# 7

# JEUX ET MATHS

*Voici donc, comme promis, l'étude "à la main" du jeu "Les Tuiles voisines", envoyée par Françoise et Patrice Debart, de Caen (pour la présentation de ce jeu, se reporter au Bulletin n° 327 de février 81).*

*Vu la longueur de l'article, il nous a malheureusement été impossible d'en publier en même temps l'étude informatique. Nous la réservons donc pour le prochain Bulletin, et nous vous prions de bien vouloir nous en excuser.*

*Nous espérons que d'autres jeux présentés dans le Bulletin susciteront autant d'intérêt. Nous acceptons en tout cas toute suggestion sur la forme et sur le contenu de cette rubrique.*

*Envoyez vos propositions d'articles, de problèmes, vos solutions, vos suggestions à*

*Jean Fromentin, 17, rue de la Roussille - 79000 Niort*

## "Le Jeu des Tuiles Voisines"

*par Françoise et Patrice DEBART*

Essayer d'étudier le problème en jouant au coup par coup, suivant les règles, conduit vite à un arbre des possibilités énorme, même, comme on le verra plus tard, pour un ordinateur. De plus la disposition finale des tuiles peut être obtenue de bien des manières. Nous avons donc retenu la démarche suivante :

— Montrer que si l'état final du carré est connu, il est possible de retrouver le(s) "chemin(s)" qui y mène(nt).

— Chercher des critères permettant de proposer des états finaux possibles.

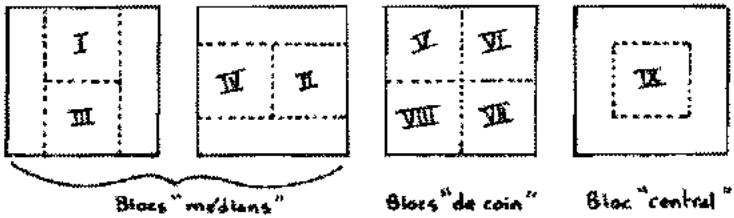
— Simplifier l'étude en basant l'essentiel des résultats sur l'analyse des blocs carrés de 4 cases inclus dans le carré de $4 \times 4$.

# I) Résultats et conditions préliminaires

1) *Notations :* *** les couleurs** seront repérées par : Bc ; V ; R ; Bu ; J ; en cas de généralisation par : A;B;C;D;E;

*** les blocs** : dans le carré 4×4, on peut repérer 9 blocs de 4 cases disposées en carré (fig. 1).

Fig. 1




Deux blocs ayant 2 cases communes (ex : I et V) seront dits *"mitoyens"*.

*** les cases** sont numérotées de 1 à 16, suivant le schéma de la figure 2. Bien que peu naturelle à première vue, cette numérotation a été retenue car elle facilite le traitement informatique :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 6 | 7 |
| 2 | 1 | 5 | 8 |
| 16 | 13 | 9 | 10 |
| 15 | 14 | 12 | 11 |

Fig. 2

— les cases du bloc IX sont du type $1+4k$, avec $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

— les cases des blocs médians sont du type $j$ ; $j+3$ ; $j+4$ ; $j+5$

— les cases des blocs de coin sont du type $j$ ; $j+1$ ; $j+2$ ; $j+3$ avec $j \in \{1 ; 5 ; 9 ; 13\}$, c'est-à-dire l'ensemble des numéros des cases centrales.

*** Carré** : ce terme sera toujours utilisé pour désigner l'ensemble des 16 cases.

Bloc I

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 6 | 7 |
| 2 | 1 | 5 | 8 |

Fig. 3

*** ordre des coups** : lorsque nous parlerons d'ordre des coups sur un bloc, il s'agira d'un ordre partiel par rapport à l'ensemble du jeu ; par exemple, si la solution est obtenue en jouant dans l'ordre les cases 1;8;4;3;6;2;5... (fig. 3), nous dirons que sur le bloc I nous avons l'ordre 1;4;6;5 noté : $1<4<6<5$.

2) *Résultats et conditions*

> $R_1$ α) A un bloc initial $\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}$ correspondent au plus 24 états finaux
>
> β) Si l'état initial et l'état final du bloc sont connus, on peut retrouver l'ordre dans lequel les coups ont été joués sur ce bloc.

α) La première tuile posée sur le bloc de la figure 4, même si ce n'est pas la première du jeu, sera nécessairement un E (couleur manquante au bloc) ; donc 4 places possibles pour E ; 3 places possibles pour la nouvelle cou-


Fig. 4

leur manquante ; 2 places possibles pour la troisième couleur ; et une seule possibilité pour la dernière couleur. Certaines de ces possibilités seront bien sûr à éliminer lorsque l'on tiendra compte, sur des critères établis plus loin, de l'ensemble du jeu.

$\beta$) Donnons simplement un exemple : supposons la situation de la fig. 5.

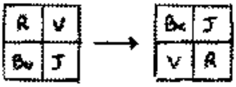



Fig. 5

Bc manque à l'état initial ; donc Bc est joué en 1° et cache R ; R est alors joué en 2° et cache J ; J est donc joué en 3° et cache V ; V est alors joué en 4°.

> $R_2$ Condition nécessaire : pour qu'un carré initial puisse être solution, il faut que, dans toute paire de blocs mitoyens, l'ordre partiel induit sur les cases communes par l'ordre sur chacun des blocs soit le même.

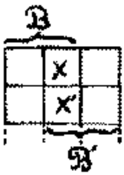



Fig. 6

Lorsque cette condition sera vérifiée, nous dirons que les ordres sur les blocs mitoyens sont "compatibles". L'ordre partiel dans $\mathcal{B}$ entre X et X' (fig. 6) doit être le même que dans $\mathcal{B}'$. En fait, cette condition est aussi une condition suffisante.

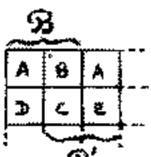



Fig. 7

Exemples d'utilisation de cette règle :

1) Supposons l'état initial de la figure 7.

D'après $R_1$, $\mathcal{B}$ peut être recouvert par $\begin{smallmatrix}B&E\\C&A\end{smallmatrix}$ avec l'ordre des coups des couleurs finales : E;B;A;C.

$\mathcal{B}'$ peut être recouvert par $\begin{smallmatrix}E&D\\A&C\end{smallmatrix}$ avec l'ordre : D;A;C;E.

On voit que pourtant $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ ne peut être recouvert par $\begin{smallmatrix}B&E&D\\C&A&C\end{smallmatrix}$ car il faut dans $\mathcal{B}$ jouer E avant A, et dans $\mathcal{B}'$ jouer A avant E.

2) Une application simple "à la main" est la suivante :

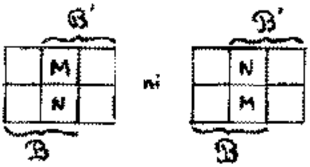



Fig. 8

Si la couleur manquante à l'état initial est M dans $\mathcal{B}$ et N dans $\mathcal{B}'$ (fig. 8), à l'état final, les deux cases communes ne pourront contenir la paire {M,N} : puisque M manque dans $\mathcal{B}$, elle est jouée en 1°, donc avant N dans $\mathcal{B}$ ; de même, puisque N manque dans $\mathcal{B}'$, elle est jouée en 1°, donc avant M dans $\mathcal{B}'$ ; ce qui est impossible.

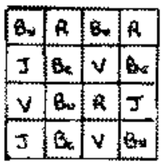
## II) Résolution du problème

Nous donnons un exemple de recherche "à la main" proche de la démarche informatique, pour essayer de mieux faire comprendre celle-ci au lecteur. Nous préciserons plus tard quelles seront les différences. Sans ordinateur, il est bon d'être quelque peu avare de son travail, et nous rajoutons donc un résultat complémentaire, permettant de tenir compte des répartitions des couleurs imposées à l'état final, ce dont on peut, pour généraliser, s'affranchir.

> $R_3$ Si une couleur doit figurer 4 fois à l'état final, elle doit figurer une fois et une seule dans chacun des blocs de coin.
> Si une couleur doit figurer 3 fois à l'état final, elle manque dans un bloc de coin et un seul.

Compte tenu des règles du jeu, une couleur ne peut figurer qu'une fois par bloc. Les blocs de coin formant une partition du carré, la conclusion est évidente.

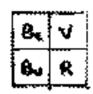
*Plan du travail :*

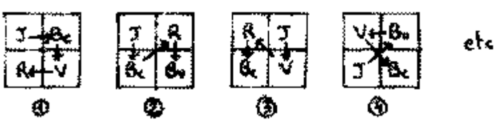


état initial

1°) Liste des blocs superposables au bloc central.
2°) En tenant compte de $R_2$, on élimine des blocs.
3°) On essaye de compléter le carré en tournant autour du bloc central en tenant compte au fur et à mesure des règles du jeu et de $R_1$ ; de $R_2$ ; de $R_3$.
4°) Quand un carré complet est obtenu, on essaye de trouver l'ordre des coups qui y mène.

*Etape n° 1* : Liste des blocs superposables au bloc central





Les flèches indiquent l'ordre des coups.

Tableau I

*Etape n° 2 : Première utilisation de $R_2$*

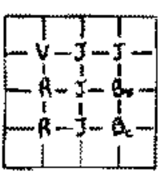


Fig. 9

Dressons le tableau des couleurs manquantes, à l'état initial, dans chacun des blocs. Chaque couleur est indiquée au centre du bloc dans lequel elle manque (fig. 9).
En utilisant le raisonnement expliqué dans le 2° exemple donné pour $R_2$, on établit des incompatibilités. (tableau II)

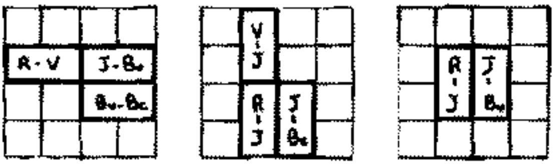
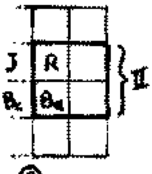


Tableau II

 signifie que dans les deux cases entourées, la paire [R,J] ne peut figurer (R et J étant les couleurs manquantes des 2 blocs contenant ces 2 cases).

Ce tableau permet d'éliminer 8 des 24 blocs du tableau I ; par exemple le bloc ① qui contient $\boxed{\begin{matrix} J \\ R \end{matrix}}$.



② Fig. 10

*Deuxième utilisation de $R_2$* (fig. 10)

*Exemple :* dans le bloc ② du tableau I, le Bu, qui est une couleur manquante de l'état initial du bloc II, devra être joué en 1°, donc avant R ; or, c'est contradictoire avec l'ordre indiqué sur le schéma. Donc ② ne convient pas.

Avec un raisonnement analogue, on élimine 3 blocs supplémentaires. Il en reste donc 13 à étudier ; il serait fastidieux de les citer tous. Nous donnerons donc seulement deux exemples : un bloc à éliminer, et celui qui mène à la solution.

***Etape n° 3 : Exemple 1.*** Le bloc ④ (fig. 11)

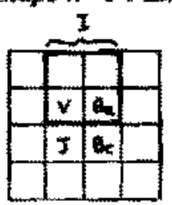
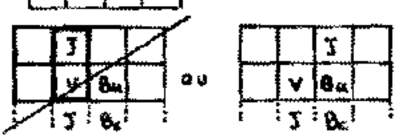
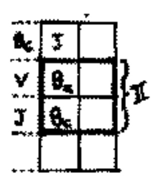


Fig. 11

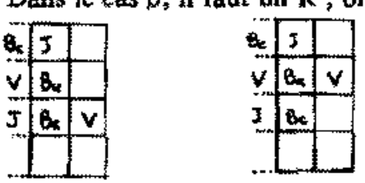
a) On complète I. Le bloc I doit contenir un J (voir fig. 9). Deux places sont possibles :



Le premier cas figure au tableau II ; il est donc impossible. Complétons le bloc I dans le second cas, en utilisant $R_1$ :

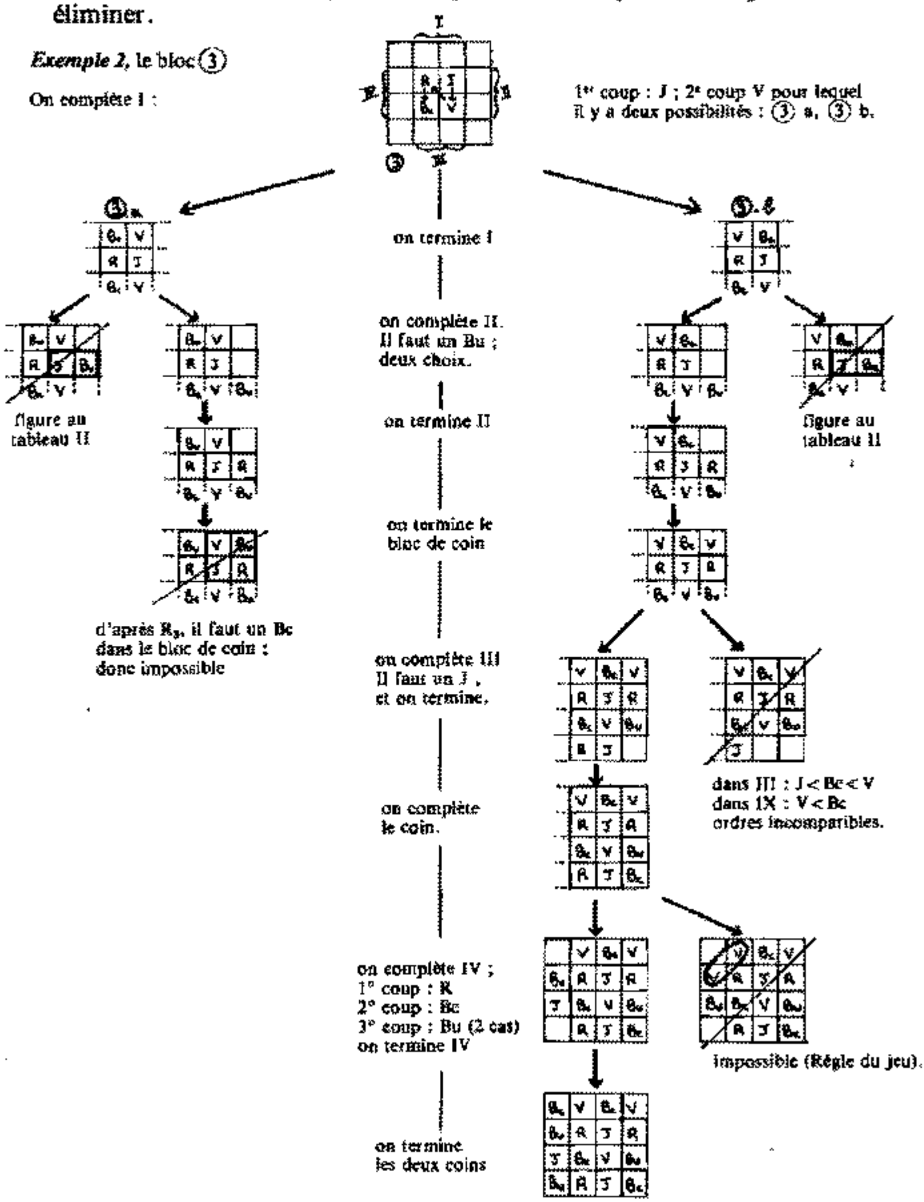


b) On complète II. Le premier coup est Bu ; le deuxième coup est donc V pour lequel il y a deux possibilités (fig. 12). Pour terminer II dans le cas $\alpha$, il faut un J, ce qui est impossible. ④ $\alpha$ est donc éliminé. Dans le cas $\beta$, il faut un R ; on obtient



④-$\alpha$ Fig. 12 ④-$\beta$

c) On complète le coin. D'après $R_1$, on doit mettre R ; mais alors le bloc de coin ne contient pas Bc, ce qui contredit $R_3$. Le bloc (4) est donc à éliminer.




Les 11 autres blocs centraux conduisent tous à des impossibilités (si on tient compte bien sûr de la répartition des couleurs sur les tuiles).

*Etape n° 4 :* Rappels :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bu | R | Bu | R |
| J | Bc | V | Bc |
| V | Bu | R | J |
| J | Bc | V | Bu |

état initial

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bc | V | Bc | V |
| Bu | R | J | R |
| J | Bc | V | Bu |
| Bu | R | J | Bc |

état final

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 6 | 7 |
| 2 | 1 | 5 | 8 |
| 16 | 13 | 9 | 10 |
| 15 | 14 | 12 | 11 |

n° des cases

Les ordres partiels sur les blocs sont les suivants :

Bloc I $5 < 4 < 1 < 6$
Bloc II $10 < 5 < 9 < 8$
Bloc III $12 < 9 < 14 < 13$
Bloc IV $1 < 13 < 2 < 15$
Bloc V $4 < 1 < 3 < 2$
Bloc VI $5 < 7 < 8 < 6$
Bloc VII $11 < 10 < 12 < 9$
Bloc VIII $14 < 13 < 15 < 16$
Bloc IX $5 < 9 < 1 < 13$

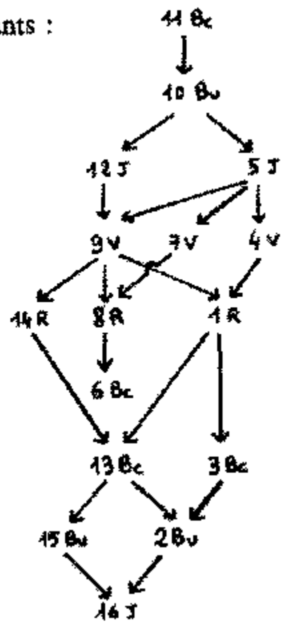



Fig. 13

On peut résumer ces 9 ordres par le schéma de la figure 13 : on doit mettre un Bc sur la case 11, puis mettre un Bu sur la case 10, puis... etc.

Pour certains cas, on ne possède aucun renseignement. Par exemple, 12 doit être joué avant 9 ; 5 aussi ; mais 12 peut indifféremment être joué avant ou après 5.

On peut vérifier que tout jeu respectant cet arbre convient.

Exemple : 11;10;12;5;9;7;4;14;8;1;6;13;3;15;2;16.

# III) Pour généraliser

On peut se demander si, avec d'autres répartitions des couleurs sur les tuiles, on peut trouver d'autres répartitions finales, et donc d'autres solutions ; si d'autres configurations initiales permettent de trouver 0, 1 ou plusieurs solutions. C'est là que l'informatique entre en jeu !...