x = 0$.

Considérons d'abord le cas $x \geq 1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \sqrt[n]{x}$. D'autre part, pour $\varepsilon > 0$ donné, posons $p = \mathbb{E}\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) + 1$. Alors $n \geq p$ implique $n \geq \frac{1-x}{\varepsilon}$, c'est-à-dire $x \leq 1 + n\varepsilon$. Compte tenu de l'inégalité (8), on a donc, pour tout $n \geq p$, $x \leq (1 + \varepsilon)^n$. Finalement, $n \geq p$ implique $1 \leq \sqrt[n]{x} \leq 1 + \varepsilon$ et par conséquent $|\sqrt[n]{x} - 1| \leq \varepsilon$.

Lorsque $0 < x \leq 1$, on pose $y = \frac{1}{x} \geq 1$, si bien que l'on a $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$. Le

résultat de la première partie appliqué à la suite $(\sqrt[n]{y})$ montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

(ii)

A) $v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$

Avec $a = \sqrt[n+1]{x}$, on obtient $a \geq 1$, $a^n = \sqrt[n]{x}$ et $a^{n+1} = \sqrt[n+1]{x}$.

En appliquant (9), on trouve $n\sqrt[n]{x} + 1 \geq (n+1)\sqrt[n+1]{x}$, d'où $n(\sqrt[n]{x} - 1) \geq (n+1)(\sqrt[n+1]{x} - 1)$, c'est-à-dire $v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$.

B) $v_n(x) \leq x - 1$.

En effet $v_n(x) \leq v_1(x) = x - 1$.

$$C) \frac{x-1}{x} \leq v_n(x).$$

Avec $a = \sqrt[n]{x}$, on obtient $a \geq 1$, $a^n = x$ et $a^{n+1} = x \sqrt[n]{x}$.

En appliquant (9), on trouve $n x \sqrt[n]{x} + 1 \geq (n+1)x$, d'où $x(n \sqrt[n]{x} - n) \geq x - 1$ et par suite $n(\sqrt[n]{x} - 1) \geq \frac{x-1}{x}$.

On est maintenant en mesure d'établir la convergence de la suite $(v_n(x))$ et de donner quelques précisions sur sa limite :

Proposition 1 :

Pour tout $x > 0$, la suite $v_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$ est convergente.
De plus :

$$(i) \quad \frac{x-1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) \leq x-1 \quad (11)$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n\left(\frac{1}{x}\right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) \quad (12)$$

Preuve : supposons d'abord $x \geq 1$.

La relation (10) montre à la fois que la suite $(v_n(x))$ est convergente, car décroissante minorée, et que sa limite vérifie l'encadrement exprimé par la relation (11).

Considérons maintenant $0 < x \leq 1$.

Si l'on pose $y = \frac{1}{x}$, on obtient $y \geq 1$ et

$v_n(x) = n \left(\frac{1}{\sqrt[n]{y}} - 1 \right) = n \frac{1 - \sqrt[n]{y}}{\sqrt[n]{y}} = - \frac{v_n(y)}{\sqrt[n]{y}}$. La première partie de cette preuve et le lemme 2(i) montrent que $(v_n(x))$ est convergente et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(y) = - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ceci prouve que $(v_n(x))$ est convergente pour tout $x > 0$ et établit la relation (12).

Pour voir que (11) reste vraie dans le cas $x \leq 1$, on l'applique à $\frac{1}{x} \geq 1$

$$\text{et on trouve } \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1, \text{ c'est-à-dire}$$

$$1 - x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1-x}{x}.$$

Il suffit alors d'utiliser la relation (12) pour conclure.

Remarque : On a, de manière évidente, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(0) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(1) = 0$

La convergence de $(v_n(x))$ nous permet de poser la

Définition : On appelle fonction logarithme népérien et note Log la fonction définie sur \mathbb{R}^* , et associant à tout $x > 0$ la limite de la suite convergente $(v_n(x))$ de la proposition 1.

$$\text{On a donc par définition } \text{Log } x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (13)$$

Ainsi définie, la fonction Log possède bien, entre autres, la propriété fondamentale de l'introduction. En effet :

Proposition 2 :

Pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(i) \quad \frac{x-1}{x} \leq \text{Log } x \leq x-1 \quad (14)$$

$$(ii) \quad \text{Log } \frac{1}{x} = -\text{Log } x \quad (15)$$

$$(iii) \quad \text{Log } (xy) = \text{Log } x + \text{Log } y \quad (16)$$

$$(iv) \quad \text{Log } (x^n) = n \text{Log } x \quad (17)$$

Preuve : (i) et (ii)

Compte tenu de (13), les relations (14) et (15) sont respectivement identiques à (11) et (12).

(iii)

On a

$$\begin{aligned} v_n(xy) &= n(\sqrt[n]{xy} - 1) = n(\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} - 1) = n[(\sqrt[n]{x} - 1)\sqrt[n]{y} + (\sqrt[n]{y} - 1)] \\ &= \sqrt[n]{y} \cdot v_n(x) + v_n(y). \end{aligned}$$

On obtient alors, grâce au lemme 2(i),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(xy) = 1 \times \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(y), \text{ d'où (16).}$$

(iv)

(17) est évidente pour $n=0$ puisque $\text{Log } 1 = 0$. Si elle est vraie pour l'entier $n \in \mathbb{N}$, la relation (16) permet alors d'écrire

$$\text{Log}(x^{n+1}) = \text{Log}(x^n \cdot x) = \text{Log}(x^n) + \text{Log } x = n \text{Log } x + \text{Log } x = (n+1) \text{Log } x. \text{ Ceci établit (17) pour } n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque $n \in \mathbb{Z}^*$, $-n \in \mathbb{N}$ et l'on peut écrire $\text{Log}(x^{-n}) = -n \text{Log } x$.

$$\text{Or, d'après (15), } -\text{Log}(x^n) = \text{Log}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \text{Log}(x^{-n}).$$

$$\text{D'où } -\text{Log}(x^n) = -n \text{Log } x \text{ et finalement } \text{Log}(x^n) = n \text{Log } x.$$

La proposition suivante montre en particulier que Log est une fonction de E.

Proposition 3 :

- (i) La fonction Log est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .
- (ii) La fonction Log est dérivable, donc continue, et l'on a, pour tout $x > 0$, $\text{Log}'x = \frac{1}{x}$.
- (iii) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \text{Log } x = -\infty$.
- (iv) La fonction Log est un isomorphisme strictement croissant de (\mathbb{R}_+^*, \times) sur $(\mathbb{R}, +)$.

Preuve (i)

Lorsque $a > 1$, la relation $\text{Log } a \geq \frac{a-1}{a}$, tirée de (14), montre que $\text{Log } a > 0 = \text{Log } 1$. Si $y > x$, alors $a = \frac{y}{x} > 1$ et par conséquent, compte tenu de (16), $\text{Log } y = \text{Log}(ax) = \text{Log } a + \text{Log } x > 0 + \text{Log } x$.

(ii)

En utilisant la relation (14) on voit que

$$x > 1 \text{ implique } \frac{1}{x} \leq \frac{\text{Log } x}{x-1} \leq 1, \text{ d'où } \frac{1}{x} - 1 \leq \frac{\text{Log } x}{x-1} - 1 \leq 0$$

$$x < 1 \text{ implique } 1 \leq \frac{\text{Log } x}{x-1} \leq \frac{1}{x}, \text{ d'où } 0 \leq \frac{\text{Log } x}{x-1} - 1 \leq \frac{1}{x} - 1$$

Comme $\text{Log } 1 = 0$, les deux relations précédentes montrent que

$$x \neq 1 \text{ implique } \left| \frac{\text{Log } x - \text{Log } 1}{x-1} - 1 \right| \leq \left| \frac{1}{x} - 1 \right|.$$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{Log } x - \text{Log } 1}{x-1} = 1$, ce qui prouve que Log est dérivable au point 1 et que $\text{Log}'1 = 1$.

Considérons maintenant un élément quelconque $a \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant (15) et (16), on trouve, pour tout $x \neq a$,

$$\frac{\text{Log } x - \text{Log } a}{x-a} = \frac{\text{Log } \frac{x}{a}}{x-a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\text{Log } \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1}$$

Le résultat que l'on vient d'établir donne alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{Log } x - \text{Log } a}{x-a} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{Log } \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} = \frac{1}{a} \times 1 = \frac{1}{a}.$$

(iii)

Remarquons d'abord que la relation (14) donne $\text{Log} 2 \geq \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.

Soit $A > 0$. Il existe un entier m tel que $m \geq 2A$. La stricte croissance de Log et la relation (17) montrent alors que

$$x > 2^m \Rightarrow \text{Log} x > \text{Log} 2^m = m \text{Log} 2 \geq \frac{m}{2} \geq A. \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log} x = +\infty.$$

Considérons de nouveau un réel $A > 0$ et un entier m tel que $m \geq 2A$. Alors

$$0 < x < \frac{1}{2^m} \Rightarrow \text{Log} x < \text{Log} \left(\frac{1}{2^m} \right) = -\text{Log} 2^m = -m \text{Log} 2 \leq -\frac{m}{2} \leq -A.$$

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} \text{Log} x = -\infty$.

(iv)

Avec (i) et la relation (16), on sait déjà que Log est un homomorphisme strictement croissant (donc injectif) de (\mathbb{R}_+^*, \times) dans $(\mathbb{R}, +)$.

Il reste à montrer que Log est une fonction surjective de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . Soit $y \in \mathbb{R}$. D'après (iii), il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $\text{Log} x_1 \leq y \leq \text{Log} x_2$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors qu'il existe un réel x tel que $\text{Log} x = y$.

Commentaires

1. Dans la proposition 3, la démonstration de (i) est faite indépendamment de (ii) pour éviter le recours au théorème des accroissements finis.

2. Les propriétés essentielles de la fonction Log étant maintenant établies, on peut bien sûr aller plus loin dans les développements de l'étude de cette fonction.

3. En revenant au problème de l'introduction et compte tenu des propriétés de Log , on voit que, pour tout réel $k \in \mathbb{R}^*$, la fonction f_k définie par $f_k(x) = k \text{Log} x$ est une fonction de E . Réciproquement, toute fonction de E est de cette forme, comme il résulte des relations (2), (5) et de la proposition 3 (ii). Les fonctions de E ainsi caractérisées sont appelées fonctions logarithmes; celle qui correspond à $k \in \mathbb{R}^*$ est uniquement déterminée par sa base $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ vérifiant $k = \frac{1}{\text{Log} a}$. Ainsi, la fonction logarithme de base a , notée \log_a , est l'unique isomorphisme dérivable de (\mathbb{R}_+^*, \times) sur $(\mathbb{R}, +)$ vérifiant $\log_a a = 1$. La fonction Log est en fait \log_e où e est un nombre irrationnel dont une valeur approchée est 2,71828.

4. La définition et l'étude qui la suit "ignorent" l'existence d'une fonction également notée Log et définie par $\text{Log} x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Il s'agit heureu-

sement de la même fonction, comme le montrent la proposition (3) (ii) et la remarque. On peut aussi définir Log comme la réciproque de la fonction exponentielle. L'étude directe et élémentaire faite ici permet d'aller dans l'autre sens et de prendre la réciproque de Log comme définition de la fonction exponentielle.

5. La croissance, la continuité et la dérivabilité sur \mathbb{R} de Log se déduisent de leur étude au point 1. C'est l'une des conséquences de l'équation fonctionnelle (1). Notons aussi, grâce à (4), qu'une fonction vérifiant (1) est complètement déterminée par ses valeurs au voisinage de 1. De plus, la relation (6) donne une première approximation de ces valeurs. C'est ainsi que Neper et Briggs, en s'inspirant de ces propriétés et en utilisant certaines astuces techniques, ont pu établir les premières tables de logarithmes. Pour un aperçu historique, on peut consulter [1].

RÉFÉRENCES

- [1] G. ARSAC. — Histoire de la découverte des logarithmes.
Bulletin de l'A.P.M.E.P. N° 299, Juin 1975, pp. 281-298.
- [2] J. LEGRAND. — Les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que, pour tout couple (x, y) de nombres réels, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Bulletin de l'A.P.M.E.P. N° 319, Juin 1979, pp. 367-375.