4

JEUX ET MATHS

Sur le jeu des cavaliers

par Jean-Claude BERMOND, Laboratoire de Recherche en Informatique, Bât 490, Université Paris-Sud, 91405 Orsay

Dans le Bulletin de Décembre 1979 (pages 839-842), Brette [7] pose le problème suivant (points 4 et 5, p. 841) :

"Soit k un entier congru à 0 ou 1 modulo 4 (k = 4n ou k = 4n + 1). Peut-on numéroter 2k points sur la droite de cm en cm à l'aide des nombres 1,2,..., k utilisés exactement 2 fois, de telle façon que la distance entre les 2 points numérotés i soit égale à i ?"

— *Exemples :*

$k = 4$	4	2	3	2	4	3	1	1		
$k = 5$	5	2	4	2	3	5	4	3	1	1

On peut reformuler le problème sous la forme :

Problème A : Pour quelles valeurs de k peut-on trouver une suite (à 2k éléments) formée de deux occurrences des entiers i, i = 1,2,...,k, de façon que les deux occurrences de i soient séparées par exactement i – 1 éléments ?

Les suites associées aux exemples ci-dessus s'écrivent

k = 4 : 4,2,3,2,4,3,1,1
k = 5 : 5,2,4,2,3,5,4,3,1,1

Une autre forme équivalente du problème A est le

Problème B : Pour quelles valeurs de k peut-on partitionner les entiers de 1 à 2k en k paires $\{a_i, b_i\}$ telles que $b_i - a_i = i$?

Pour voir que le problème B est le même que le problème A, il suffit de considérer a_i et b_i comme les rangs des occurrences de i dans la suite du problème A.

Par exemple, pour $k=4$ l'entier 4 apparaît au 1[er] et au 5[e] rang, donc $a_4=1$, $b_4=5$. Les partitions associées aux exemples ci-dessus s'écrivent :

$k=4$: {7,8} ; {2,4} ; {3,6} ; {1,5}
$k=5$: {9,10} ; {2,4} ; {5,8} ; {3,7} ;{1,6}

(Ce problème B est celui évoqué dans la revue [7, §6 page 841] : *"On divise le cercle en 2k parties égales ; on veut numéroter les points de 1 à 2k de telle façon que les k différences diamétrales soient égales à 1,2,...k").*

C'est sous la forme B que le problème a été posé (et résolu) par Skolem [14] en 1957. Les suites associées dans le problème A sont souvent appelées "suites de Skolem". On a le :

Théorème 1 : Il existe une partition des entiers de 1 à $2k$ en k paires $\{a_i, b_i\}$ telles que $b_i - a_i = i$ si et seulement si $k=4n$ ou $k=4n+1$.

Preuve : La condition est nécessaire : en effet, s'il existe une telle partition, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i+b_i) = \sum_{j=1}^{2k} j \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{k} (b_i-a_i) = \sum_{i=1}^{k} i$$

$$\text{donc } 2\sum_i a_i = \sum_{j=k+1}^{2k} j = \frac{k(3k+1)}{2}$$

Donc $k(3k+1)$ doit être un multiple de 4, soit $k \equiv 0$ ou 1 (mod. 4).

Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit d'exhiber une telle partition pour $k=4n$ et $k=4n+1$. Plusieurs partitions ont été données dans la littérature, en particulier par Skolem [14], Hanani [10] et Hilton [11]. Dans ce dernier article, on trouvera des partitions répondant à l'agencement proposé par Brette [7, §5 p. 841], à savoir de ranger d'abord les nombres pairs par emboîtement. De telles partitions ont aussi été données dans le Bulletin 423, p. 410, par Criton ; dans le cas $k=4n$, il s'agit exactement de la même partition ; dans le cas $k=4n+1$ celle de Hilton est légèrement différente.

Généralisations : Le problème A (ou B) admet plusieurs généralisations possibles. L'une d'elles s'énonce :

Problème A_d : Pour quelles valeurs de d et de k peut-on trouver une suite (à 2k éléments) formée de deux occurrences des entiers i, $i=1,2,\ldots,k$, de façon que les deux occurrences de i soient séparées par exactement $i+d-2$ éléments.

Exemples : $d=2$, $k=4$: la suite 2,3,4,2,1,3,1,4.
$d=3$, $k=5$: la suite 5,3,1,4,2,1,3,5,2,4.

La forme équivalente B_d s'écrit :

Problème B_d : Pour quelles valeurs de d et de k peut-on partitionner les entiers de 1 à 2k en k paires $\{a_i, b_i\}$ telles que $b_i - a_i = i+d-1$.

Les partitions associées aux exemples ci-dessus s'écrivent en considérant encore a_i et b_i comme les rangs des occurrences de i dans la suite du problème A_d.

$d=2$, $k=4$: $\{5,7\}$; $\{1,4\}$; $\{2,6\}$; $\{3,8\}$
$d=3$, $k=5$: $\{3,6\}$; $\{5,9\}$; $\{2,7\}$; $\{4,10\}$; $\{1,8\}$.

Le cas $d=1$ est exactement le problème A (ou B). Le cas $d=2$, qui se formule bien avec A_2 (deux occurrences de i devant être séparées exactement par i éléments), a été considéré par Langford [12] en 1958 et les suites obtenues dans ce cas sont appelées suites de Langford. Langford écrit que le problème lui est venu en regardant son fils jouer avec des cubes colorés. Son fils aurait placé 6 cubes, 2 de chaque couleur, en pile de sorte qu'entre les deux cubes rouges il y avait un autre cube, entre les deux bleus deux cubes et entre les deux jaunes trois. Ceci correspond à la suite ($d=2$, $k=3$) J R B R J B ou 3 1 2 1 3 2.

Davies [9] a montré :
Théorème 2 : Il existe une solution au problème A_2 ou B_2 (cas $d=2$) si et seulement si $k \equiv 0$ ou 3 (mod. 4).

Remarque : Ceci nous donne de nouvelles solutions au problème A (ou B) initial. En effet, supposons qu'on ait une partition des entiers de 1 à $2k$ répondant au problème B_2 ; alors la partition des entiers de 1 à $2k+2$ en $k+1$ paires $a'_1=2k+1$; $b'_1=2k+2$ et $a'_{i+1}=a_i$; $b'_{i+1}=b_i$ pour $i=1,\dots,k$ répond au problème B (la réciproque est fausse, les familles données dans la démonstration du théorème n'étant pas obtenues ainsi).

D'une manière générale, on montre comme dans le théorème 1 que :

Proposition 3 : Si le problème A_d (B_d) admet une solution, alors :
(i) $k \geqslant 2d-1$
(ii) si d est impair, $k \equiv 0$ ou 1 (mod. 4)
si d est pair, $k \equiv 0$ ou 3 (mod. 4).

Nous conjecturons que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes. Ceci est le cas si $d=1$ (Théorème 1) et $d=2$ (Théorème 2). Dans [3], nous avons montré que les conditions étaient suffisantes pour $d=3$ et $d=4$ ainsi que pour $k \equiv 1$ ou 3 (mod. 4) et pour $k \equiv 0$ (mod. 4), $k \geqslant 4(2d-1)$. Pour démontrer la conjecture pour une valeur donnée de d, il suffit donc de la démontrer pour $k \equiv 0$ (mod. 4), $2d-1 < k < 4(2d-1)$.

Nous nous sommes intéressés au problème $A_d(B_d)$ comme cas particulier d'un problème de disposition d'antennes en radioastronomie posé par Biraud, Blum et Ribes [6]. Le problème se formule ainsi :

Soient k,n,d trois entiers positifs. On considère k ensembles $A_i=(a_{i1}<a_{i2}<\dots<a_{in})$ où $i=1,2,\dots,k$ et où les a_{ij} sont des entiers. A chaque ensemble A_i on associe l'ensemble des différences :

$$D_i = \{a_{ij}-a_{ih} \;/\; 1 \leqslant h<j \leqslant n\} .$$

On dit que les A_i constituent un (k,n,d) système parfait si

$$\bigcup_{i=1}^{k} D_i = \{d,\ d+1,\ \ldots,\ d-1+kn(n-1)/2\}$$

Dans le problème de radioastronomie, n représente le nombre d'antennes dont on dispose. Ces antennes sont mobiles et k représente le nombre de configurations (ou de jours de mesure si chaque jour on change de configuration) dans lesquelles on répartit les antennes. On mesure des fréquences spatiales qui dépendent des distances entre antennes.

Exemples:

$k=1,\ n=4,\ d=1$: $A = \{0,1,4,6\}$; $D = \{1,2,3,4,5,6\}$

$k=4,\ n=3,\ d=1$: $A_1=\{0,11,12\}$; $A_2=\{0,6,8\}$; $A_3=\{0,7,10\}$; $A_4=\{0,5,9\}$
$D_1=\{1,11,12\}$; $D_2=\{2,6,8\}$; $D_3=\{3,7,10\}$; $D_4=\{4,5,9\}$

$k=4,\ n=3,\ d=2$: $A_1=\{0,10,12\}$; $A_2=\{0,6,9\}$; $A_3=\{0,7,11\}$; $A_4=\{0,8,13\}$
$D_1=\{2,10,12\}$; $D_2=\{3,6,9\}$; $D_3=\{4,7,11\}$; $D_4=\{5,8,13\}$

Remarque : On peut supposer que $a_{i1}=0$ pour tout i (car seules les différences entre a_{ij} interviennent).

Dans le cas $n=3$, le problème est relié aux problèmes $A_d(B_d)$. Plus exactement, s'il existe une solution au problème $A_d(B_d)$ il existe un $(k,3,d)$ système parfait. En effet, soit une partition des entiers de 1 à $2k$ en k paires $\{a_i,b_i\}$ telle que $b_i-a_i=i+d-1$; alors on vérifie que les triplets $A_i=(0,a_i+k+d-1,\ b_i+k+d-1)$ forment un $(k,3,d)$ système parfait.

Les exemples de (4,3,1) et (4,3,2) systèmes donnés ci-dessus ont été obtenus de cette manière à partir des exemples donnés au début. Par contre, il existe des $(k,3,d)$ systèmes parfaits non construits ainsi : par exemple le (4,3,1) système :

$$A_1=\{0,4,6\}\ ;\ A_2=\{0,9,10\}\ ;\ A_3=\{0,8,11\}\ ;\ A_4=\{0,7,12\}.$$

Nous renvoyons le lecteur à [4] ou [5] pour les divers résultats connus sur ce problème.

Il existe de nombreuses autres généralisations du problème initial ; je mentionnerai ici juste un problème non résolu :

Problème A'_s : Pour quelles valeurs de s et k peut-on trouver une suite à sk éléments, formée de s occurrences des entiers i, $i=1,2,\ldots,k$, de façon que deux occurrences consécutives de i soient séparées par exactement $i-1$ éléments ?

Dans le cas $s=2$, le problème A'_2 est exactement le problème A. Dans le cas $s=3$, on peut montrer que s'il existe une solution au problème A'_3, alors $k\equiv 0,1$ ou 2 (mod. 9). De telles suites ont été exhibées pour $k=9,10,11,18,19,20$ et il est conjecturé qu'il en existe au moins une pour $k\equiv 0,1$ ou 2 (mod. 9). Aucun exemple avec $s\geqslant 4$ n'est actuellement connu. Le lecteur intéressé pourra se référer à l'article de Roselle [13].

Pour tous ces problèmes, lorsqu'on connaît l'existence d'une solution, on peut se poser la question de trouver toutes les solutions. C'est la question posée par Brette dans le Bulletin 323, page 410, pour le problème A. Appelons $\phi(k)$ le nombre de suites distinctes répondant au problème A qu'on peut former avec k éléments. Nous considérons comme non distinctes deux suites obtenues l'une à partir de l'autre en renversant l'ordre des termes (par exemple, les suites 1,1,3,4,2,3,2,4 et 4,2,3,2,4,3,1,1). On a $\phi(4)=3$, les trois suites distinctes étant, outre celle ci-dessus, 1,1,4,2,3,2,4,3 et 2,3,2,4,3,1,1,4. Les autres valeurs connues (voir Baron [2]) sont $\phi(5)=5$; $\phi(8)=252$; $\phi(9)=1328$.

Dans le cas du problème A_2, si on dénote par $\psi(k)$ le nombre de solutions distinctes (avec la même convention que ci-dessus), Baron [2] a trouvé que $\psi(3)=1$, $\psi(4)=1$, $\psi(7)=26$, $\psi(8)=150$, $\psi(11)=17792$. La détermination de $\phi(n)$ (ou $\psi(n)$) apparaît comme un problème très difficile ; par contre, il semble que $\phi(n)$ (ou $\psi(n)$) croissent très rapidement. Il serait donc intéressant de montrer que $\phi(n)\to\infty$ lorsque $n\to\infty$ et d'avoir une idée du comportement asymptotique ; par exemple, est-ce que $\phi(n)$ croît exponentiellement ? (Récemment, D. Amar et A. Germa ont montré que $\phi(n)\to\infty$ si $n\to\infty$).

Pour finir, considérons l'extension du problème A ou B au cas infini. L'existence d'une suite (ou d'une partition) est évidente. La procédure la plus simple pour donner une réponse au problème B est de définir les paires $\{a_i,b_i\}$ de la manière récursive suivante :

$a_1=1$, $b_1=a_1+1=2$; supposons que l'on ait construit les $i-1$ premières paires ; alors, on choisit pour a_i le plus petit entier différent de tous les a_r et b_r pour $1\leq r\leq i-1$ et on pose $b_i=a_i+i$. Les premières paires sont donc $\{1,2\}$; $\{3,5\}$; $\{4,7\}$; $\{6,10\}$; $\{8,13\}$; $\{9,15\}$; $\{11,18\}$; $\{12,20\}$; $\{14,23\}$ ...

Nous laissons au lecteur le soin de montrer que $a_i=\left[\dfrac{(1+\sqrt{5})i}{2}\right]$ et $b_i=\left[\dfrac{(3+\sqrt{5})i}{2}\right]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. On obtient ainsi des "suites de Beatty" (voir article de Chevrier et Parpay dans le Bulletin 324 [8]. Un traitement extensif de ce problème et des suites de Beatty se trouve dans Skolem [14] et surtout Bang [1] où l'on trouvera une démonstration très courte du fait que les suites $[\alpha n]$ et $[\beta n]$ sont complémentaires si et seulement si α et β sont irrationnels et $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$.

Bibliographie

[1] T. BANG : On the sequence $[n\alpha]$, $n = 1,2,\ldots$ Supplementary note to the preceding paper by Th. Skolem, Math. Scand. 5 (1957) 69-76.

[2] G. BARON : Über verallgemeinerungem des Langford'schen problems, Combinatorial Theory and its applications, Proc. Coll. Balatunfüred 1969, Coll. Math. Soc. János Bolyai, North Holland (1970), 81-92.

[3] J-C. BERMOND, A.E. BROUWER et A. GERMA : Systèmes de triples et différences associées, Colloque CNRS, Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Orsay, 1976, CNRS (1978), 35-38.

[4] J-C. BERMOND, A. KOTZIG et J. TURGEON : On a combinatorial problem of antennas in radio-astronomy, Colloq. Math. Soc. János Bolyai *18*, Combinatorics, Keszthély, Hungary, 1976, North-Holland, Amsterdam (1978), 135-149.

[5] J-C. BERMOND et G. FARHI : Sur un problème combinatoire d'antennes en radioastronomie, à paraître, Volume en l'honneur d'A. Kotzig.

[6] F. BIRAUD, E.J. BLUM et J-C. RIBES : Some new possibilities of optimum synthetic linear arrays for radioastronomy, Astronomy and Astrophysics 41 (1975), 409-413.

[7] J. BRETTE : Jeu des 12 cavaliers, Bulletin A.P.M.E.P. 321 (1979), 839-842.

[8] P. CHEVRIER et S. PARPAY : Suites de Beatty. Des générations étonnantes de N, Bulletin A.P.M.E.P. 324 (1980), 483-491.

[9] R.O. DAVIES : On Langford's Problem II, Math. Gaz. 43 (1959), 253-255.

[10] H. HANANI : A note on Steiner Triple Systems, Math. Scand. 8 (1960), 154-156.

[11] A.J.W. HILTON : On Steiner and similar triple systems, Math. Scand. 24 (1969), 208-216.

[12] C.D. LANGFORD. Problem, Math. Gaz. 42 (1958), 228.

[13] D.P. ROSELLE : Distribution of integers into s-tuples with given differences, Conf. Numerical Maths. Manitoba 1971, Utilitas Math (1971), 31-42.

[14] Th. SKOLEM : On certain distributions of integers in pairs with given differences, Math. Scand. 5 (1957), 57-68.