8

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Pour répondre à la demande de nombreux lecteurs, cette rubrique comprend désormais deux parties.

La première ("PROBLEMES") poursuit la publication d'énoncés inédits avec leurs solutions.

La deuxième ("OLYMPIADES") est consacrée aux exercices déjà posés (en particulier aux diverses Olympiades) ou publiés qui, par leur caractère insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les énoncés et les solutions doivent être adressés dactylographiés à :

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45 — 63170 AUBIERE

Problèmes

ENONCES

Enoncé n° 82 (BELGY, Clermont-Ferrand)

Les chiffres de l'écriture, dans une base de numération b, d'un nombre premier p sont (en partant du chiffre des unités) : a_0, a_1, ...

Démontrer que le polynome $\Sigma a_n X^n$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Enoncé n° 83 (AUQUE, Clermont-Ferrand)

De combien de façons peut-on placer les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6, dans un carré 6×6, de sorte que chaque nombre apparaisse une fois dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales ?

SOLUTIONS

Enoncé n° 76 (CUCULIERE, Paris)

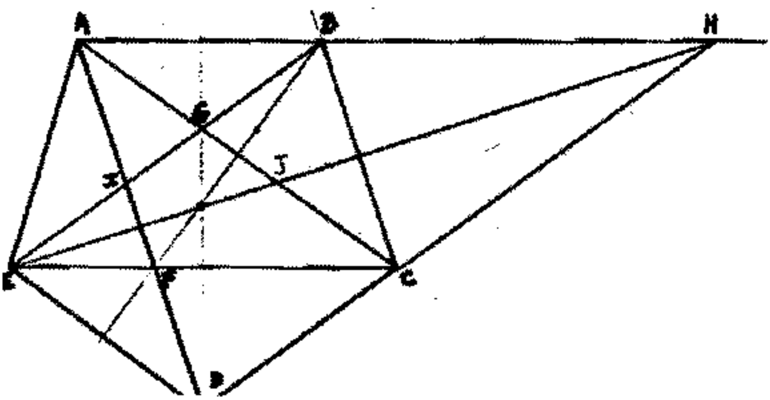
On considère un pentagone plan ABCDE tel que AB soit parallèle à CE, BC à AD, CD à BE et DE à AC.

Que peut-on dire du pentagone si les trois premières bandes ont même largeur ?

Que peut-on dire du pentagone si les deux premières bandes d'une part, et les deux dernières d'autre part, ont même largeur ?

Solution (CHRETIEN, Villemomble)

On désigne par F, G, H, I, J les intersections des droites AD et EC, AC et BE, AB et CD, AD et CE, HE et AC.



Dans la première hypothèse :

ABCF et BIDC sont des losanges. Donc $AB = BC = CD$.
BHCE est un losange, donc $HB = HC$, (EH) est médiatrice de [BC] et bissectrice de $\widehat{AHD}$. $HB = HC$ et $AB = CD$, donc $HA = HD$; la bissectrice de $\widehat{AHD}$ est médiatrice de [AD]. Donc $AE = ED$.

On peut en conclure que AEDJ est un losange ; la quatrième bande a la même largeur que les trois premières ; il s'agit d'un "nœud doré", donc le pentagone est régulier ; *ou* préférer une démonstration analogue à la précédente, (BF) est médiatrice de [AC] puisque ABCF est un losange, $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$, $\widehat{FED} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{FDE} = \widehat{BCA}$ (angles à côtés parallèles), donc $\widehat{FED} = \widehat{FDE}$; (BF), médiatrice de [AC], est perpendiculaire à (ED) ; le triangle EFD étant isocèle, (BF) est médiatrice de *[ED]. AE et CD* sont symétriques par rapport à (BF).

Dans la deuxième hypothèse :

GCDE est un losange, (GD) est médiatrice de [EC], $CD = DE$.
ABCF est un losange, (BF) est médiatrice de [AC], $AB = BC$.
$\widehat{GAB} = \widehat{GCE}$ (alternes-internes) ; $\widehat{ABG} = \widehat{ECD}$ (côtés parallèles). AGB est isocèle et (GD) est médiatrice de [AB]. Par symétrie par rapport à GD , $AE = BC$. De même, (BF), médiatrice de [AC], est aussi médiatrice de [DE] et par symétrie $AE = CD$. Le pentagone ABCDE est régulier.

Autres solutions : LEMAIRE (Douai), SAMBARD (Saint-Quentin) et l'auteur.