Application du calcul différentiel à des problèmes d'optimisation en classes de première et terminale

par Hervé LEHNING, lycée Janson de Sailly, Paris

Un des buts du calcul différentiel est l'étude des minima et maxima. Pour cela, en première et terminale, on dispose du théorème liant le signe de la dérivée d'une fonction et son sens de variation. Si la fonction a un sens économique, on aboutit à un problème d'optimisation.

Les deux problèmes (optimisation et recherche d'un minimum) sont mathématiquement équivalents, mais il n'est pas indifférent de poser un exercice sous une forme ou une autre.

Pour résoudre un problème de mathématiques, il est courant de transformer une ou plusieurs fois le problème en un problème équivalent mieux connu, ce genre de démarche faisant appel à l'expérience et à l'imagination. Il est néfaste de vouloir systématiquement épargner ces étapes aux élèves.

Quand le problème posé est d'origine "concrète", la première étape de ce type est en fait une modélisation mathématique du problème et donc une approximation. Cette modélisation est souvent progressive, comme le montreront les exemples. Le problème de la rigueur de ce modèle ne se pose pas si on montre avec soin l'endroit où l'on idéalise la situation puis si, une fois la solution obtenue, on la confronte avec la réalité (en effet, on ne doit pas oublier que la solution du modèle ne résout que le modèle !). On ne trahira donc pas la nécessaire rigueur des mathématiques en gardant l'énoncé sous sa forme d'origine et on montrera ainsi l'utilité des mathématiques.

Je pense que ces remarques seront plus explicites avec l'exemple qui suit :

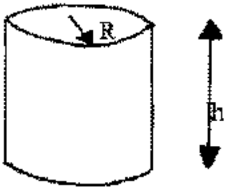
Problème de la boîte de conserve :

a) *Quelle est la forme à donner à une boîte de conserve cylindrique de façon à économiser le métal ?*

On peut admettre que l'épaisseur du métal est constante et négligeable devant les dimensions de la boîte ; ainsi la quantité de métal à utiliser est proprotionnelle à la surface latérale (bases comprises) de la boîte.

Donc on adopte le modèle mathématique suivant :

b) *Quelles sont les dimensions R et h (rayon et hauteur) à donner à un cylindre de volume V donné pour que la surface latérale S soit minimale ?*



On a : $V = \pi R^2 h$ et $S = 2\pi R h + 2\pi R^2$
donc S est une fonction de la seule variable R :

$$S(R) = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$$

Le problème devient donc :

c) *Minimiser la fonction* : $\left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ R \mapsto S(R) = \dfrac{2V}{R} + 2\pi R^2 \end{array} \right.$

On étudie donc les variations de S sur $]0, +\infty[$. S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout R :

$$S'(R) = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R$$

d'où le tableau de variations :

R	0		$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Donc S admet un minimum atteint en : $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ et donc :

$$h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R.$$

Donc, pour économiser le métal, la boîte doit avoir un diamètre égal à sa hauteur.

Ceci n'est en fait qu'une approximation et si on tient compte du bourrelet sur le bord, on voit qu'il faut réduire la circonférence des bases et donc on obtient une boîte dont la hauteur est légèrement supérieure au diamètre. On peut alors en discuter avec les élèves et modifier le modèle en conséquence.

On voit sur cet exemple qu'il n'est pas indifférent de poser le problème sous les formes a), b) ou c).

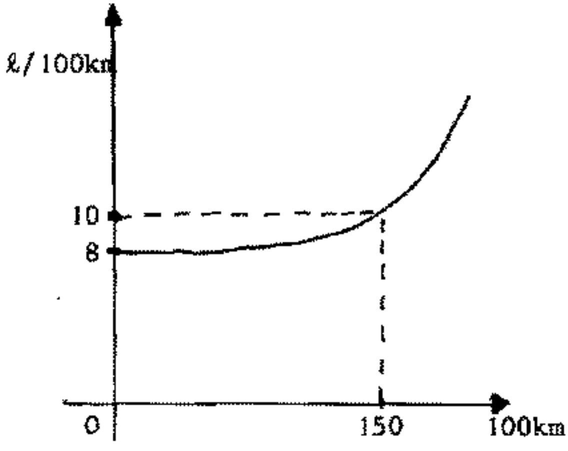
La forme c) n'est qu'un exercice d'étude de variations d'une fonction, la forme b) est intéressante du seul point de vue mathématique, les exercices de la forme a) permettent d'intégrer complètement les mathématiques dans la culture scientifique des élèves.

Voici un autre exemple très actuel :

Problème du réglage d'une automobile :

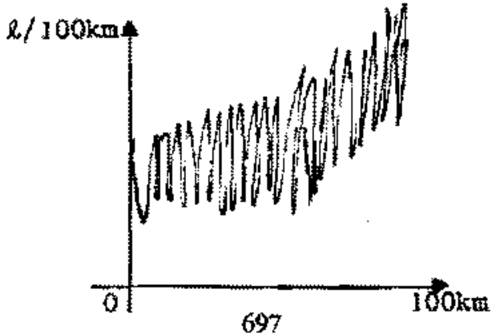
Chacun sait, au moins depuis la campagne "anti-gaspi", que le moteur d'une voiture se dérègle à l'usage, ce qui entraîne une surconsommation d'essence. Il faut le faire réviser, mais la révision entraîne aussi une dépense. Quelle doit être la périodicité de ces révisions pour minimiser le coût ?

Un spécialiste m'a expliqué que, dans les conditions d'utilisation de ma voiture, la surconsommation est environ de 2 litres aux 100 km au bout de 15 000 km. La courbe de consommation à l'allure suivante :



En fait, cette courbe est une courbe des moyennes aux 100 km, et donc une suite de points ; mais il est pratique de la supposer continue.

Si on voulait utiliser une consommation instantanée, la courbe noircirait entièrement le papier :



Elle serait bien difficile à utiliser et n'a pas beaucoup de sens pour notre problème.

Donc j'adopte ma courbe régulière ; j'appelle $f(t)$ la consommation en ℓ/100 km au bout de $t \times 100$ km après une révision. Je la suppose strictement croissante et autant de fois dérivable que j'en aurai besoin. Le prix du litre d'essence est e et celui de la révision r ; je ferai l'hypothèse déraisonnable qu'ils sont constants ; on reviendra sur cette hypothèse ultérieurement.

Si la révision intervient après x.100 km, la dépense totale est :

$$e\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + r$$

donc la dépense aux 100 km est de :

$$g(x) = \frac{e}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{r}{x}$$

Le problème est donc de minimiser g sur $]0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\left[e\,x\,f(x) - e\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - r\right].$$

On pose alors pour tout x :

$$h(x) = ex\,f(x) - e\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - r\,.$$

On a :

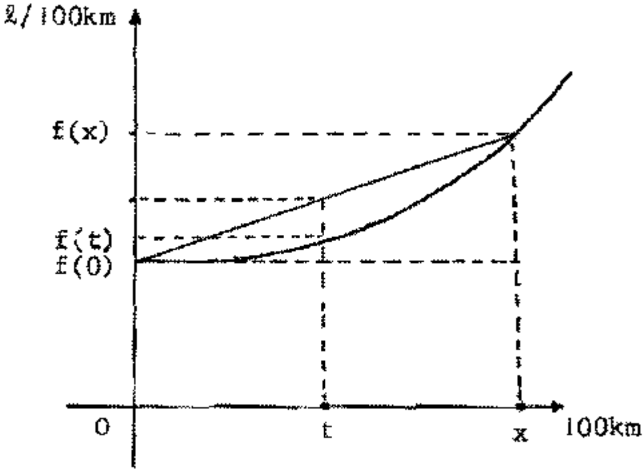
$$h(x+s) - h(x) = ex\,[f(x+s) - f(x)] + e\,[sf(x+s) - \int_x^{s+s} f(t)\mathrm{d}t]$$

pour tout x et tout s .

Si $s > 0$, on a :
$f(x+s) - f(x) > 0$ et, pour $x < t < x+s$, $f(t) < f(x+s)$

donc
$$\int_x^{x+s} f(t)\mathrm{d}t < sf(x+s)$$

Donc $h(x+s) - h(x) > 0$ pour tout x et tout $s>0$, et h est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.



En ajoutant l'hypothèse "f est convexe", ce qui correspond au dessin, ou plus simplement : "pour tout x, le graphe de f entre 0 et x est situé sous le segment de droite joignant le point d'abscisse 0 au point d'abscisse x", on a :

$$\text{pour tout } t \in [0,x] \quad , \quad f(t) < f(0) + \frac{f(x)-f(0)}{x}\, t$$

donc, pour tout x :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t < x\,\frac{f(x)+f(0)}{2} \quad \text{(aire du trapèze)}$$

d'où
$$h(x) \geqslant e\,\frac{x}{2}\,[f(x)-f(0)] - r\,.$$

$x \to f(x) - f(0)$ est strictement croissante donc a une limite finie strictement positive ou infinie au voisinage de $+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,

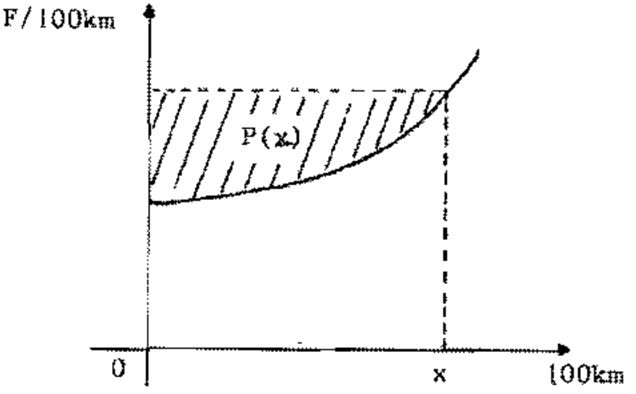
donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

h est strictement croissante de $-r$ à $+\infty$; h a donc un zéro unique x_0 et :

$h(x) < 0$ pour $x \in [0,x_0[$, $\quad h(x) > 0$ pour $x \in]x_0, +\infty[$.

Donc g décroît sur $]0,x_0[$ puis croît sur $]x_0,+\infty[$: g admet un minimum atteint uniquement en x_0 et on a :

$$e\,x_0\,f(x_0) - e\int_0^{x_0} f(x)\mathrm{d}t = r$$



Ce qui s'interprète géométriquement :

Soit $P(x)$ le coût supplémentaire en essence si la consommation avait toujours été celle de x ; l'optimum est atteint quand $P(x) = r$.

[La courbe ci-contre est donc en francs par 100 km et non en litres.]

Dans notre cas particulier du début, si on suppose la courbe linéaire, le prix du litre d'essence étant de 3,80 F et le prix de la révision de 500 F :

$$P(x) = \frac{3{,}8x^2}{150} \text{ , donc } x = 140$$

c'est-à-dire que la révision doit intervenir à peu près au bout de 14 000 km, plutôt avant du fait de la convexité.

On remarque, d'après les calculs précédents, que, du point de vue de ce problème, la consommation ne doit pas être comptée en litres mais en francs, ce qui n'était pas évident *a priori* : qui donne la consommation d'essence de sa voiture en francs aux 100 kilomètres ?

En cas d'augmentation de l'essence, une étude plus fine est à faire car une révision ne fait pas baisser le prix de l'essence !

Il est également possible de prolonger ce problème de deux façons différentes :

- un point de vue statistique pour déterminer la courbe de consommation et les marges d'erreurs
- un point de vue de contrôle individuel de la consommation.

Ceci peut donner des activités intéressantes en classe.

Pour terminer, il faut bien noter que le modèle choisi dans le dernier exemple est très grossier, car la consommation dépend de l'utilisation de la voiture et également de phénomènes aléatoires. Malgré ceci, je pense qu'il est bon de montrer ce souci d'optimisation même si nous n'avons pas les moyens de suffisamment l'approfondir ; les résultats obtenus sont d'ailleurs déjà de bonnes indications.

Par cet article, j'espère avoir su montrer l'intérêt de ce genre de problèmes pour les élèves ainsi que la facilité avec laquelle on peut en imaginer. On peut également en trouver dans les ouvrages, tous trés élémentaires, suivants :

H. LEHNING — *L'analyse en première scientifique* — NATHAN 1982 (à paraître).

G. BESSIERE — *Le calcul intégral facile et attrayant* — DUNOD 1951.

J. QUINET — *Cours élémentaire de Mathématiques Supérieures, Tome 2 Fonctions usuelles* — DUNOD 1978.

F. AYRES — *Théorie et applications du calcul différentiel et intégral* — Série SCHAUM—MacGraw—Hill 1979.

N. PISKOUNOV — *Calcul différentiel et intégral, Tome 1* — Editions MIR 1980.

La date indiquée est celle de la dernière édition à ce jour ; tous les textes sont en français.