Analyse non standard

(Essai de vulgarisation)

par Georges REEB, IRMA, Strasbourg

"... Aussi s'il arrive que dans quelque combat, tu me vois coupé par le milieu du corps, comme il nous arrive souvent, tu n'as qu'à ramasser la moitié qui sera tombée et la joindre à l'autre avant que le sang se refroidisse, ayant toujours soin de les ajuster exactement ; après cela, donne-moi seulement à boire deux gorgées de ce baume et tu me verras aussi sain qu'auparavant".

Don Quichotte, chap. 7

"Si, comme il arrive maintes et maintes fois, des doutes viennent à s'élever, ... le redressement se fait invariablement...".

N. Bourbaki
Eléments de Mathématique,
1[re] partie, livre 1, chap. 1, introduction

Les techniques et conceptions de l'analyse non standard apparaissent en 1980 comme couvrant un terrain immense. Une bibliographie quelque peu exhaustive comporterait à ce jour mille titres. Les ouvrages didactiques et traités se comptent par dizaines. Une étude épistémologique du sujet ferait remonter vers les années 1950, au moins, les premières tentatives, réussies, d'une méthode très proche de ce que nous appelons aujourd'hui "analyse non standard". Non seulement divers chapitres des mathématiques sont affectés ou concernés, mais l'aspect interdisciplinaire s'affirme. Les expérimentations didactiques les plus diverses s'accumulent. Aussi en résulte-t-il une impression "rétro" lorsqu'il s'agit de parler, aujourd'hui, en termes généraux, d'analyse non standard, même dans un bulletin de liaison entre enseignants de mathématique.

Cependant, force est de reconnaître que, dans notre pays, l'information sur ce sujet circule fort mal, et l'analyse des entraves et causes s'avèrerait intéressante : mais qui tentera cette analyse?

Disons-le tout de go : à notre sens, les influences directes de l'analyse non standard sur l'enseignement secondaire et de premier cycle des Universités seront minimes (et il est bon qu'il en soit ainsi). Par contre, non seulement l'information des maîtres se renouvellera, mais notre manière de parler aux élèves évoluera. Je me contenterai d'un exemple : alors que dans un passé récent il était raisonnable d'affirmer : "La méthode ϵ,δ de

Weierstrass est *la* méthode qui permet de fonder l'analyse classique", il est clair que dorénavant on se montrera plus circonspect, on remplacera l'article défini *la* par le prudent article indéfini *une*. N'y aurait-il que cette seule implication sur notre enseignement, elle n'en serait pas moins très importante.

Un obstacle à la diffusion de l'analyse non standard est une confusion, facilement explicable, entre contenant (comment fonder la théorie) et contenu (la théorie elle-même). Or le *contenu* de l'analyse non standard est fort simple et très bien intégré à la mathématique classique [Ainsi les entiers standard de la mathématique non standard sont quelques rares objets de l'ensemble N des entiers positifs de la mathématique classique. Donc, contrairement à une légende, il ne s'agit pas du tout de compléter N, par l'adjonction d'objets nouveaux, en un ensemble plus large N*; mais il s'agit de reconnaître que seulement quelques objets privilégiés de N, en particulier 0,1,2,3,4 etc., méritent le label standard. L'économie d'un tel système saute aux yeux : toutes nos connaissances antérieures sur N restent inchangées ; mais nos discours peuvent être enrichis par l'utilisation de l'adjectif "standard". C'est un peu le cas de la télévision en noir et blanc, ultérieurement enrichie par la couleur]. Revenons après cette digression au *contenu*: il est difficile de parler de contenu sans avoir un *contenant*. Malheureusement dans notre affaire le contenant varie d'un lecteur à l'autre : un tel préférera "Bourbaki", tel autre un exposé formel moins ambitieux que "Bourbaki" ; un tiers ne jurera que par "Brouwer", et j'en passe ... Chacun de ces *contenants* est utilisable ; force est donc de choisir. J'opte ici pour "Bourbaki", tout en essayant de m'y référer le moins souvent possible.

1. Entiers et entiers naïfs

Notre lecteur accepte donc de parler de l'ensemble N des entiers naturels selon les enseignements de Bourbaki. Nous demandons maintenant à notre lecteur d'affecter certains éléments de N du label "naïf" conformément à l'instruction (ou démarche) suivante:

I : a) l'entier 0 est décrété naïf
    b) si $n \in N$ a été décrété naïf, alors $n+1$ sera décrété naïf.

De plus, ne sont réputés naïfs que les entiers nantis de ce titre en vertu de a) ou b).

Il est permis de raisonner en utilisant le principe de récurrence*.

* Il s'agit d'un principe évident en vertu de a) et b). Ce principe ne doit pas être confondu avec le théorème d'induction démontré dans le traité de "Bourbaki".

Les propriétés suivantes sont alors évidentes (en vertu de ce principe de récurrence)

i) $0,1,2,3,4,5,6,\ldots 10^6,\ldots,10^{10^{10}},\ldots$ sont naïfs.
ii) La somme, le produit de deux entiers naïfs sont naïfs.
iii) Si $n \in \mathbf{N}$ est naïf, alors $m < n$ entraîne : m est naïf.
iv) Si n est naïf, alors il existe un nombre entier n' naïf et premier tel que $n' > n$.
v) Si $\omega \in \mathbf{N}$ n'est pas naïf et si $n \in \mathbf{N}$ est naïf, alors $\omega > n$.
vi) Si $\omega \in \mathbf{N}$ n'est pas naïf, alors il existe ω' premier tel que $\omega' > \omega$ (cet ω' ne sera pas naïf).

Le lecteur continuera facilement cette liste de propriétés et ne manifestera probablement pas de désaccord quant à l'évidence de ces propriétés. Il aura d'autant moins de doutes qu'il aura l'impression d'un piège : "entier et entier naïf, c'est peut-être bien blanc bonnet et bonnet blanc". Dans cette perspective, v) et vi) sont ressenties comme des affirmations concernant des objets ω qui n'existent pas, donc vraies mais sans intérêt.

C'est là que se produit, à notre sens, l'incident fondamental qui est la base de la mathématique non standard.

Nul n'a montré, ou même apporté quelque plausibilité à la thèse "Tout élément de **N** *est naïf".*

Le lecteur sceptique pourra toujours essayer d'établir la thèse*, ses efforts l'amèneront probablement à constater fort à propos que notre prétendue thèse entre guillemets est un énoncé ambigu et irrecevable.

Par contre, la thèse suivante est parfaitement acceptable dans sa formulation :

T : ω désigne un élément (fixe) de $\mathbf{N}$, non naïf.

En fait, la thèse T est connue (peut-être sous un déguisement ou un autre) depuis les travaux de Brouwer, Löwenheim, Gödel et Skolem. Le fait que la thèse T ne peut pas conduire à une contradiction est de surcroît une évidence**.

* Ce lecteur s'interrogera sur les "moyens" dont il pourrait disposer pour entreprendre sa "preuve". L'absence de ces moyens jette précisément le doute sur la thèse.

** En effet, un texte (utilisant le mot "naïf") qui conduirait à une contradiction permet de concevoir un texte classique (sans occurrence du mot "naïf") qui conduirait à une contradiction. En effet, la locution "ω non naïf" remplace un nombre fini (au sens naïf) de phrases du type : $\omega > 0$, $\omega > 1, \ldots, \omega > n$.

Mieux : un texte utilisant ω peut toujours être remplacé par un texte classique équivalent (mais peut-être très long). C'est la propriété dite de conservation.

Pour sûr, la thèse ne tient que ce qu'elle promet : l'existence d'entiers non naïfs. Nous ne disposons pas de méthode générale pour décider que tel ou tel entier défini mathématiquement est naïf. Autrement dit, il nous est impossible d'exhiber un entier non naïf. Mais cela ne nous empêche pas d'utiliser T pour notre plus grand profit.

Notons tout de suite des conséquences de T :

1) ω, $\omega+1$, ω^2, ω^ω, $\omega-1$, $\omega-2$, $\omega!$, le plus grand entier premier p_ω vérifiant $p_\omega \leqslant \omega$, sont non naïfs.

2) Il existe (au moins) un ensemble fini F tel que n naïf entraîne $n \in F$. [L'intervalle $[0,\omega] \subset N$ peut jouer le rôle de F].

3) a naïf et α non naïf entraîne $a^\alpha > \alpha^a$, du moins si $a \geqslant 2$.

4) Il n'y a pas de sous-ensemble A de N tel que "$a \in A$" soit équivalent à "a est naïf". [Un tel ensemble A vérifierait : $0 \in A$, $a \in A \Rightarrow a+1 \in A$; d'où résulterait $A = N$. C'est là le piège signalé plus haut].

5) Si $A \subset N$ est tel que "a non naïf entraîne $a \in A$" , alors il existe $n \in A$ naïf [C'est une conséquence immédiate de 4)]. Il en résulte que F mentionné en 2) contient des entiers non naïfs.

Ces propriétés semblent bizarres ou gênantes ; le lecteur qui les manipule quelque temps les trouvera vite naturelles ; il ressentira au contraire comme bizarre, gênante, la confusion ancestrale entre entier et entier naïf.

Ces remarques nous conduisent à une méditation : si entier et entier naïf sont des concepts équivalents, que penser du labeur dépensé par le mathématicien formaliste pour établir le principe de récurrence dans N, alors que ce principe de récurrence sur les naïfs est une *évidence* ?

2. Infiniment grands. Probabilités élémentaires

Dans ce paragraphe, nous resterons dans le cadre des entiers naturels (l'utilisation de fractions de la forme $\frac{1}{2^p}$, $\frac{9}{2^p}$ n'est pas une entorse à cette attitude ; on pourrait tout exprimer en nombres entiers).

Les résultats de 1 montrent que les entiers non naïfs méritent d'être appelés "infiniment grands" et que les règles de calcul sur ces infiniment grands sont simples et conformes à nos désirs. Que ces infiniment grands jouissent de toutes les propriétés des entiers (qu'ils sont) est un avantage. Ainsi ω peut être décomposé, de façon unique, en produit de facteurs premiers, etc.

Le calcul élémentaire des probabilités (c.e.p.) fait apparaître l'utilité des entiers infiniment grands. En effet, lorsqu'en c.e.p. on expose les schémas d'urnes, on est ennuyé par la circonstance suivante : alors qu'il est facile de donner, pour n fixé, un espace probabilisé Ω (en fait $\Omega = \{0,1\}^n$) servant de support à n variables indépendantes $X_1,\ldots,X_n$ dichotomiques et de même loi, l'indication d'un Ω unique convenant pour toute valeur de l'entier n nous fait sortir du cadre du c.e.p. Par contre, l'ensemble $\Omega_\omega = \{0,1\}^\omega$, convenablement probabilisé, peut servir, pour tout n naïf, de support à la suite $X_1,\ldots,X_n$.

La loi faible des grands nombres pour le jeu de pile ou face pourra alors être énoncée ainsi :

> Supposons, avec les notations habituelles, $\alpha \leqslant \omega$ et α non naïf ; posons
>
> $$Y = \frac{1}{\alpha}(X_1 + \ldots + X_\alpha).$$
>
> Dans ces conditions, pour n naïf : prob. $\left(\left|Y - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{n}\right)$ est infiniment proche de 1 (Pour le mot "infiniment petit", se reporter au paragraphe 3).

Le fait que notre énoncé est équivalent à l'énoncé classique est évident en raison des propriétés exposées au paragraphe 1. La démonstration de l'énoncé est simple et proche des démonstrations classiques.

Concluons en signalant que le cadre du c.e.p. ainsi conçu (où il n'est donc question que de probabilités finies) permet d'atteindre des notions très élaborées du calcul des probabilités, en particulier les lois fortes des grands nombres.

3. Infiniment petits. Analyse

Le fait d'avoir distingué dans $\mathbf{N}$ des entiers infiniment grands permet de distinguer dans $\mathbf{R}$ (où $\mathbf{R}$ est la droite numérique de "Bourbaki" et où $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$) des réels infiniment grands ($a \in \mathbf{R}$ sera dit infiniment grand si $a > \alpha$ où $\alpha \in \mathbf{N}$ non naïf) et infiniment petits* (0 et les inverses des infiniment grands). Un nombre réel, non infiniment grand, sera dit *limité* ou *fini*.

Ces objets vérifient les règles de calcul que l'on peut espérer. Voici, sans ordre ni systématique, quelques propriétés :

> $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ désignent des infiniment petits > 0 et $\omega \in \mathbf{N}$ un infiniment grand.

---

* Abel a formulé ainsi la notion d'infiniment petit ζ : "ζ est plus petit que toute quantité positive que l'on peut assigner".

i) $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \simeq 1$ ($a \simeq b$ signifie $a-b$ est infiniment petit).

ii) $\left(1+\frac{x}{\omega}\right)^{\omega} \simeq e^x$ pour x fini (i.e. x non infiniment grand).

[On peut s'en convaincre en étudiant par exemple la fonction

$$\left(1+\frac{x}{\omega}\right)^{\omega} e^{-x} = \varphi(x) .$$

Cette fonction a pour dérivée : $\frac{x}{\omega} e^{-x} = \varphi'(x)$. Donc, pour x fini $\varphi'(x) \simeq 0$. Il résulte de iii) ci-dessous que $\varphi(x) \simeq \varphi(0)$, d'où l'assertion].

iii) Soit une fonction continue f vérifiant, sur l'intervalle $[a,b]$, a et b limités, la condition $f(x)$ est infiniment petit pour $x \in [a,b]$.

Alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est infiniment petit [On le démontre en observant par exemple que cette intégrale I est majorée par $(b-a)\frac{1}{n}$ où n est un entier naïf quelconque].

iv) Le théorème classique d'approximation de Weierstrass entraîne que pour toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ il existe un polynome $\mathrm{P}(x)$ tel que $f(x)-\mathrm{P}(x) \simeq 0$ pour tout x fini.

v) Au lieu d'utiliser le théorème de Weierstrass comme nous venons de le faire en iv), nous pouvons par contre essayer de le démontrer. Voici un jalon important de la démonstration indiquée jadis par Bernstein :

Considérons la fonction $\varphi_\omega(x)$ définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ par :

$$\varphi_\omega(x) = \sum_{p=\left[\frac{\omega}{2}\right]}^{\omega} C_\omega^p x^p (1-x)^{\omega-p} \left(\frac{p}{\omega} - \frac{1}{2}\right)$$

où ω est infiniment grand et où $\left[\frac{\omega}{2}\right]$ est la partie entière de $\frac{\omega}{2}$. Cette fonction vérifie

$$\varphi_\omega(x) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Cette formule résulte immédiatement de certaines majorations associées aux lois de probabilités binomiales.

vi) Soit $P(x)$ un polynome naïf de la variable x (i.e. le degré de $P(x)$ est naïf et les coefficients de P sont finis). Alors l'expression

$$I = \frac{1}{\omega} \sum_{p=0}^{\omega} P\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

où ω est infiniment grand vérifie la relation :

$$I \simeq \int_0^1 P(x)dx$$

vii) Soit $P(x)$ un polynome naïf, comme en vi). Alors, pour x fini et α infiniment petit, on a :

$$P(x+\alpha) - P(x) \simeq 0$$

$$\frac{P(x+\alpha)-P(x)}{\alpha} \simeq P'(x)$$

La démonstration résulte d'un simple calcul.

viii) Considérons une équation différentielle $y' = y\varphi(x,y)$ où φ est une fonction continûment différentiable, prenant des valeurs finies pour (x,y) finis. On reconnaît que $g=0$ est une solution de cette équation. Dans ces conditions, la solution $g(x)$ de l'équation qui satisfait à la condition initiale $g(0)=\epsilon$, ϵ infiniment petit, vérifie, pour x fini, $g(x) \simeq 0$. Ce résultat exprime une dépendance continue de la solution des conditions initiales. La démonstration peut être celle-ci : faisons dans le plan x, $y(y>0)$, la transformation $x=x$, $y=\epsilon Y^{\frac{1}{2}}$. L'équation est transformée en :

$$Y' = 2Y\,\varphi\left(x, \epsilon Y^{\frac{1}{2}}\right)$$

Le second membre pour x, Y finis est infiniment petit. Il en résulte que la solution ψ vérifiant la condition initiale $\psi(0)=1$ vérifie $\psi(x) \simeq 1$.

ix) *Exercice* : Pour $\epsilon>0$ donné, trouver $\eta>0$ tel que $|x|<\eta$ entraîne $|2x+x^2|<\epsilon$. Il suffit de tenir le contrat dans le cas particulier où ϵ est infiniment petit. Posons $\eta=\epsilon^2$; alors $|x|<\eta$ implique $|2x+x^2|<2\epsilon^2+\epsilon^4=\epsilon(2\epsilon+\epsilon^3)<\epsilon$. C.Q.F.D. Le succès de l'opération tient en ceci : l'hypothèse "ϵ infiniment petit" est universelle au sens qu'elle ne fait intervenir aucune constante particulière au problème traité [Dans les calculs usuels, on dira par exemple "si $\epsilon<\frac{1}{8}$, alors $2\epsilon^2+\epsilon^4$ ..."].

Exercice : Soit $\epsilon \neq 0$ un infiniment petit ; alors $\frac{1}{\epsilon} \times \frac{1}{1+\epsilon}$ et $\frac{1}{\epsilon}(1-\epsilon)$ sont infiniment grands et infiniment proches.

Pour établir que les deux quantités sont infiniment proches, on constate que leur différence est : $\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$.

x) *Fonctions (s) de DIRAC.* Les discours usuels sur la fonction de Dirac introduisent la fonction :

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp -\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0 ,$$

σ très petit. Ceci suggère l'étude des fonctions $\varphi_\sigma(x)$ pour $\sigma > 0$ infiniment petit. Parmi les nombreuses propriétés de φ_σ retenons celle-ci qui traduit bien l'un des souhaits faits sur la fonction de Dirac :

Propriété : Soit $[a,b] = \mathrm{I}$ un intervalle de $\mathbf{R}$, où a,b sont des rationnels naïfs, non nuls ; alors

$$\int_{\mathrm{I}} \varphi_\sigma(x)\mathrm{d}x \simeq \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in \mathrm{I} \\ 0 & \text{si } 0 \notin \mathrm{I} \end{cases}$$

L'étude d'équations différentielles telles que $y' + y = \varphi_\sigma(x)$, ou $y'' + y = \varphi_\sigma(x)$, est tout à fait intéressante.

Variante : La fonction analytique définie par

$$y = x \exp(-\mathrm{e}^{-\omega x}) = \mathrm{K}_\omega(x)$$

est souvent proposée, avec ses dérivées première et seconde, comme bonne approximation (pour $\omega > 0$ grand) de la fonction

$$\mathrm{K}(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } x \leqslant 0 \end{cases},$$

de l'échelon unité et de la fonction de Dirac. Posant ω infiniment grand, l'étude est plaisante.

xi) Etude de la fonction $x \mapsto y = \sin \omega x$, $\omega > 0$ et ω infiniment grand.

Les propriétés suivantes apparaissent :

1) Le graphe de la fonction dans le plan O_{xy} aura l'aspect suivant (on convient dans un "croquis" de ne pas distinguer deux points de coordonnées infiniment proches) : il "remplit" la bande : $|y| \leqslant 1$.

2) Pour un intervalle I, on a $\int_{\mathrm{I}} \sin \omega x \,\mathrm{d}x \simeq 0$.

4. Lunettes ou loupes, et "par le grand bout de la lorgnette"

Adoptons fermement le point de vue qui vient faire ses preuves: "Dans un croquis plan, on ne distingue pas des points infiniment proches (autrement dit on agit comme si le pouvoir séparateur de l'œil s'arrêtait exactement à l'infiniment petit)". Il est dès lors intéressant d'observer les graphes de certaines fonctions (ou d'autres objets) agrandis ou rapetissés.

Définition. On appelle *loupe ou lunette de puissance* ω ($\omega > 0$ infiniment grand) appliquée au plan O_{xy} l'application linéaire (en fait homothétie) du plan O_{xy} sur O_{XY} définie par les formules

$$\begin{cases} \omega x = X \\ \omega y = Y \end{cases}$$

Plus généralement, la transformation d'équations

$$\omega(x-\epsilon) = X, \quad \omega(y-\eta) = Y$$

est appelée *loupe centrée en* (ϵ, η).

Il est intéressant d'observer qu'une loupe, centrée à l'origine, envoie tous les points finis, autres que l'origine, et certains points infiniment proches de l'origine, hors du champ de vision (X, Y finis).

Exemple 1. Appliquons la loupe de puissance ω au graphe de la fonction $y = \varphi(x)$ en centrant au point $(x_0, y_0) = \varphi(x_0)$, x_0 fini. Etudions le cas où $\varphi(x) = e^x$.

A la loupe, nous verrons le graphe de la fonction définie par:

$$\omega Y = e^{x_0}(e^{\omega X} - 1),$$

ou encore par un développement de Taylor:

$$Y = e^{x_0} X(1 + \theta(X)) \text{ où } \theta(X) \approx 0 \text{ pour tout } X \text{ fini.}$$

Autrement dit, pour X fini, la loupe nous montre un graphe indiscernable de la droite d'équation $Y = e^{x_0} X$; cette droite est évidemment la tangente au graphe étudié.

Exemple 2. La fonction définie par $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ sert souvent à illustrer la possibilité d'une discontinuité pour la dérivée d'une fonction. La loupe centrée en $\left(x = \frac{1}{2\pi n}, y = 0\right)$, où n est un entier infiniment grand, nous fait voir le graphe de la fonction:

$$Y = \frac{1}{\omega}\left(X + \frac{\omega}{2\pi n}\right)^2 \sin \frac{\omega}{X + \frac{\omega}{2\pi n}}$$

Posons $\omega = (2\pi n)^2$.

Alors la loupe nous fait voir la courbe (et non une droite) d'équation $Y = -\sin X$. C'est un signal qui nous avertit d'une discontinuité de la dérivée.

5. Equations différentielles

Les champs d'application de l'analyse non standard, même dans le cadre étroit de notre excursion, sont nombreux ; il ne fait guère de doute que l'analyse non standard fournira aux autres sciences un vocabulaire et des modèles inédits.

La lecture des ouvrages consacrés à l'analyse non standard montre la richesse de la moisson possible, aussi bien en :

calcul des probabilités, où, par exemple, un ensemble probabilisé fini (donc facile à manier) permet de faire vivre bien des notions dont on pouvait penser qu'elles demandaient nécessairement la théorie élaborée usuelle ;

mécanique des fluides où les phénomènes tels que la turbulence ou la couche limite peuvent être un peu plus facilement décrits par le nouveau langage ;

cosmologie où interviennent des échelles ayant une hiérarchie complexe, mais chaque échelle étant justiciable d'une géométrie qui lui est adaptée.

En attendant de tels développements, des thèmes mathématiques plus modestes ont été fouillés. Parmi ces thèmes, celui des équations différentielles odinaires semble prometteur ; nous voudrions, dans le cadre de cette excursion, en convaincre le lecteur.

Premier exemple: $y' = y + \sin \omega y$, ω infiniment grand. L'équation proposée est intégrable par quadrature ; son étude classique ne se heurte donc pas à des difficultés particulières.

Notons cependant que la formulation du problème : "Etudier les croquis des intégrales de cette équation, pour x, y finis" demanderait une formulation quelque peu plus sophistiquée dans le cadre de la mathématique classique.

Notons l'invariance des lignes intégrales par les translations le long de l'axe des x et étudions les solutions satisfaisant aux conditions initiales $(0, y_0)$.

Nous voyons apparaître deux cas :

1er cas : $|y_0| << 1$ (i.e. $|y_0| < 1$ et $1 - |y_0|$ n'est pas infiniment petit).

Dans ce cas, sur certaines horizontales, infiniment proches de $y = y_0$, la pente est négative ; sur d'autres, elle est positive. Ceci fait apparaître des trappes infiniment étroites, et chaque trappe contient d'ailleurs une trajectoire rigoureusement horizontale. "L'œil nu" verra donc des trajectoires horizontales.

2ème cas : $|y_0| >> 1$; disons $y_0 >> 1$.

Les pentes sont positives et l'œil verra des courbes ascendantes. Mais quelles courbes ?

Prenons un point (x_0, y_0) d'une ligne intégrale et calculons, pour un accroissement $\Delta y = \frac{2\pi}{\omega}$ de y à partir de y_0, l'accroissement correspondant Δx de x. Il est donné par la formule :

$$\Delta x = \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} \frac{dy}{y + \sin \omega y} = \int_0^{\Delta y} \frac{du}{(y_0+u)\sin \omega(y_0+u)} .$$

La fonction à intégrer est infiniment proche de :

$1/(y_0 + \sin \omega u)$, du moins si $\frac{\omega y_0}{2\pi}$ est entier, ce que nous pouvons admettre sans inconvénient. On en déduit :

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{y_0 + \sin \omega t} = \Phi(y_0) .$$

L'équation différentielle initiale concerne le champ de pente $y + \sin \omega y$ qui change trop rapidement pour être suivi à l'œil. Notre calcul suggère le champ associé à l'équation :

(1) $$y' \, \Phi(y) = 1$$

qui ne subit pas de variation rapide.

Nous espérons que l'œil "verra" les trajectoires de (1) ; il n'est pas difficile de démontrer que cet espoir n'est pas déçu. Notons encore que la tangente vraie aux trajectoires varie rapidement (crépitement).

Deuxième exemple : L'étude classique du premier exemple ne présente guère de difficultés. Mais qu'en est-il des propositions suivantes (toujours avec $\omega > 0$, infiniment grand) :

$$y' = x + \sin \omega y \; , \; y' = \sin \omega xy \; , \; y' = \sin \omega x + \sin \omega y \; ?$$

Troisième exemple : On connaît l'importance de l'équation différentielle de Van der Pol :

$$\epsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0 \; , \; \epsilon > 0 ,$$

et l'intérêt tout particulier de l'étude du comportement asymptotique des solutions de cette équation lorsque ϵ tend vers 0. De notre point de vue, le problème suivant a un sens : "Etudier l'équation proposée pour ϵ infiniment petit". Cette étude se trouve être payante, et nous renvoyons aux articles originaux pour plus de précision.

Quatrième exemple : Considérons une équation différentielle de la forme $y' = \varphi(x,y)$, φ continue mais non lipschitzienne, [par exemple $y' = \sqrt[3]{y}$], et l'équation approchée $y' = P(x,y)$ où P est un polynome tel que $P(x,y) \simeq f(x,y)$ pour x,y finis. La dernière équation (non naïve pour sûr) vérifie l'unicité de la solution pour des conditions initiales (x_0,y_0). L'étude comparée des deux équations $y' = f(x,y)$ et $y' = P(x,y)$ est fructueuse.

6. Généralisations du point de vue précédent. La théorie I.S.T. de Nelson.

L'utilisation des entiers naïfs, à l'exclusion d'une conception quelque peu générale d'objet naïf, est par trop restrictive. Rappelons que objet et ensemble sont synonymes. Aussi allons-nous parer à cet inconvénient par la définition : *Un objet a est dit Naïf s'il est représenté par un assemblage formée des seuls signes logiques et des signes $\in$ et $=$, à l'exclusion de toute constante.*

Les entiers naïfs sont Naïfs au sens de la définition précédente, mais la réciproque est éventuellement en défaut ; d'où la distinction entre naïf et Naïf.

Les objets Naïfs ont un comportement fort agréable dont les propriétés suivantes évidentes donnent une idée :

A) Il existe un ensemble fini G (non unique) tel que tout objet Naïf a vérifie $a \in G$. Tout ensemble infini possède donc des éléments non Naïfs.

B) Si a,f sont des objets Naïfs, alors les objets suivants sont Naïfs $a \times f$, $\mathfrak{P}(a)$, a^f, $f(a)$ ...

C) Un ensemble Naïf $a \neq \phi$ possède au moins un élément Naïf [cela résulte de l'axiome du choix, ou si nous nous en tenons à Bourbaki cela résulte du τ de Hilbert ; τa sera cet élément Naïf].

D) La propriété C) entraîne que deux ensembles Naïfs a,b qui ont les mêmes éléments Naïfs sont égaux.

Avec ces propriétés, on a déjà la possibilité de développer une mathématique plus efficace que celle des entiers naïfs. Cette mathématique est évidemment consistante (si la mathématique classique l'est) et elle est conservative.

Néanmoins, cette façon d'opérer présente quelques inconvénients : les objets naïfs ou Naïfs sont concrets, leur maniement n'est pas réglé par des axiomes, mais par des constatations. De plus, on est amené à étendre sans cesse ce champ de constatations. D'abord les naïfs, puis les Naïfs, puis ... ?

Pour cette raison, les mathématiciens préfèrent, aux objets concrets et aux constatations qui les concernent, une réglementation axiomatique de concepts abstraits, qui reproduise au mieux le comportement des objets concrets. E. Nelson a proposé une telle théorie axiomatique, sous le sigle I.S.T. de la mathématique non standard. La notion concrète d'objet Naïf y cède la place à la notion abstraite d'objets *standard*. Le maniement des objets standard est réglementé par les trois axiomes I, S et T. L'axiome I (pour idéalisation) correspond en gros à A; l'axiome T (transfert) est plus ou moins analogue à D. L'axiome S (standardisation) n'a guère d'analogue dans ce qui précède: on pourrait inventer une notion concrète qui lui serve de support. Mais à quoi bon : la théorie I.S.T. est excellente. Notons quand même ceci : la consistance et la conservation de I.S.T. demandent une démonstration assez difficile par opposition à l'évidence de ces propriétés pour les objets Naïfs.

Quelques documents, parmi d'autres, à l'appui de la thèse T

1 "... Les mathématiciens paraissent d'accord pour (en) conclure (aussi) qu'il n'y a guère qu'*une concordance superficielle* entre nos conceptions "intuitives" de la notion d'ensemble ou d'entier et les formalismes qui sont supposés en rendre compte; le désaccord commence lorsqu'il est question de choisir entre les unes et les autres".

N. BOURBAKI :
Eléments d'Histoire des mathématiques, p. 62. Paris, 1960

2 Il faut noter de nouveau que cette définition des mots "fini" et "entier naturel" leur donne un sens tout à fait différent du sens habituel, ... il peut arriver qu'un ordinal fini ait une infinité (au sens intuitif) d'éléments.

J.L. KRIVINE :
Théorie axiomatique des ensembles, p. 44. Paris, 1972

3 Que le formaliste soit obligé de donner une démonstration en forme de ce principe [d'induction complète], qui est évident en soi pour les entiers de l'intuitionniste, en raison même de leur génération, montre en même temps que le premier ne sera jamais à même de justifier son choix d'axiomes ... par une preuve de consistance de sa théorie.

L.E.J. BROUWER :
Intuitionism and Formalism, Bull. Am. Math. Soc. 20 (1913) 81-96.
Note : les "entiers de l'intuitionniste" sont les entiers naïfs.

4 ... D'autre part je pensais qu'il était tellement clair que cette axiomatique de la théorie des ensembles ne pourrait constituer une base ultime et satisfaisante de la mathématique, que les mathématiciens, dans leur ensemble, ne s'en soucieraient guère. Cependant j'ai constaté récemment, à mon grand étonnement, que très nombreux sont les mathématiciens qui considèrent ces axiomes ensemblistes comme une fondation idéale de la mathématique; pour cette raison il m'a semblé opportun de publier une critique.

Th. SKOLEM:
Actes du congrès math. scandinaves (1922)

5 ... Une fois que l'on récupère du choc de s'entendre conter que les infinitésimaux sont parmi nous, dans les ensembles qui nous sont familiers, on trouvera notre approche très facile à utiliser.

Ed. NELSON: voir bibliographie

6 Dans son célèbre article sur l'infini [Math. Ann. 95 (1925) 161-190], D. Hilbert analyse la situation inéluctable suivante: axiomatisation implique intrusion d'objets idéaux.

7 On pourra relire les célèbres discussions entre Borel, Baire, Lebesgue, Hadamard reproduites dans *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*. Bull. Soc. Math. de France. 33 (1905), p. 261-273.

Bibliographie

ROBINSON Abraham: Non standard Analysis, N.Y. (1966) et (1974).

Ce livre constitue l'acte de naissance de l'analyse non classique. Par son souffle, sa profondeur d'inspiration, son éclectisme et son ambition interdisciplinaire, cet ouvrage reste (et restera peut-être longtemps) inégalé! [Consulter à ce sujet Bull. Am. Math. Soc. 83 (1977) 646-666].

NELSON Ed.: Internal Set Theory, Bull. Am. Math. Soc. 83 (1977) 1165-1198.

Cet article est en même temps une introduction à la bibliographie.

SCHMIEDEN C. et *LAUGWITZ D.*: Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung, Math. Zeitsch 69 (1958) 1-39.

Cet article est le témoignage imprimé des étonnantes applications didactiques, par Schmieden, d'idées qui remontent à 1950 (Cependant, il est impossible de rendre par écrit la saveur de l'enseignement du maître).

En écrivant à :
I.R.M.A., 7 rue René Descartes, 67084 STRASBOURG CEDEX,
on peut se procurer diverses publications :

a) *LUTZ R. et GOZE J.* : *Pratique commentée de la mathématique non classique*. 180 pages.

b) *HARTHONG J.* : *Le Moiré.*
Dans ce travail on peut voir la mathématique non standard à l'œuvre sur un problème concret que la mathématique classique a ignoré dans un prudent attentisme.

c) Divers articles de *DIENER F., DIENER M., CALLOT J.-L., BENOIT E., URLACHER E., TROESCH A., REEB G.,* concernant surtout les problèmes de perturbations singulières des équations différentielles ordinaires.

Plutôt que de donner au lecteur une liste des principaux traités d'analyse non classique déjà parus, ou dont la parution est annoncée, nous préférons terminer par une référence à une curieuse, violente et bien inutile polémique : il s'agit d'une analyse d'un livre de Keisler (*Elementary calculus*, Boston, 1976) publiée dans le Bull. Am. Math. Soc. 83 (1977) 205-208. [Consulter également Bull. Am. Math. Soc. 83 (1977) 1008 et Notices Am. Math. Soc. 179 (1977) 269 et 283 et l'Amer. Math. Monthly].