6

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Pour répondre à la demande de nombreux lecteurs, cette rubrique comprend désormais deux parties.

La première ("PROBLEMES") poursuit la publication d'énoncés inédits avec leurs solutions.

La deuxième ("OLYMPIADES") est consacrée aux exercices déjà posés (en particulier aux diverses Olympiades), ou publiés qui, par leur caractère insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les énoncés et les solutions doivent être adressés à .

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45
63170 AUBIERE

I. Problèmes

ENONCES

Enoncé n° 80 (CABY, Paris)

Soient u_n une suite strictement positive, décroissante, de limite 0 et $U = \sum_1^{\infty} u_n$ ($U = +\infty$ si la série diverge). Existe-t-il pour tout a, $0 < a < U$, une partie A de N telle que $a = \sum_{n \in A} u_n$?

Enoncé n° 81 (HIRIART-URRUTY, Clermont-Ferrand)

Soit F un sous-ensemble dénombrable de $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. On note Fx l'ensemble des $f(x)$ pour $f \in F$.

$g(x) \in Fx$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ implique-t-il que $g \in F$ ($g \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$)?

SOLUTIONS

Des correspondants ont noté que deux erreurs se sont glissées dans la solution du n° 67 (Bulletin n° 325) : la fraction $\dfrac{2n^7+1}{3n^3+2}$ est simplifiable pour les n congrus à 435 modulo 1163 et le résultat numérique pour $n = 435$ est inexact.

Solutions oubliées.

LAILLET (Chalon-sur-Saône) - Enoncé n° 64.
LANFRANCHI (Grenoble) - Enoncés n° 68 et 69.

Enoncé n° 73 (HIRIARD-URRUTY, Clermont-Ferrand)

Soit $\varphi_{u,v}$ la forme linéaire définie sur $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ par

$$\varphi_{u,v}(A) = (Au, v)$$

où $u \in \mathbf{R}^n$, $v \in \mathbf{R}^m$ et (u,v) est le produit scalaire dans $\mathbf{R}^m$. On note

$$\Phi = \{\varphi_{u,v} \mid u \in \mathbf{R}^n, v \in \mathbf{R}^m\}.$$

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel contenu dans Φ ?

Solution (FRAISSE, Lézignan-Corbières)

I. Introduction

Nous décrirons l'itinéraire conduisant à la conclusion puis nous développerons les points qui méritent de l'être.

Pour toute partie A de $\mathbf{R}^n$ et tout vecteur de $\mathbf{R}^m$, v, nous noterons : $\Phi_{A,v}$ l'ensemble $\{\varphi_{u,v} / u \in A\}$.

Pour tout vecteur u de $\mathbf{R}^n$ et toute partie B de $\mathbf{R}^m$, nous noterons : $\Phi_{u,B}$ l'ensemble $\{\varphi_{u,v} / v \in B\}$.

II. Itinéraire

1. Pour tout couple (u,v) de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, $\varphi_{u,v}$ est nulle si, et seulement si, l'un au moins des deux vecteurs u et v est nul.

2. Pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathbf{R}^n$ et tout vecteur v de $\mathbf{R}^m$, $\Phi_{E,v}$ est un sous-espace vectoriel.

Pour tout vecteur u de $\mathbf{R}^n$ et tout sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^m$, $\Phi_{u,F}$ est un sous-espace vectoriel.

3. Pour tout vecteur v non nul de $\mathbf{R}^m$, l'application :

$$\varphi_{\cdot,v} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \to \Phi_{\mathbf{R}^n,v} \\ u \mapsto \varphi_{u,v} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Pour tout vecteur u non nul de $\mathbf{R}^n$, l'application :

$$\varphi_{u,.} \left| \begin{array}{lcl} \mathbf{R}^m & \to & \Phi_{u,\mathbf{R}^m} \\ v & \to & \varphi_{u,v} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4. (C'est le point fondamental) Pour tous couples libres (u_1, u_2) de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et (v_1, v_2) de vecteurs de $\mathbf{R}^m$ et tout couple (u,v) de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$:

$$\varphi_{u_1,v_1} + \varphi_{u_2,v_2} \neq \varphi_{u,v}$$

5. Les seuls sous-espaces vectoriels contenus dans Φ sont les sous-espaces vectoriels du type $\Phi_{\mathrm{E},v}$ (avec E sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ et v vecteur de $\mathbf{R}^m$) ou du type $\Phi_{u,\mathrm{F}}$ (avec u vecteur de $\mathbf{R}^n$ et F sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^m$).

6. *Conclusion.* Les seuls sous-espaces vectoriels maximaux contenus dans Φ sont les sous-espaces vectoriels du type $\Phi_{\mathbf{R}^n,v}$ (avec v vecteur non nul de $\mathbf{R}^m$) ou du type $\Phi_{u,\mathbf{R}^m}$ (avec u vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$).

$\Phi_{\mathbf{R}^n,v}$, isomorphe à $\mathbf{R}^n$, est de dimension n.

$\Phi_{u,\mathbf{R}^m}$, isomorphe à $\mathbf{R}^m$, est de dimension m.

> La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel contenu dans Φ est le plus grand des deux entiers n et m.

III. Développements

1.

Si l'un des deux vecteurs u et v est nul, alors, pour tout A, $(\mathrm{A}u,v)$ est nul. Réciproquement, si ces deux vecteurs sont non nuls, il est possible de choisir A telle que $\mathrm{A}u = v$; alors $(\mathrm{A}u,v) = (v,v)$. C'est un nombre non nul. $\varphi_{u,v}$ n'est pas nulle.

2.

La vérification ne présente pas de difficultés.

3.

Montrons que, pour tout vecteur v non nul de $\mathbf{R}^m$, $\varphi_{.,v}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit v un tel vecteur ; $\varphi_{.,v}$ est évidemment linéaire et surjective. A cause du résultat 1., son noyau est le singleton nul de $\mathbf{R}^n$. Elle est donc injective.

On établit de même que, pour tout vecteur u non nul de $\mathbf{R}^n$, l'application $\varphi_{u,.}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4.

Soit (u_1,u_2) un couple libre de vecteurs de $\mathbf{R}^n$;
(v_1,v_2) un couple libre de vecteurs de $\mathbf{R}^m$;
u un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$;
v un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^m$.

u est décomposable sous la forme $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + u'$ avec u' vecteur d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ supplémentaire du sous-espace vectoriel engendré par (u_1,u_2).

v est décomposable sous la forme $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + v'$ avec v' vecteur d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^m$ orthogonal au sous-espace vectoriel engendré par (v_1,v_2).

Nous nous proposons d'établir :

$$\varphi_{u_1,v_1} + \varphi_{u_2,v_2} \neq \varphi_{u,v} .$$

Supposons au contraire :

$$\varphi_{u_1,v_1} + \varphi_{u_2,v_2} = \varphi_{u,v} .$$

a) *Ni u ni v ne sont nuls.* En effet, choisissons A telle que $Au_1 = v_1$ et $Au_2 = v_2$. Alors :

$$(Au,v) = (Au_1,v_1) + (Au_2,v_2) = (v_1,v_1) + (v_2,v_2) \neq 0$$

b) *u' est nul.* S'il ne l'était pas, on pourrait choisir A telle que $Au_1 = Au_2 = 0$ et $Au' = v$. Alors $(Au,v) = (v,v) \neq 0$; mais $(Au_1,v_1) + (Au_2,v_2) = (0,v_1) + (0,v_2) = 0$.

c) *v' est nul.* Choisissons A telle que $Au_1 = \alpha_1 v'$ et $Au_2 = \alpha_2 v'$.

Alors $\qquad (Au_1,v_1) + (Au_2,v_2) = \alpha_1(v',v_1) + \alpha_2(v',v_2) = 0$

et $\qquad (Au,v) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(v',v')$.

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ n'étant pas nul, c'est v' qui l'est.

d) Pour tout couple (X,Y) de réels, il existe un couple (x,y) de réels tels que :

$$\text{(I)} \quad \left|\begin{array}{l} (xv_1 + yv_2 \,,\, v_1) = X \\ (xv_1 + yv_2 \,,\, v_2) = Y \end{array}\right.$$

En effet, le système (I) s'écrit : $\left|\begin{array}{l} x\,(v_1,v_1) + y\,(v_1,v_2) = X \\ x\,(v_1,v_2) + y\,(v_2,v_2) = Y \end{array}\right.$

Le déterminant est $(v_1,v_1)\,(v_2,v_2) - (v_1,v_2)^2$.

(v_1,v_2) étant un couple libre, ce déterminant, à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, est non nul.

e) $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = 1$ et $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = 0$.

En effet, pour tout A :

$$(Au,v) = (\alpha_1 Au_1 + \alpha_2 Au_2 \,,\, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)$$
$$= \alpha_1\beta_1(Au_1,v_1) + \alpha_1\beta_2(Au_1,v_2) + \alpha_2\beta_1(Au_2,v_1) + (\alpha_2\beta_2(Au_2,v_2)$$

et par ailleurs : $(Au,v) = (Au_1,v_1) + (Au_2,v_2)$.

D'après d) on peut choisir A réalisant successivement les conditions suivantes :

1 $(Au_1, v_1) = 1$; $(Au_1, v_2) = (Au_2, v_1) = (Au_2, v_2) = 0$; (d'où $\alpha_1\beta_1 = 1$)
2 $(Au_1, v_2) = 1$; $(Au_1, v_1) = (Au_2, v_1) = (Au_2, v_2) = 0$; (d'où $\alpha_1\beta_2 = 0$)
3 $(Au_2, v_1) = 1$; $(Au_1, v_1) = (Au_1, v_2) = (Au_2, v_2) = 0$; (d'où $\alpha_2\beta_1 = 0$)
4 $(Au_2, v_2) = 1$; $(Au_1, v_1) = (Au_1, v_2) = (Au_2, v_1) = 0$; (d'où $\alpha_2\beta_2 = 1$) .

f) Aucun quadruplet $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ de réels ne vérifie les conditions :

$$\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = 0$$

Ceci prouve que l'égalité $\varphi_{u_1,v_1} + \varphi_{u_2,v_2} = \varphi_{u,v}$ est fausse.

5.

Soit ψ un sous-espace vectoriel contenu dans Φ. Montrons qu'il est soit du type $\Phi_{E,v}$ (avec E sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et v vecteur de $\mathbb{R}^m$), soit du type $\Phi_{u,F}$ (avec u vecteur de $\mathbb{R}^n$ et F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$).

a) Il existe soit un vecteur de $\mathbb{R}^n$, u, tel que ψ soit inclus dans $\Phi_{u,\mathbb{R}^m}$, soit un vecteur v de $\mathbb{R}^m$ tel que ψ soit inclus dans $\Phi_{\mathbb{R}^n,v}$.

Sinon ψ contiendrait trois éléments $\varphi_{u,v}$, $\varphi_{u',v}$, $\varphi_{u,v'}$ tels que les couples (u,u') et (v,v') soient libres. Mais alors $\varphi_{u',v} + \varphi_{u,v'}$, d'après le résultat 4., n'appartiendrait pas à Φ, donc pas à ψ.

b) S'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ tel que ψ soit inclus dans $\Phi_{u,\mathbb{R}^m}$, alors il existe une partie F de $\mathbb{R}^m$ telle que : $\psi = \Phi_{u,F}$.

F, image réciproque du sous-espace vectoriel ψ par l'isomorphisme $\varphi_{u,\cdot}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

c) S'il existe un vecteur v de $\mathbb{R}^m$ tel que ψ soit inclus dans $\Phi_{\mathbb{R}^n,v}$, alors il existe une partie de $\mathbb{R}^n$, E, telle que : $\psi = \Phi_{E,v}$.

E, image réciproque du sous-espace vectoriel ψ par l'isomorphisme $\varphi_{\cdot,v}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Autres solutions : AMON (Angoulême), CHARLES (Montpellier) qui utilise le produit tensoriel, LEMAIRE (Douai), et l'auteur.

Enoncé n° 74 (EHRHART, Strasbourg)

Quels sont les nombres premiers dans la suite définie par $u_1 = u_2 = 0$ et la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$?

Solution (LEMAIRE, Douai)

On peut remarquer d'abord que les termes de la suite (u_n) appartiennent à N, et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = u_n + 1$ est la suite de Fibonacci ; en effet,

$$w_1 = w_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$$

On démontre facilement, par récurrence sur n, que les termes de cette dernière suite vérifient les deux relations :

① $\quad w_{2n}^2 = w_{2n-1}w_{2n+1} - 1 \qquad$ ② $\quad w_{2n+1}^2 = w_{2n}w_{2n+2} + 1$

I — De la relation ①, que l'on peut écrire

$$(u_{2n}+1)^2 = (u_{2n-1}+1)(u_{2n+1}+1) - 1 ,$$

on tire, compte tenu de la relation $u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1} + 1$,

$$(u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

D'où $\quad (u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5\, u_{2n-1}u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$;

puis $\quad \boxed{5\, u_{2n-1}u_{2n+1} = (u_{2n+1} + u_{2n-1})(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 1)} \qquad$ ③

Dès lors, *si* u_{2n-1} *était premier, il devrait diviser soit* u_{2n+1} *, soit* $u_{2n+1} - 1$.

• Dans le premier cas, on aurait

$$u_{2n+1} = ku_{2n-1} \quad \text{avec } k \text{ entier, } k \geqslant 2 ;$$

mais alors la relation ③ donne

$$5k\, u_{2n-1}^2 = (1+k)u_{2n-1}[(1+k)u_{2n-1} - 1] ,$$

puis
$$(k^2 - 3k + 1)u_{2n-1} = 1 + k$$

Or, si $k=2$, on a $k^2 - 3k + 1 < 0$ et $1 + k > 0$,
et si $k > 4$, on a $k^2 - 3k + 1 > 1 + k$.

Seules, les valeurs $k=3$ et $k=4$ donnent pour u_{2n-1} des valeurs entières positives : ce sont $u_{2n-1} = 4$ et $u_{2n-1} = 1$. Mais 4 et 1 ne sont pas premiers.

• Dans le second cas, on aurait

$$u_{2n+1} - 1 = ku_{2n-1} \quad \text{avec } k \text{ entier, } k \geqslant 2 .$$

D'où, d'après ③,

$$5(ku_{2n-1} + 1)u_{2n-1} = (1 + ku_{2n-1} + u_{2n-1})(1+k)u_{2n-1}$$

Ce qui donne $\;4 - k = (k^2 - 3k + 1)u_{2n-1}$.

Si $k=2$, on a $k^2 - 3k + 1 < 0$ et $4 - k > 0$,
et si $k > 3$, on a $k^2 - 3k + 1 > 4 - k$.

Seule, la valeur $k=3$ donne pour u_{2n-1} une valeur entière positive : c'est $u_{2n-1} = 1$. Mais 1 n'est pas premier.

En résumé, *aucun terme de rang impair de la suite* (u_n) *n'est premier.*

II — La relation ② conduit de façon analogue à

$$(u_{2n+1}+1)^2 = [(u_{2n+2}+1) - (u_{2n}+1)]^2 = (u_{2n}+1)(u_{2n+2}+1) + 1 ,$$

d'où $\quad [(u_{2n+2}+1) + (u_{2n}+1)]^2 = 5\,(u_{2n}+1)(u_{2n+2}+1) + 1$, puis $$\boxed{5\, u_{2n}u_{2n+2} = (u_{2n}+u_{2n+2}-2)(u_{2n}+u_{2n+2}+1)} \qquad (4)$$

Si u_{2n} était premier, il devrait diviser $u_{2n+2}-2$ ou $u_{2n+2}+1$. (Le *ou* étant exclusif car, s'il est possible que
$$(u_{2n+2}-2)=3 \wedge (u_{2n+2}+1)=3 ,$$
il n'existe pas de terme égal à 3 dans la suite (u_n).)

• Dans le premier cas, on aurait
$$u_{2n+2}-2 = ku_{2n} \text{ avec } k \text{ entier, } k \geqslant 2 ;$$
d'où, d'après (4), $5\, u_{2n}(ku_{2n}+2) = (1+k)u_{2n}(u_{2n}+ku_{2n}+3)$
et, après simplification, $7-3k = (k^2-3k+1)u_{2n}$.

Si $k=2$, on a $k^2-3k+1<0$ et $7-3k>0$,

et si $k\geqslant 3$, on a $k^2-3k+1>7-3k$.

Donc, aucun entier $k, k\geqslant 2$ ne donne de valeur entière positive pour u_{2n}.

• Dans le second cas, on peut poser
$$u_{2n+2}+1 = ku_{2n} \text{ avec } k \text{ entier, } k\geqslant 2 ,$$
et (4) donne $5\, u_{2n}(ku_{2n}-1) = [u_{2n}+(ku_{2n}-3)]\,(1+k)u_{2n}$
d'où $$3k-2 = (k^2-3k+1)u_{2n} .$$

Si $k=2$, on a $k^2-3k+1<0$ et $3k-2>0$

et si $k\geqslant 6$, on a $k^2-3k+1 > 3k-2$.

Ces valeurs de k ne permettent donc pas d'obtenir pour u_{2n} une valeur entière positive.

Il reste à examiner les trois valeurs:

$k=3$, qui donne le nombre *premier* $u_{2n}=7$,

$k=4$, qui donne le nombre *premier* $u_{2n}=2$,

$k=5$, qui ne donne pas de valeur entière.

En conclusion, *les termes $u_4=2$ et $u_6=7$ sont les seuls entiers premiers dans la suite (u_n).*

Autres solutions: FRAISSE (Lézignan-Corbières), LAVENIR (Montceau-les-Mines), MARGUERITE (Juvigny), VIDIANI (Annecy) et l'auteur.

Enoncé n° 75 **(ROYER, Luxembourg)**

Quelle est la somme de la série de terme général Arctg $\dfrac{1}{u_{2n}}$ où u_n est le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite de Fibonacci?

Solution (VIDIANI, Annecy)

On prend $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, ...

La relation $u_n^2 - u_{n-1}\,u_{n+1} = (-1)^n$ est vérifiée pour $n=2$, $n=3$, ...

Le calcul du déterminant dans la relation

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_{n+2} & u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n & u_{n-1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$$

démontre qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Pour tout n, $u_n \geqslant 1$ donc $\text{Arctg}\, \dfrac{1}{u_n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

La relation $\text{Arctg}\, \dfrac{1}{u_{2n}} = \text{Arctg}\, \dfrac{1}{u_{2n-1}} - \text{Arctg}\, \dfrac{1}{u_{2n+1}}$

découle alors facilement de la relation établie plus haut.

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Arctg}\, \frac{1}{u_{2k}} = \text{Arctg}\, \frac{1}{u_1} - \text{Arctg}\, \frac{1}{u_{2n+1}} \text{ tend vers } \frac{\pi}{4} .$$

Autres solutions: CHRETIEN (Paris), CUCULIERE (Paris), FRAISSE (Lézignan-Corbières), LEMAIRE (Douai), LUCAZEAU, MALLEUS (Chatenay-Malabry), PERROT (Vincennes), VIRICEL (Nancy) qui donne une interprétation géométrique, et l'auteur.

CUCULIERE et l'auteur calculent également la somme de la série $\text{Argth}\, \dfrac{1}{u_{2n+1}}$.

Les lecteurs du Bulletin sont invités à se pencher sur la série des $\text{Arctg}\, \dfrac{1}{u_{2n+1}}$ ...

II. Olympiades

ENONCES

Exercice 6 (CAPES)

Soient $P(z)$ un polynome du troisième degré, de racines a, b, c et $P'(z)$ son dérivé, de racines f et f'. Montrer qu'il existe une ellipse de foyers f et f' inscrite dans le triangle (a,b,c).

Exercice 7 (URSS 1965)

Les polynomes à coefficients entiers (relatifs) qui prennent des valeurs irrationnelles pour toutes les valeurs irrationnelles de la variable sont les polynomes du premier degré.