9

COURRIER DES LECTEURS

Remarque sur la notion d'indépendance en probabilité

Je vous adresse une remarque relative à l'article de M. BENETEAU paru dans le Bulletin n° 323 d'avril 1980, page 369.

En fait, l'exemple proposé est un cas tout à fait particulier de la théorie des jeux à 2 personnes et à somme nulle (ce que gagne l'un, l'autre le perd) : il correspond à 2 possibilités de jouer pour chacun des joueurs.

D'un point de vue général, les données sont les suivantes :

— le 1^er^ joueur joue sa $i^{ème}$ possibilité avec la probabilité p_i

— le 2^e^ joueur joue sa $j^{ème}$ possibilité avec la probabilité q_j

— le 1^er^ joueur gagne a_{ij} (le 2^e^ joueur perdant donc a_{ij}) lorsque le 1^er^ joueur joue sa $i^{ème}$ possibilité et le 2^e^ joueur sa $j^{ème}$ possibilité.

Si on note $p=(p_1\ p_2 \ldots p_n)$, $q=(q_1\ q_2 \ldots q_m)$ et $A=(a_{ij})$, alors le gain moyen du joueur 1 (ou perte moyenne du joueur 2) est

$$g(p,q) = {}^tp\, Aq\ .$$

L'exemple de l'article correspond à $A = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ et

$$g(p,q) = -20p_1q_1 + 6p_1 + 6q_1 - 1$$

La "stratégie optimale" pour le joueur 1 est

$$p^* \text{ maximisant } \min_q g(p,q) :$$

si le joueur 2 joue la stratégie $\overline{q}$ ($\overline{q}$ réalisant le min de $g(p^*,q)$),

alors le joueur 1 gagne $v_1 = g(p^*,\overline{q}) = \max_p \min_q g(p,q)$

si le joueur 2 joue une stratégie $q \neq \overline{q}$,

alors le joueur 1 a un gain supérieur ou égal à v_1 .

De même, il y a une stratégie optimale pour le joueur 2 :

$$\text{c'est } q^* \text{ minimisant } \max_p g(p,q) ;$$

en jouant la stratégie q^* , le joueur 2 perd au plus

$$v_2 = \min_q \max_p g(p,q)$$

En fait (*Théorème de Von Neumann*) $v_1 = v_2 = v$.

Dans le cas $n = m = 2$, sous certaines hypothèses sur A,

$$v = \frac{\det(A)}{\mathrm{trace}(A) - a_{12} - a_{21}}$$

soit, pour l'exemple de l'article, $v = \dfrac{-16}{-10-10} = 0{,}8$.

$$(p^*, q^*) = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right) .$$

Le problème de la détermination de p^* et q^* est très lié au problème de la programmation linéaire.

Alain PICHEREAU

Professeur, Lycée Marguerite de Valois, Angoulême