4

DANS NOS CLASSES

La grille multiplicative (suite)

par Jean DUFOUR, Collège de Scionzier (74)

Suite à l'article de Henri CAMOUS paru dans le Bulletin 325 de septembre 1980.

1. Rappel de l'activité proposée par H. CAMOUS.

			F
			E
			D
A	B	C	

Remplir les cases d'une grille 3×3 avec les naturels de 1 à 9 sans répétition, connaissant les 6 produits A,B,C,D,E,F des trois nombres de chaque ligne et chaque colonne.

2. J'ai proposé cette activité dans deux classes de 5[e] en décembre 1980, avec la progression suivante :

Etape 1

			270
			16
			84
336	27	40	

Recherche collective du problème donné en exemple par CAMOUS.
Les élèves doivent expliquer la stratégie qu'ils utilisent.

Etape 2

Chaque élève fabrique un problème qu'il donne à son voisin.

Etape 3

On peut toujours placer 5 et 7 à coup sûr. Il en est assez souvent de même pour 9, mais pas toujours.

Certains problèmes ont deux solutions, ceci à cause d'égalités telles que $3\times 4 = 2\times 6$, $3\times 8 = 4\times 6$, etc.

Etape 4

On peut se poser beaucoup de questions à propos de ces grilles.

Tous les élèves se sont intéressés à cette activité. Dans l'une des classes, de niveau très moyen, il n'a guère été possible de dépasser l'objectif de l'élaboration d'une bonne stratégie de résolution. Par contre dans l'autre, comportant une majorité d'élèves de bon niveau, l'étape 4 a pu être abordée. Le stock de grilles obtenu à l'étape 2 a servi à trouver des exemples, des contre-exemples, des inventaires.

3. Voici, en commençant par les questions posées par CAMOUS, quelques éléments de réponse, et de nouvelles questions.

Cinq égalités jouent un rôle important :

$$1\times 6 = 2\times 3 \qquad 1\times 8 = 2\times 4 \qquad 2\times 6 = 3\times 4$$
$$2\times 9 = 3\times 6 \qquad 3\times 8 = 4\times 6 \qquad (1)$$

a) Combien existe-t-il de produits différents possibles ?

Il y a $C_9^3 = 84$ calculs de produits. Les égalités (1) permettent d'écrire 23 égalités entre les produits, telles que $1.6.x = 2.3.x$. Il y a une 24ème égalité qui est $1\times 4\times 9 = 2\times 3\times 6$. Il reste 60 produits. Ces 60 produits ont d'ailleurs été tous obtenus dans les grilles composées par les élèves.

b) Peut-on avoir des produits identiques sur une même grille ?

La question est liée à la précédente. Les 24 égalités comportent 18 égalités simples et 3 égalités doubles :

$$1\times 3\times 8 = 1\times 4\times 6 = 2\times 3\times 4$$
$$1\times 6\times 8 = 2\times 3\times 8 = 2\times 4\times 6$$
$$1\times 8\times 9 = 2\times 4\times 9 = 3\times 4\times 6$$

Il apparaît impossible de composer une grille dans laquelle 24 (ou 48) figure 3 fois. C'est possible pour 72. Exemple :

1	8	9	72
3	6	4	72
5	7	2	70
15	336	72	

20 nombres peuvent apparaître 2 fois au plus sur une même grille : 12, 18, 24, 30, 36, 40, 42,48, 54, 56, 60, 84, 90, 96, 108, 120, 126, 144, 168, 216. Comme on pouvait s'y attendre, ce sont tous des nombres riches en diviseurs.

c) Existe-t-il des grilles à plusieurs solutions ?

Si

1	6	...
2	3	...
...	...	...

est une solution,

2	3	...
1	6	...
...	...	...

en est une autre.

Les égalités (I) fournissent ainsi une famille de grilles à deux solutions. On peut en combiner certaines pour former des grilles à trois solutions.

Exemple :

Si

...	3	6
1	2	9
8	4	...

est solution,

...	2	9
1	3	6
8	4	...

et

...	3	6
2	1	9
4	8	...

sont solutions.

Existe-t-il d'autres types de grilles à deux solutions ?

Existe-t-il des grilles ayant plus de trois solutions ?

d) Combien peut-on composer de grilles différentes ? La question est simple si on considère le remplissage de la grille 3×3. Plus complexe me paraît être la recherche du nombre de "problèmes" différents si on considère qu'un problème est défini par la donnée des produits A,B,C d'une part (sans ordre) et D,E,F d'autre part.

e) On calcule le produit des 3 nombres A,B,C (ou D,E,F). Le résultat est d'abord surprenant pour les élèves, mais ils trouvent facilement l'explication.

f) La somme des trois nombres A,B,C, par contre, est variable. Quelle est sa plus petite valeur possible ? Et sa plus grande ? Une recherche empirique avec les élèves a conduit à 214 et 630 avec les grilles suivantes :

1	2	3
8	7	4
9	5	6

$72 + 70 + 72 = 214$

1	4	7
2	5	8
3	6	9

$6 + 120 + 504 = 630$

Existe-t-il des outils mathématiques permettant de trouver le minimum et le maximum de $S = abc + def + ghi$ avec

$$\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} ?$$

g) On peut se poser les mêmes questions pour la somme

$$S = A + B + C + D + E + F$$

Voici nos records :

6	1	9	54
5	8	2	80
3	7	4	84
90	56	72	

S = 436

9	8	7	504
6	4	2	48
5	3	1	15
270	96	14	

S = 947

Peut-on faire mieux ?

h) Il n'est pas nécessaire de connaître les six produits pour résoudre le problème. Ainsi, avec A = 28, B = 80, E = 120, F = 6, il y a une solution unique.

Conjecture : si on "oublie" un produit-ligne et un produit-colonne, le problème admet la (les) même(s) solution(s).

Qu'en pensez-vous ?