2

ECHANGES

Bâtir sur le sable (par la télématique)

par Geneviève LOPATA

I. Posons le problème

La mathématique ne s'apprend pas comme une théorie toute faite. Chacun doit la construire sur le sable mouvant de ses relations mentales patiemment acquises et renforcées par des observations et des expériences répétées.

Si les profs de math ne veulent pas mourir (avec les mathématiciens) dans le désert de l'incompréhension générale, il leur faut bâtir sur le sable mouvant des structures mentales de chacun de leurs élèves.

Bien sûr, il y a de temps en temps le "beau cours magistral" où l'on impose, ou croit imposer, sa propre interprétation. Le meneur de jeu ne peut alors retenir des interventions des élèves que celles qui s'intègrent au développement harmonieux sans le freiner. Et l'on espère que l'élégance de la présentation fera passer le message...

Mais ensuite qu'en reste-t-il ? Au mieux pour chaque élève le goût de l'effort tenace afin de vaincre les obstacles en construisant avec rigueur ses propres modèles mathématiques. Et le maître s'efforce, s'épuise plutôt, à suivre les cheminements individuels. Il tente vainement d'être omniprésent, encourage ici en notant les progrès, reprend les bases ailleurs, réconforte en cas d'échec, ménage l'initiative tout en imposant le langage, la culture commune.

Alors, pour faire mieux face à la diversité des esprits, comment ne pas rêver d'un ordinateur ?

II. La télématique est déjà là

Quand on ne peut tout faire à la fois, il faut faire des "conserves" — préparer à l'avance des dialogues adaptés à chaque type d'élèves. C'est ce que permettent l'écriture et la gestion informatiques.

Mais un ordinateur ne suffit pas à assurer la qualité du dialogue, ni surtout son adaptation à tous les apprenants : il faut pour cela enregistrer, analyser, exploiter utilement (avec l'aide de l'ordinateur) des centaines de comportements face à une même question. Il est indispensable d'organiser la discussion au sein d'équipes nombreuses d'enseignants (avec leurs élèves) — et pour cela de disposer d'un *réseau de diffusion* des documents pédagogiques.

L'ordinateur et le réseau (postal, en attendant pour bientôt le réseau téléphonique), c'est déjà la télématique que le Centre National de Télé-Enseignement de Vanves met (gratuitement) à la disposition des maîtres de l'Enseignement Public*, depuis octobre 1973, dans son service de

Bibliothèque de Q.C.M. — Q.C.M. : questions à choix multiple — où sont élaborés, corrigés et diffusés des devoirs à correction distribuée par ordinateur.

Pour l'exposé de l'actuelle méthode de rédaction par analyse et synthèse, voir n° 299 du Bulletin de l'A.P.M.E.P. page 326, mon article "Où la faim justifie les moyens", ainsi que, dans la brochure A.P.M.E.P. n° 20, sur les Apports de l'informatique, celui, page 242, qui s'intitule "L'ordinateur dès maintenant pour l'avenir de notre école".

Faisons le point au 1.05.81 :

69 000 devoirs corrigés (qui parviennent environ 15 jours après l'envoi des réponses) pour 113 sujets (dont 3/4 en mathématique) rédigés par 29 rédacteurs, utilisés par plus de 600 enseignants, et diffusés à 1650 collègues. Le développement n'est freiné que par le manque de moyens face à la demande : car si l'ordinateur "corrige" 1300 devoirs à l'heure (chaque devoir représentant de une à quatre heures de travail pour l'élève), nous faisons encore tout le reste de la manipulation à la main (en surcharge aux services usuels du C.N.T.E.). Cependant, dès 1985, le *téléphone à clavier et à écran* sera généralisé en France, et nous demandons à recevoir et traiter à l'ordinateur les réponses qui pourraient nous être téléphonées (à tarif modique de partout, en France ou à l'étranger).

Pour recevoir par téléphone les corrigés, il faudra des terminaux d'ordinateur (afin de stocker les corrigés et les éditer ensuite — ce qui réduira les délais en ligne). Cela doit être également bientôt possible, tout au moins dans les établissements scolaires — et vous pourrez ainsi recevoir dans un délai de quelques heures les corrigés des devoirs.

Mais avant de rêver de l'avenir, voyons sur un exemple ce que nous apporte le travail en commun : car l'outil télématique ne serait que le pire des moyens sans la volonté coopérative de centaines d'enseignants décidés à œuvrer tous ensemble pour le meilleur.

* Grâce à la générosité de l'actuel directeur du C.N.T.E. de Vanves (rattaché au C.N.E.C.), M. B. PAGNEY.

III. Un thème de recherche parmi d'autres : $\boxed{\text{l'équation}}$

J'aimerais vous parler ici, pour répondre à l'attente de nos correspondants, des divers domaines où la discussion a été particulièrement animée et dont le résumé ferait à lui seul tout un article : les trois méthodes d'exposition par parties, systèmes ou familles, à propos des espaces vectoriels ; ou encore les liens entre la logique mathématique et le français ; la combinatoire ; l'écriture symbolique (en algèbre, logique ou géométrie) ; ou enfin les diverses échelles en statistique. En fait, l'ordinateur est un merveilleux enregistreur qui permet aussi l'analyse statistique (complétée de remarques faites "in vivo"). Ce sont ainsi *des réponses d'élèves que nous apprenons le plus*.

Qu'est-ce qu'une équation pour nos élèves ?

Une équation, dans le meilleur des cas, c'est "quand il y a un x à trouver".N'oubliez pas que, hors du domaine mathématique, si l'on donne un nom à quelqu'un, c'est que l'on connaît cette personne. Pour combien "nommer x l'inconnue" est toujours resté contradictoire ? Ainsi, lorsque l'on arrive à $\boxed{x = \text{quelque chose de connu}}$ on est satisfait. D'où déception des élèves qui, ayant trouvé $0x = 0$ ou $0x = 2$, ne savent pas quoi faire de plus et sont vexés lorsque je ne les félicite pas (par l'intermédiaire de l'ordinateur) de ce "résultat partiel" puisqu'ils ont été incapables de fournir une indication valable sur la solution de l'équation. L'imprégnation trop forte concernant l'unicité de la racine ("x" est une dénomination unique) a besoin d'être combattue par une réflexion approfondie sur des exemples variés de l'équation $\boxed{a * x = b}$ (sans entrer dans la notion de paramètre, encore plus difficile que celle d'inconnue).

1er épisode : "Toi et Moi", équation aux pronoms, d'Yves Gentilhomme. (Questionnaire $\boxed{107}$ de notre Bibliothèque)

L'équation $\boxed{\text{Toi et } x = \text{Nous}}$, autrement dit "Avec quel(s) pronom(s) personnel(s) d'une liste donnée, le pronom "Toi" fournira-t-il, comme sujet de la proposition, le pronom "Nous" ? (Comme dans la phrase : "*Toi* et *moi, nous* irons au bout du monde")

Toi et moi = nous : moi est racine. Mais *Toi et lui, vous..., Toi et eux, vous..., Toi et nous, nous...* font découvrir une autre racine. La solution est $\{$*moi, nous*$\}$: deux racines pour une équation de la forme $a * x = b$. Personne n'est choqué... pas même les profs de math !

C'est simple, vivant, et par suite bien sûr plus complexe qu'il n'y paraît à première vue. Car lorsqu'après avoir éliminé des doublets (tel que "on", venant doubler nous"), Yves Gentilhomme pose la question ouverte : "Etudiez les propriétés de *l'opération "et"* sur les pronoms personnels", nous découvrons que *nous ne pouvons pas le faire* avec les outils classiques de nos cours de mathématique.

Regardons cela de plus près : la bonne humeur est de la partie !

Vous êtes libre de refuser "Moi et moi, nous..." ou de trouver peu courtois "Moi et toi, nous...". Ainsi *votre* table de Pythagore aura des cases vides, des *trous* — à moins que vous ne soyez trop formé (ou déformé) par la culture mathématique, et que vous ne vous efforciez de remplir toutes les cases (en opposition avec l'usage dit "de bon sens"). Quant aux élèves, ils auront chacun *leur* table de Pythagore, avec presque toujours des trous (et des confusions entre "lui" et "toi", "eux" et "vous"...). Or *savez-vous ce qu'est, par exemple, l'associativité pour une opération à trous ?*

2ᵉ épisode : "L'opération Toi et moi" (Questionnaire $\boxed{110}$).

Ce sujet, dont la première partie est celle de $\boxed{107}$, a pour but de nous faire progresser dans l'étude globale du problème des équations dans une structure opératoire. Combien de fois n'avez-vous pas relevé ce raisonnement sommaire :

"$(3+2)+5 = 3+(2+5)$, donc l'addition est associative" ?

L'élève raisonne par triplets et non pas au niveau de l'opération toute entière — et notamment sans tenir compte des ensembles concernés. L'associativité (usuelle) exige des quantifications universelles, une règle sans exception au sein d'une loi.

Yves Gentilhomme nous dit :

"Pour le linguiste, la mathologie est un outil, rien de plus ; un outil dont il ne peut se passer, certes. Cependant cet outil reste une sorte de riflard grossier qu'il utilise à défaut d'outil mieux adapté. Tout ce que ce riflard permet de faire, c'est de fabriquer des "modèles" — et un modèle n'est jamais l'original, qu'on se le dise bien, sinon on ne pourrait pas le distinguer de l'original".

Cependant, rien ne nous empêche d'affiner nos outils mathématiques et, pour prendre une autre comparaison, de ciseler un scalpel lorsque la hache s'avère trop "grossière". Ici nous avons voulu créer les outils de la description des couples et triplets d'éléments (n'oubliez pas qu'une opération est déjà une relation ternaire particulière). C'est alors que nous avons fait appel à la Commission du Dictionnaire A.P.M.E.P., et en particulier à J. Chevallier qui en est un dévoué, fidèle et scrupuleux animateur. Car nous voulons bâtir "en dur", même sur le sable. Merci à tous. C'est si simple maintenant que même des enfants (et surtout peut-être des enfants) peuvent le lire :

(a,b) est *composable* lorsque $a*b$ existe ;
(a,b,c) est *composable* lorsque $(a*b)*c$ ou $a*(b*c)$ existe ;
(a,b,c) est *associable* s'il est composable des deux côtés,
et si de plus $(a*b)*c = a*(b*c)$;

une opération est *associative* lorsque ses triplets composables sont tous associables.

"Composable" et "associable", c'est déjà presque du français — et l'associativité prend ainsi un sens plus général puisqu'il s'applique aux opérations-qui-ne-sont-pas-nécessairement-des-lois.

Nous ne faisons ici que développer les conséquences logiques de l'emploi du mot "opération" en tant qu'extension à "loi de composition" — voie tracée jadis par A. REVUZ à propos de "fonction" en tant qu'extension à "application".

Encore deux mots nouveaux : "capteur"(c) et "indifférent"(i) pour préparer "absorbant"(a) et "neutre"(e)

$$\boxed{c*x = x*c = c} \qquad \boxed{i*x = x*i = x}$$

Un élément (a) dit absorbant est un élément qui pour tout x avec lequel il est composable d'un côté, l'est aussi de l'autre avec $a*x = x*a = a$.

Un élément (e) dit neutre est un élément qui, pour tout x avec lequel il est composable d'un côté, l'est aussi de l'autre avec $e*x = x*e = x$.

Si mes élèves (de 1ère A et B) ont semblé faire bon accueil à ces notions, l'analyse des réponses à $\boxed{110}$ est mathématiquement rendue "floue" par la diversité des schémas de l'opération "et". J'avoue que, grâce à notre méthode de dialogue informatisé, cela ne me gêne guère, et je réponds à chacun suivant le modèle opératoire que je suppose être le sien. Et si l'élève se sent ainsi mieux engagé par son opération, tant mieux !

Cependant, en tant que mathématicien, peut-être partagez-vous le point de vue de J. Chevallier lorsqu'il nous écrit :

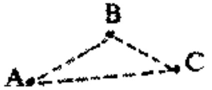
"Je comprends très bien le souci que peut avoir Gentilhomme de garder aux "règles" une certaine flexibilité — disons carrément un certain flou — sans lesquels notre style aurait à peu près le même agrément que celui d'une imprimante. Mais ne fermons pas les yeux sur l'opposition entre ce point de vue et le nôtre, également légitimes chacun dans sa sphère : elle n'interdit pas l'interdisciplinarité mais elle en fixe les modalités. Avec les règles d'une stricte logique, aucune difficulté ; et vous en donnez un exemple avec la composition des personnes grammaticales".

En effet, et c'est là justement le meilleur encouragement aux mathématiciens que puissent nous apporter les linguistes, Y. Gentilhomme nous invite à construire une *loi de composition* à partir de classes d'équivalence de pronoms : les personnes grammaticales 1 = {moi, nous}, 2 = {toi, vous}, 3 = {lui, elle, eux, elles}. Cela se lit en français : la première personne l'emporte sur la seconde qui l'emporte sur la troisième.

$*$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

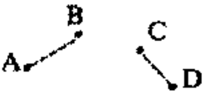
Addition des bipoints :

1[er] cas



$(A,B)+(B,C)=(A,C)$

2ème cas



(A,B) et (C,D) ne sont pas composables

Comment faire comprendre à des élèves qu'il y a là une démarche qu'ils ont déjà rencontrée ? Pour "légaliser" par exemple l'addition des bipoints $(A,B)+(B,C)=(A,C)$ et $\{(A,B),(C,D)\}$ non composable lorsque $B \neq C$, les mathématiciens ont inventé les vecteurs ou classes de bipoints pour lesquels les couples de vecteurs sont tous composables.

3ème épisode : "Opération, couples, triplets" $\boxed{\text{B41}}$ de E. ORAIN (groupe IREM-Paris Sud)

Tout d'abord, pour analyser avec plus de sûreté la compréhension des nouveaux concepts, il nous fallait donner aux élèves des *opérations à trous mathématiquement définies*. C'est chose faite, à partir des restrictions d'opérations usuelles à des ensembles de 3 nombres. Les trous apparaissent tout naturellement lorsque l'on sort du domaine de définition. Le sujet $\boxed{\text{I10}}$ demande un peu plus de maturité par suite de l'effort supplémentaire d'axiomatisation à partir de la langue française.

−	0	1	2
0	0	□	□
1	1	0	□
2	2	1	0

+	−1	0	1
−1	□	−1	0
0	−1	0	1
1	0	1	□

Nous avons cependant encore trop peu de réponses à $\boxed{\text{B41}}$ pour en rédiger un corrigé par ordinateur, et comptons sur nos correspondants (pourquoi pas vous, avec vos élèves ?) pour nous aider à le tester. Attention :

Nous testons les questionnaires,
et nous ne savons pas corriger sans élèves !

Cependant l'étude des propriétés des opérations à trous était loin d'être terminée à ce sujet ; et nous voulons, E. ORAIN et moi-même, expérimenter l'emploi de nos nouvelles armes à une nouvelle étude suggérée par les sciences humaines.

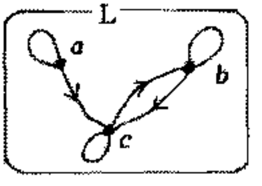
4ème épisode : "Opération de choix et relation de préférence" $\boxed{\text{B42}}$

Nous sommes parties d'un exercice de P. PARLEBAS pour l'étude psychologique des choix ou préférences. Exemple de test : un enfant à qui on présente deux images successivement représentant des héros de l'imaginaire enfantin. Il peut en garder une des deux. On recommence ensuite avec le même enfant pour d'autres couples d'images. Nous avons ajouté à ce protocole la possibilité de rejet des deux images — considérant alors qu'aucune image n'est choisie, et que le couple est non composable (il y a un "trou"). L'opération de choix ainsi construite est donnée "toute faite" aux élèves, alors qu'avec une séquence programmée nous pourrions faire travailler d'abord chaque élève sur la sienne. Ici les opérations ont été posées de manière arbitraire. De toute façon la versatilité est souvent légitime. On passe ensuite à la relation binaire associée (relation de préférence) :

$$a \prec b \Leftrightarrow (a * b = a) \vee (b * a = a)$$

*	a	b	c
a	a	□	a
b	□	b	b
c	a	c	c

De l'opération de choix à



la relation de préférence

Question ouverte :

Cherchez les relations logiques entre les propriétés de l'opération de choix et celles de la relation de préférence.

Ce sujet, s'il semble bien convenir pour la première grille au 1er cycle, ne paraît guère abordable pour la seconde grille avant la fin de la 3ème : il faut bien discerner les propriétés des opérations de celles des relations binaires, et les démonstrations sur l'associativité sont assez longues (27 triplets !).

Quant à la question ouverte des relations logiques entre toutes ces propriétés, nous la destinons aux sections "scientifiques". Pour guider la recherche, nous pourrons établir une troisième partie à grille — si l'accueil fait aux deux questionnaires $\boxed{\text{B41}}$ et $\boxed{\text{B42}}$ nous encourage à persévérer dans ce sens. Il faut faire attention à tenir compte dans les négations de la possibilité d'avoir un couple non composable. Car si

$$a*b = a \Rightarrow a \prec b \text{ et } \boxed{a \prec b \Leftrightarrow a*b = a \vee b*a = a}\ ,$$

on a :

$$\boxed{\neg(a \prec b) \Rightarrow a*b = b \vee (a,b) \text{ non composable } \vee\ b*a = b \vee (b,a) \text{ non composable}}$$

Notons en abrégé les propriétés suivantes :

de l'opération de choix

L : être une loi
M : commutativité
S : associativité
N : avoir au moins un élément neutre
NU : avoir un seul élément neutre
B : avoir un élément absorbant
BU : avoir un élément absorbant unique

de la relation de préférence

R : réflexivité
A : antisymétrie
T : transitivité
O : être "totale" (deux éléments *a* et *b* distincts étant toujours reliés au moins par un couple, (a,b) ou (b,a))

Voici quelques théorèmes que l'on peut alors démontrer :

I $\boxed{\left\{\begin{array}{l}R\\O\\M\end{array}\right. \Rightarrow L}$ $\boxed{\left\{\begin{array}{l}R\\A\\T\\M\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}N\\B\end{array}\right.}$ $\boxed{\left\{\begin{array}{l}R\\A\\T\\O\\M\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}NU\\BU\end{array}\right.}$

II $\boxed{L \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}R\\O\end{array}\right.}$ $\boxed{M \Rightarrow A}$ $\boxed{S \Rightarrow T}$ $\boxed{\left\{\begin{array}{l}L\\T\end{array}\right. \Rightarrow S}$

(Voir quelques indications à la fin).

Il serait trop long de rédiger ici les démonstrations : il apparaît nettement que les difficultés disparaissent dès que l'on a une loi. Or justement le problème pédagogique qui s'ouvre à nous est de savoir si nous devons rejeter les "monstres à trous", ou au contraire les manipuler — pour montrer la simplicité des lois.

Par exemple, avec les opérations-qui-ne-sont-pas-nécessairement-des-lois, l'unicité de l'élément neutre ne coule pas de source (pensez qu'un élément isolé, qui n'est composable avec aucun autre, est neutre ; ou encore qu'il suffit à un élément d'être indifférent avec une partie des éléments et non composable avec les autres, pour être neutre).

Or ce n'est pas par hasard que les sciences humaines, et plus généralement les sciences "naturelles" ou d'observation, fournissent des exemples d'opérations à trous. Et les psychologues ne cherchent pas à forcer le choix quand celui-ci est indéterminé. C'est peut-être le caractère autoritaire et simpliste de nos modèles mathématiques qui décourage une grande partie de nos élèves.

La Grande Réforme du milieu du siècle a permis de tout clarifier en ne gardant que quelques structures simples : c'est justement en poursuivant dans cette voie que nous pouvons ré-introduire plus de complexité, plus de souplesse — et non pas en renonçant aux acquis de ces dernières années (comme beaucoup semblent le souhaiter). Et cela d'autant plus que les mathématiques actuelles sont celles de la technique actuelle — et notamment de l'informatique qui est en train de modifier en profondeur nos conditions mêmes d'enseignement.

IV. Progrès à court et à long terme

La micro-informatique, c'est l'ordinateur pour tous... même pour les enseignants et pour leurs élèves. C'est la commercialisation de cours "qui se font tout seuls". De là à dire que l'école ne sert plus à rien... le pas risque fort d'être franchi. D'autant plus qu'il faut se méfier des productions hâtives faites loin des élèves.

> ***Il faut plus de temps et d'expérience de professeur pour enseigner avec l'informatique que sans.***

Il en faut beaucoup pour élaborer les didacticiels, mais aussi simplement pour *en prendre connaissance, les évaluer* et *les conseiller à bon escient* à un élève qui en tirera profit. Rien n'est plus dangereux qu'un cours mal adapté qui décourage ou conduit à une vue superficielle. Il serait aussi inconséquent d'envisager un "libre service" des documents d'enseignement que des médicaments. C'est sous *la responsabilité des équipes enseignantes*, attentives aux progrès, aux difficultés de chaque apprenant qu'une Bibliothèque comme la nôtre (actuelle et future) prend tout son efficience.

Quant à l'élaboration des didacticiels eux-mêmes, c'est un travail de Pénélope : plusieurs centaines d'heures pour chacun de nos sujets actuels en Q.C.M. — mais heureusement le travail est fait en équipe car sinon nous n'arriverions jamais à aboutir.

Pour les séquences programmées en temps réel (c'est-à-dire pendant le travail des élèves), nous nous efforcerons également de fournir aux enseignants un encadrement technique (avec informaticiens, spécialistes de la présentation pour la mise en page, puis plus tard pour la maîtrise des techniques audiovisuelles) et des moyens de diffusion.

> ***Car nous voulons enseigner mieux avec l'informatique que sans***

Paradoxalement, nos Q.C.M. n'enferment pas l'élève étroitement dans un labyrinthe (comme c'est souvent le cas dans l'enseignement programmé strict). Mais nous lui fournissons un environnement riche en matériaux pour y construire ses décisions. Dans nos séquences programmées en cours d'élaboration (malgré le manque actuel de moyens) sur "L'Algèbre de Bols" (combinatoire, à l'IREM-Paris Sud) ou "La

Concordance des Temps en Français", nous nous efforçons d'être fidèles à quelques principes simples :

— *laisser l'élève organiser sa recherche* dans un environnement riche de procédures et de données ;
— *enregistrer ses comportements* pour ouvrir le dialogue avec lui de manière efficace et personnalisée, construire avec lui sur le sable mouvant de ses structures mentales actuelles ;
— *organiser la concertation et la discussion* d'équipes enseignantes nombreuses pour l'élaboration, la discussion des comportements d'élèves, l'amélioration des didacticiels (sur les principes du volontariat, de l'anonymat pour les utilisateurs et de la responsabilité des auteurs) ;
— *éviter tout blocage de l'élève* au cours du déroulement des programmes (dans la perspective du travail de nos élèves isolés du C.N.T.E.).

Nous voudrions ainsi que notre Bibliothèque de Q.C.M. devienne de mieux en mieux *une structure de travail pour les enseignants du secteur public* où nous pourrions développer la production de didacticiels de toutes sortes et toutes disciplines, les discuter, les diffuser par réseau de télématique multi-média avec l'aide de spécialistes des techniques informatiques et audio-visuelles — et de quelques enseignants pour la coordination et la maintenance pédagogique. C'est un véritable Centre National d'Informatique Pour L'Enseignement (un CNIPLE, au C.N.T.E.) dont nous avons besoin pour conquérir et mettre en œuvre auprès de nos élèves avec efficacité ce nouveau domaine d'expression et d'action pédagogiques par la télématique — sous notre responsabilité d'éducateurs (que nos élèves soient ou non dans l'enseignement "oral", ou isolés c'est-à-dire dans l'incapacité de fréquenter un établissement scolaire).

En échange du service élargi de notre Bibliothèque à tous les maîtres, sur terminal d'ordinateur dans les établissements publics scolaires (car un réseau avec plusieurs centaines de milliers de terminaux n'est pas directement concevable), nous demanderions aux écoles équipées de fournir à nos élèves isolés *les listages de leurs corrigés* de devoirs (après vérification de l'envoi de leurs réponses).

Ainsi un véritable travail en commun de toute notre profession pourrait s'instaurer dans l'intérêt de tous nos élèves. Il nous faut donc être assez nombreux et persuasifs pour demander et obtenir cette structure coopérative : pour bâtir tous ensemble une culture adaptée à chacun de nos élèves au sein d'un

CNIPLE au C.N.T.E.	*

* Un CNIPLE parmi d'autres organismes de recherche, de discussion et de diffusion, au sein du secteur public.

Des décharges pour travaux importants de rédaction devraient être obtenues pour accélérer les réalisations, dans le cadre des IREM par exemple.

En attendant, si ce n'est déjà fait, inscrivez-vous à notre service de documentation de la Bibliothèque de Q.C.M. du C.N.T.E. afin de recevoir puis utiliser, si vous le désirez, nos sujets de devoirs en fonctionnement (demandez spécialement $\boxed{\text{B41}}$ et $\boxed{\text{B42}}$ cités ici et qui ne "tournent" pas encore) — et mieux encore en établir d'autres avec nous.

Apprenez à enseigner et à rédiger avec nous par ordinateur.

C'est urgent pour l'avenir même de notre Ecole...

A bientôt, j'espère.

**INSCRIPTION OU RÉINSCRIPTION
AU SERVICE DE DOCUMENTATION
DE LA BIBLIOTHÈQUE DE Q.C.M.
(année 19.. - 19..)**

A adresser à Mlle G. LOPATA
salle 404, C.N.T.E.
60, boulevard du Lycée
92171 VANVES

Date :

Spécialité :

M. Mme Mlle ....

Prénom : ....

Etablissement (avec adresse) : ....

....

....

....

Adresse personnelle (facultative) : ....

....

Classes assurées : ....

ANNEXE

Résumé des démonstrations

I $\boxed{\left|\begin{matrix}R\\ O\\ M\end{matrix}\right. \Rightarrow L}$

Pour une relation binaire totale, deux éléments, a et b, distincts sont reliés au moins dans un sens : la commutativité assure alors que $a*b$ vaut $b*a$ car ces composés sont égaux (par symétrie). Ainsi aucune case du tableau de Pythagore, hors la diagonale, ne peut être vide. La réflexivité assure que celles de la diagonale ne le sont pas non plus $(x*x=x)$.

II $\boxed{\left|\begin{matrix}R\\ A\\ T\\ M\end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix}N\\ B\end{matrix}\right.}$

R,A,T assurent une relation d'ordre. Les éléments minimaux seront capteurs de tous ceux auxquels ils sont reliés — et ceci des deux côtés par suite de la commutativité : ils seront absorbants (B). Les éléments maximaux seront neutres (N).

III $\boxed{\left|\begin{matrix}R\\ A\\ T\\ O\\ M\end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix}NU\\ BU\end{matrix}\right.}$

L'unicité des éléments absorbant ou neutre est liée à l'unicité des éléments minimum ou maximum dans une relation d'ordre total.

IV $\boxed{L \Rightarrow \left\{\begin{matrix}R\\ O\end{matrix}\right.}$

Une loi de "choix" n'a sur la diagonale que des composés de la forme $x*x = x$, ce qui entraîne la réflexibilité. De plus, l'absence de "trous" impose qu'aucun élément ne soit isolé dans la relation binaire.

V $\boxed{M \Rightarrow A}$

La commutativité impose que deux éléments distincts soient reliés dans un sens au plus (même démonstration qu'en I).

VI $\boxed{S \Rightarrow T}$

Ou encore $\neg T \Rightarrow \neg S$

$a \prec b \wedge b \prec c \wedge \neg(a \prec c)$: *montrons* $\neg S$

$$\begin{array}{r|l} (a*b)*c & a*(b*c) \\ (a, c) & a*b \\ a*c \text{ ne vaut pas } a \text{ (si} & a \\ \text{ce composé a un} & \\ \text{sens)} & \end{array}$$

VII $\boxed{\left\{\begin{matrix}L\\ T\end{matrix}\right. \Rightarrow S}$

$a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \prec c$

$$\begin{array}{r|l} (a*b)*c & a*(b*c) \\ a*c & a*b \\ a & a \end{array}$$
$$a=a$$

Remarque : La commutativité joue un *rôle essentiel* pour assurer que si $a*b = c$, alors $b*a$ a un sens (et vaut c).